

**DELHI UNIVERSITY**  
**LIBRARY**

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B2

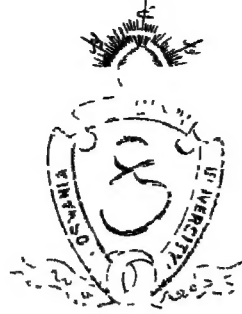
168 N 44  
Date of release for loan

Ac. No. 43134

This book should be returned on or before the date last stamped below.  
An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.

---





نصرتی کے لیے مجاہدین

تفریق مساویں

مصنف

ایچ۔ بی۔ ایچ۔ پیا جوائیم۔ اے۔ ڈی۔ ایس۔ سی

پروفیسر ریاضی یونیورسٹی کالج، نانٹنگھم  
سابق سینئر اسکالرشپ جاز کالج، کیمبرج

مختصر

محمد نذیر الدین صاحب۔ ایم۔ اے

سابق رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ، نئی دہلی

۱۲۶۳ھ - ۱۳۵۳ھ - ۱۹۳۳ء

دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ، نئی دہلی



## دوسرا باب

### پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی مساواتیں

صفحہ	دفعہ
۲۱	۱۱ زیر غور نمونے
۲۲	۱۲ ٹھیک مساواتیں
۲۳	۱۳ مشتمل جزو ضربی
۴	۱۴ متغیر جدائی پذیر
۲۵	۱۵ - ۱۶ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانس مساواتیں
۳۰	۱۸ - ۲۱ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی خطی مساواتیں
۳۵	۲۲ ہندسی مسئلے - قائم مرآة
۳۹	دوسرے باب پر متفرق مثالیں

## تیسرا باب

### مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۳۵	۲۳ زیر غور نمونے
۳۶	۲۴ پہلے رتبہ کی مساواتیں
۳۷	۲۵ دوسرے رتبہ کی مساواتیں
۳۸	۲۶ ترمیم جبکہ اعدادی مساوات کی اصلیں خیالی یا ملحق ہوں
۳۹	۲۷ مساوی اصولوں کی صورت

صفحہ	دفعہ
۵۰	۲۸ اعلیٰ تر رتبوں پر توسیع
۵۳	۲۹ متمم تفاعل اور خاص تکملہ
۵۶	۳۰-۳۳ عامل اعف کے خواص
۶۰	۳۴ متمم تفاعل جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں
	۳۵-۳۸ خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے لیے علامتی طریقے - آزمائشی طریقے
۶۳	اور ان سے حاصل ہونے والے نتائج کی تصدیق
۷۷	۳۹ متجانس خطی مساوات
۷۹	۴۰ ہمزاد خطی مساواتیں
	تیسرے باب پر متفرق مثالیں (میکانی اور برقی تعبیریں)
۸۲	آئندہ اور قسری ارتعاشوں اور گمک پر زوٹس کے ساتھ

## چوتھا باب

### سادہ جزئی تفرقی مساواتیں

۹۳	۴۱ زیر غور مساواتوں کا طبعی ماخذ
۹۵	۴۲-۴۳ اختیاری تفاعلوں اور مستقلوں کا اسقاط
۹۸	۴۴ جزئی تفرقی مساواتوں میں خاص مشکلیں
۹۹	۴۵-۴۶ خاص حل - ابتدائی اور حدودی شرطیں
۱۰۴	۴۷-۴۸ فوریر کے نیم سمت سلسلے
	۴۹-۵۰ دیے ہوئے حدودی شرطوں کو پورا کرنے والے حل کی دریافت میں فوریر کے سلسلہ کا اطلاق
۱۰۹	چوتھے باب پر متفرق مثالیں (ایصال حرارت، برقی
۱۱۱	موجوں کے ارسال اور حل شدہ نمکوں کے نفوذ پر نوٹس ساتھ)

# پانچواں باب

## وہ مساواتیں جو مرتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں

صفحہ

صفحہ

۱۲۰

زیر غور نمونے

۵۱

۱۲۱

وہ مساواتیں جو ع کے لیے حل پذیر ہیں

۵۲

۱۲۲

وہ مساواتیں جو م کے لیے حل پذیر ہیں

۵۳

۱۲۳

وہ مساواتیں جو ل کے لیے حل پذیر ہیں

۵۴

# چھٹا باب

## نادر حل

۱۲۵

لغاف سے ایک نادری حل ملتا ہے

۵۵

ع میں لغاف (ایک مرتبہ)، عقدہ طریق (دو مرتبہ)

۵۸-۵۶

۱۲۷

اور قرن طریق (تین مرتبہ) پائے جاتے ہیں۔

ع میں لغاف (ایک مرتبہ)، طریق (دو مرتبہ)

۶۳-۵۹

۱۳۳

اور قرن طریق (ایک مرتبہ) پائے جاتے ہیں۔

دونوں میزوں کے استعمال سے طریقوں کی شناخت کی

۶۵

۱۴۰

مثالیں

۱۴۲

کلیر کی شکل

۶۶-۶۷

۱۵۵

چھٹے باب پر متفرق مثالیں

## سا تو اں باب

دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی مساواتوں  
کے لیے متفرق طریقے

صفحہ	دفعہ
۱۵۸	زیر غور نمونے ۶۸
۱۵۹	ما بالا غالب ۶۹-۷۰
۱۶۱	متجانس مساواتیں ۷۱-۷۲
۱۶۶	ایک مساوات جو حرکات میں وقوع پذیر ہوتی ہے ۷۳
۱۶۷	عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ۷۵
۱۶۹	مستم تفاعل سے متعلق ایک تفاعل کا معلوم ہونا ۷۶-۷۷
۱۷۱	مبدلوں کا تغیر ۷۸-۸۰
۱۷۶	مختلف طریقوں کا مقابلہ ۸۱
۱۷۹	ساتویں باب پر متفرق مثالیں (طبعی شکل غیر متغیر اور شواہر شین مشتق کا تعارف)

## آٹھواں باب

تفرقی مساواتوں کے حلوں کے عددی تقریب

۱۸۵	زیر غور طریقہ ۸۲
۱۸۶	متواتر تقریبات کو تکمیل کرنے کا پیکرڈ کا طریقہ ۸۳-۸۴
۱۹۰	عددی تقریب راست تفرقی مساوات سے، علم ہند سے مجزہ ہمارے طریقہ ۸۵

صفحہ	دفعہ
۱۹۴	۸۶-۸۷ رُنجے کا طریقہ
۲۰۲	۸۸ ہمزاد مساواتوں پر توسیع
۲۰۵	۸۹ ہیون اور گٹا کے طریقے
۲۰۶	۹۰-۹۳ دوسرا طریقہ اور خطا کے حدود

## نواں باب

### سلسلوں میں حل۔ فراہنس کا طریقہ

۲۱۶	۹۴ فراہنس کی آزمائشی حل کی شکل۔ قوت نمائی مساوات
	۹۵ صورت (۱)۔ قوت نمائی مساوات کی اصلیں نامساوی
۲۱۷	۹۶ لیکن ان کا فرق ایک صحیح عدد نہیں
	۹۷ سلسلوں کے علاقہ استدقاق اور تفرقی مساوات کے
۲۲۰	۹۷ سروں کے نادرات کے مابین ربط
	۹۷ صورت (۲)۔ جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں مساوی
۲۲۱	۹۸ ہوں
	۹۸ صورت (۳)۔ جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں
۲۲۵	۹۹ ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور ایک سر لا تنہا ہی ہو جائے
	۹۹ صورت (۴)۔ جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں
۲۲۹	۱۰۰ ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور ایک سر غیر متعین ہو جائے
	۱۰۰ چند صورتیں جن میں اوپر کا طریقہ ناکام ہوتا ہے مساوات
۲۳۱	کوئی باقاعدہ پچھلے نہیں رکھتی
	نویں باب پر متفرق مثالیں (زائد ہندی سلسلہ اور
۲۳۴	اس کے چوبیس حلوں پر نوٹس کے ساتھ)

## دس سوال باب

صفحہ	پکڑ ڈ، کوشی، اور فراہیش کے مسائل موجودگی	دفعہ
۲۳۸	مسئلہ کی نوعیت	۱۰۱
۲۳۹	پکڑ ڈ کا متواتر تقرب کا طریقہ	۱۰۲
۲۴۳	کوشی کا طریقہ	۱۰۳-۱۰۵
۲۵۰	فراہیش کا طریقہ - میل کے لحاظ سے ایک لائن ہی	۱۰۶-۱۱۰
	سلسلہ کا تفرق	

## گیارہواں باب

تین متغیروں والی معمولی تفرقی مساواتیں  
اور متناظر منحنی اور سطحیں

۲۶۱	اس باب کی مساواتیں منحنیوں اور سطحوں کے خواص کو بیان کرتے ہیں	۱۱۱
۲۶۲	ہمزاد مساواتیں $\frac{فری}{فری} = \frac{فری}{فری} = \frac{فری}{فری}$	۱۱۲
۲۶۵	ضاربوں کا استعمال	۱۱۳
۲۶۷	ایک دوسرا تکملہ جو پہلے تکملہ کی مدد سے معلوم کیا گیا ہو	۱۱۴
۲۶۸	عام اور خاص تکملے	۱۱۵

صفحہ	دفعہ
	۱۱۶ مساوات
	ف فرلا + ق فرما + س فری
۲۶۹	کی ہندسی تعبیر
۲۷۱	اس مساوات کے ممکن کا طریقہ جبکہ وہ ممکن پذیر ہو
۲۷۳	۱۱۹-۱۱۸ وہ ضروری اور کافی شرط کہ ایسی مساوات ممکن پذیر ہو
۲۷۸	۱۲۰ ناممکن پذیر مساوات کا ہندسی مفہوم
۲۸۴	گیارہویں باب پر متفرق مثالیں

## بارہواں باب

### پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں مخصوص طریقہ

۲۸۹	۱۲۱-۱۲۲ اس باب کی مساواتیں ہندسی دلچسپی کے حامل ہیں
۲۹۰	۱۲۳ لگراج کی خطی مساوات اور اس کی ہندسی تعبیر
۲۹۳	۱۲۴ عام ممکنہ کی تحلیلی تصدیق
	۱۲۵ مخصوص ممکنہ - انہیں حاصل کرنے کے ایم - جے - ایم - اے کے طریقوں کی مثالیں
۲۹۶	۱۲۶-۱۲۷ ان مطبوع متغیروں کی خطی مساوات
۲۹۸	۱۲۹-۱۳۰ غیر خطی مساواتیں - معیاری شکل (۱) صرف $\frac{1}{x}$ اور $\frac{1}{y}$ کے
۳۰۲	۱۳۰ معیاری شکل (۲) - صرف $\frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{y}$ اور $\frac{1}{z}$ موجود
۳۰۳	۱۳۱ معیاری شکل (۳) - $f(x, y, z) = f(a, b, c)$
۳۰۴	۱۳۲ معیاری شکل (۴) - جزئی تفرقی مساواتیں جو کلی شکل کے
۳۰۵	مشابہ ہوں

صفحہ	دفعہ
۳۰۶	۱۳۵-۱۳۳ ناور اور عام ٹیکٹ اور ان کا ہندسی مفہوم - میسر
۳۱۲	۱۳۶ خطی مساوات کی خصوصیات
۳۱۶	بارہویں باب پر متفرق مثالیں (امصول ثنویت پر ایک نوٹ کے ساتھ)

## تیرہواں باب

### پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں عام طریقے

۳۲۱	۱۳۷ زیر بحث طریقے
"	۱۳۸-۱۳۹ چارپنی کا طریقہ
۳۲۶	۱۴۰-۱۴۱ تین یا تین سے زیادہ متبوع متغیر - جیکوبی کا طریقہ
۳۳۳	۱۴۲ ہمزاد جزئی تفرقی مساواتیں
۳۳۹	تیرہویں باب پر متفرق مثالیں

## چودھواں باب

### دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی مساواتیں

۳۴۳	۱۴۳ زیر بحث نمونے
۳۴۴	۱۴۴ مساواتیں جن کو معائنہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے - ہندسی شرطوں سے اختیاری تغاظوں کا تعین



صفحہ	دفعہ
۳۴۶	مستقل سروں والی متجانش خطی مساواتیں ۱۵۱-۱۴۵
۳۵۸	استقاط کی مثالیں، مونگے کے طریقوں کے تعارف کے طور پر ۱۵۳-۱۵۲
۳۶۰	س + س + س + ت کو مکمل کرنے کا مونگے کا طریقہ ۱۵۴
۳۶۵	س + س + س + ت + ت + ۶ (رت - س) = و کو مکمل کرنے کا مونگے کا طریقہ ۱۵۵
"	درمیانی تکملوں کو بتانا ۱۵۶-۱۵۷
۳۷۱	درمیانی تکملوں کا مزید تکمل ۱۵۸
۳۷۴	چودھویں باب پر متفرق مثالیں (ڈوریوں، سلاخوں اور چھیلیوں کے ارتعاشوں پر اقد قوہ پر نوٹس کے ساتھ)

## پندرہواں باب متفرق طریقے

۳۸۱	زیر بحث طریقہ ۱۵۹
۳۸۲	نادر حلوں کے نظریہ میں بعض مشکلیں ۱۶۰
۳۸۶	ممیز - خاص حل - اور حدود ۱۶۱
۴۰۰	ریکٹی کی مساوات ۱۶۲
۴۰۱	ریکٹی کی مساوات کو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تبدیل کرنا ۱۶۳
۴۰۲	ریکٹی کی مساوات کے کسی چار مخصوص تکملوں کی چلیپی نسبت لاپر غیر منحصر ہوتی ہے۔ ۱۶۴
۴۰۳	حل کا طریقہ جبکہ تین مخصوص تکملے معلوم ہوں ۱۶۵

صفحہ	دفعہ
۴۰۳	حل کا طریقہ جبکہ دو مخصوص ٹیکے معلوم ہوں۔
۴۰۴	حل کا طریقہ جبکہ ایک مخصوص ٹیکہ معلوم ہو
	کل تفرقی مساوات $ق + فلا + ق + فرما + س + فری = ۰$
۴۰۹	کو تکمیل کرنے کے دو طریقے
۴۱۰	متجانس مساواتوں کے لیے متکمل جزو ضربی
۴۱۲	میر کا طریقہ
۴۱۵	دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتیں
۴۱۶	باقاعدہ ٹیکے
۴۲۰	فوشس کا مسئلہ
۴۲۳	معمولی اور نادور نقطے
۴۲۵	فوشی نمونہ کی مساواتیں
۴۲۸	عمیز ناسیندہ
۴۲۹	طبعی اور تحت طبعی ٹیکے
۴۳۶	مرتعش ڈوریوں کی مساوات
۴۳۷	موج کی مساوات کے خاص حل
۴۳۹	پوائسن (دیا لیولی) کا عام حل
۴۴۳	ریاضیاتی طبیعیات کی دیگر تفرقی مساواتیں
۴۴۵	عددی تقرب - آڈم کا طریقہ
۴۵۳	دفعات ۹۰ تا ۹۳ کے طریقہ کی ریس کی توسیع
	<b>ضمیمہ ۱</b>
	وہ ضروری اور کافی شرط کہ مساوات
	$م + فلا + ن + فرما = ۰$
۴۵۵	ٹیک ہو

صفحہ

## ضمیمہ

۴۵۷

ایسی مساوات جس کے کوئی مخصوص نمونے نہ ہوں

## ضمیمہ ج

۴۵۹

وہ مساوات جو دفعہ ۱۴۰ کے جیکوبی کے طریقہ سے حاصل ہوتی ہے ہمیشہ تکمیل پذیر ہوتی ہے۔

## ضمیمہ د

۴۶۱

مزید مطالعہ کے لیے مشورے

متفرق مثالیں پوری کتاب پر

(معین نمکوں سے حل، متقارب سلسلے، رانگی کا

مقطع، جیکوبی کا آخری ضارب، محدود

تفرقی مساوات، ہیملٹن کے حرکیاتی مساواتیں،

۴۶۴ فوکو کا رقام، عطارد کا حنیض، پرنٹس کیساتھ)

۵۱۱

جوابات

۵۷۲

جوابوں کی متبادل شکلوں پر نوٹ

۸ تا

اشاریہ

# تہذیب

سوفس لائی (Sophus Lie) نے کہا ہے کہ تفرقی مساواتوں کا نظریہ ریاضیات بانی کی اہم ترین شاخ ہے۔ یہ مضمون گویا ایک مرکزی محل اختیار کرتا ہے جس سے متعدد سمتوں میں اس کی توسیع کی شاخیں پھیلی ہوتی ہیں۔ اگر ہم اس شاخ پر چلیں جو خالص تحلیلی ہے تو ہم جلد ہی لامتناہی سلسلوں، موجودگی کے سلسلوں، اور تقاطعوں کے نظریہ کی بحث پر پہنچتے ہیں۔ لیکن ایک دوسری شاخ پر چلیں تو منحنیوں اور سطحوں کے تفرقی علم مندرجہ پر آتے ہیں۔ ان دو کے درمیان وہ شاخ ہے جس کو سب سے پہلے سوفس لائی نے دریافت کیا تھا اور وہ اس سوال کے مسائل گروہوں اور ان کی ہندسی تعبیر پر ختم ہوتی ہے۔ اس سے بہت سی دیگر شاخوں کے علم کا آغاز ہوتا ہے۔ طبیعی کیمیا اور طبیعی عمل کا کلیہ بڑی حد تک بعض تفرقی مساواتوں سے متعلق ہے۔ اس کتاب کا مقصد یہ ہے کہ اس مضمون کے مرکزی حصوں کو اس قدر سادہ شکل میں بیان کیا جائے جس قدر ممکن ہے تاکہ وہ طلباء اس سے استفادہ کر سکیں ہو جو اس مضمون سے واقف نہیں ہیں اور ساتھ ہی ان

مختلف ہمتوں کی جانب اشارہ کر دیا جائے جس میں اس مضمون کی توسیع ممکن ہے۔  
 متن کا بیشتر حصہ اور اس میں مندرجہ مثالیں بہت آسان ہیں۔ قانون  
 سے صرف اس امر کی توقع کی گئی ہے کہ وہ تفرقی اور تکمیلی احصاء کے  
 مبادی اور کچھ محدودوں کے علم ہندسہ سے واقف ہوں گے۔ ابواب کے  
 ختم پر جو متفرق مثالیں دی گئی ہیں وہ قدرے مشکل ہیں۔ انہیں کچھ اہم  
 مسئلے شامل ہیں لیکن ان کے ساتھ ہی کچھ ایسے اشارے درج کر دیے  
 گئے ہیں جن کی مدد سے ان کو حل کیا جاسکتا ہے۔ ان میں ہندسی اور  
 طبیعیاتی اطلاقات بھی دئے گئے ہیں لیکن سوالوں کے بیان کرنے میں  
 بڑی احتیاط ملحوظ رکھی گئی ہے تاکہ طبیعیات سے واقف ہونے کی ضرورت نہ رہے  
 مثلاً ایک جزئی تفرقی مساوات کو بعض خاص مستقلوں اور متغیروں کی  
 رقوم میں حل کرنے کے لیے کہا گیا ہے۔ اس کو خالص ریاضی کا سوال  
 سمجھا جاسکتا ہے لیکن اس کے ساتھ ہی ایک نوٹ درج ہے جس میں  
 یہ بتایا گیا ہے کہ یہ سوال حرارت کے ایک مشہور تجربہ سے متعلق ہے  
 اور ان مستقلوں اور متغیروں کا کیا مفہوم ہے جو اس میں استعمال ہوئے  
 ہیں۔ آخر میں کتاب کے ختم پر ۱۱۵ مثالیں بہت مشکل دی گئی  
 ہیں اور ان میں سے اکثر مختلف جامعات کے امتحانوں کے پرچوں  
 سے لی گئی ہیں۔ [میں جامعات لندن، شیفیلڈ، اور ویلر اور مٹنچ  
 جامعہ کیمبرج کے سٹڈنٹ کیٹ کامنوں ہوں کہ ان مثالوں کے اندراج  
 کی اجازت مجھے دی گئی]۔ یہ کتاب بی۔ ایس۔ سی (لندن) آنریزیا کیمبرج  
 میتھمیٹیکل ٹرائی پاس حصہ دوم کے شیڈیول (A) کے نصاب پر حاوی  
 ہے اور نیز اس میں کچھ وہ حصہ بھی شامل ہے جو ایم۔ ایس۔ سی (لندن)  
 اور میتھمیٹیکل ٹرائی پاس شیڈیول (B) کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔  
 ضمیمہ میں رائد مطالعہ کے لیے حوالے درج ہیں۔ حل شدہ یا حل طلب  
 مثالوں کی تعداد بہت زیادہ ہے اور حل طلب مثالوں کے جوابات  
 کتاب کے ختم پر دے دئے گئے ہیں۔

چند اہم امور کا ذکر نامناسب نہ ہوگا۔ پہلے باب میں جو ترمیمی طریقہ بیان کیا گیا ہے [یہ طریقہ اس مقالہ کے مسودہ پر جو ڈاکٹر برادشکی نے ازراہ مہربانی مجھے مستعار عنایت کیا تھا اور جس کو انہوں نے میتھیمیاٹیکل ایسوسی ایشن کے سامنے پڑھ کر سنایا تھا اور پروفیسر شکوواڈیا کے ایک ایسے ہی مقالہ پر مبنی ہے] اس سے پہلے کسی کتاب میں شائع نہیں ہوا۔ وہ باب جس میں عددی مکمل کے مضمون پر بحث کی گئی ہے معمول سے زیادہ تفصیلی بحث کا حامل ہے۔ اس میں خاص کر رینج اور پیکرڈ کے طریقوں پر بحث کی گئی ہے لیکن ایک نیا طریقہ بھی جس کو میں نے وضع کیا ہے بیان کر دیا گیا ہے۔

مستقل سہروں والی خطی تفرقی مساواتوں پر جو باب ہے اس میں ایسے غیر اطمینان بخش بنوتوں سے اجتناب کیا گیا ہے جنہیں لامتناہی مستقل شامل ہوتے ہیں۔ اس میں یہ بھی بتایا گیا ہے کہ خاص مکملوں کے دریافت کرنے میں عامل عرف کا استعمال اس سے زیادہ توجہ کا محتاج ہے جو اب تک اسے دیجاتی رہی ہے۔ اس باب میں جو طریقہ اختیار کیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ اس عامل کو ایک جبری علامت کے طور پر بلا خوف استعمال کر کے ایک نتیجہ حاصل کیا گیا ہے اور اس کی تصدیق راستہ تفرق سے کی گئی ہے۔

اس کے بعد وہ باب آتا ہے جس میں سادہ جزئی تفرقی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے [اس کا انحصار ریمین کی کتاب "Partielle Differential-gleichungen" پر ہے]۔

اس میں جو طریقے درج ہیں وہ صریحاً پچھلے باب کے طریقوں کی توسیعات ہیں اور ان کی طبعیاتی اہمیت اتنی زیادہ ہے کہ ان کو کسی آئندہ باب پر منحصر رکھنا مناسب نہ تھا۔

ان حصوں میں جن میں لگرائج کی خطی جزئی تفرقی مساواتوں سے بحث کی گئی ہے ایم۔ جے۔ ایم ہال کے حالیہ مقالہ سے دو

مثالیں ملی گئی ہیں جن سے موصوف کے ان طریقوں کی توضیح ہوتی ہے جو خاص  
 محکموں کے حصول کے لئے استعمال کئے گئے ہیں۔  
 سلسلوں میں جو حل حاصل کئے گئے ہیں ان میں فرانسیس کے طریقہ  
 کو سب سے زیادہ اہمیت دی گئی ہے۔ مثالوں کو حل کر کے اس طریقہ کو  
 سمجھانے میں پورا ایک باب وقف کیا گیا ہے۔ اس کے بعد ایک بہت  
 مشکل باب آتا ہے جس میں ان مفروضات کو صحیح ثابت کیا گیا ہے جو  
 اول الذکر باب میں مان لیے گئے ہیں اور نیز استرقاق کے مشکل مسئلوں پر  
 بحث کی گئی ہے۔ اس میں اس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جو مشکل پیدا  
 ہوتی ہے اور پیچیدہ ثبوتوں کے عام تخیلات کو بہت صاف صاف واضح  
 طور پر بیان کیا جائے۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ جب ایک طول طویل حرفی ثبوت  
 سے طالب علم دوچار ہوتا ہے تو وہ تفصیلات سے اس قدر پریشان ہو جاتا ہے کہ  
 اس کو عام نظریہ کا بہت کم اندازہ ہوتا ہے۔ اس باب کی تیاری میں مسٹر ایس  
 پو لڈبی۔ اے سنڈی کا لچ کیمبرج نے جو مدد کی ہے اس کا میں شکر گزار ہوں۔  
 یہ باب اس کتاب کا وہ حصہ ہے جو اعلیٰ ریاضیات سے متعلق ہے اور اس کے  
 سمجھنے کے لئے لامتناہی سلسلوں سے واقف ہونے کی ضرورت ہے۔ جہاں  
 کہیں ایسے مسئلے استعمال ہوئے ہیں وہاں ان معیاری کتابوں کا حوالہ دیا گیا  
 ہے جن میں یہ مسائل حل کئے گئے ہیں۔  
 میں پروفیسر ڈبلیو۔ پی۔ ملن جنرل ایڈیٹر پریس مٹھیماٹیکل سیریز کا ان کی مسلسل  
 ہمت افزائی اور تنقید کے لئے اور مسٹر جے۔ مارشل ایم۔ اے بی۔ ایس۔ سی  
 اور مس ایچ۔ ایم۔ براوننگ ایم۔ ایس۔ سی کا ان کے اس کام کے لیے جو  
 انہوں نے مثالوں کی تصدیق اور شکلوں کے کھینچنے میں کیا ہے بہت ممنون  
 اور شکر گزار ہوں۔  
 کوئی تصحیح یا شورہ بڑی ممنونیت کے ساتھ قبول کیا جائیگا۔

ایچ۔ بی۔ ایچ۔ - پیسا جو  
 یونیورسٹی کالج ناٹنگھم فروری ۱۹۲۰ء

# ۱۹۲۸ء مہینہ اڈیشن

اس اڈیشن میں ایک طویل نئے باب کا اضافہ کیا گیا ہے جس کی نوعیت ایک ضمیمہ کی سی ہے، اس میں ان مشکلوں سے جو نادرا حلوں کے نظریہ میں پیش آتی ہیں بحث کی گئی ہے اور مینزوں کے طریقوں (Loci) کو احاطوں کے طور پر پیش کیا گیا ہے جس سے بہت کم لوگ واقف ہیں، نیز ریختی کی مساوات، قطعی تفرقی مساواتوں کے لیے دو رائے طریقے (میر کا عام طریقہ اور تجانس مساواتوں کے لیے متکمل جزو ضربی کا استعمال) دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتوں کے حل سلسلوں میں (فوک کا مسئلہ، معمولی اور نادرا نقطے، فوک کی نمونہ کی مثالیں) مبنیاً، طبعی اور سخت طبعی، تکملے ریاضیاتی طبیعیات کی چند مساواتیں (بالخصوص مرتعش ڈوریلوں کی مساوات اور موجوں کی تین بعدی مساواتیں) اور تقریبی عددی حل (آدم کا طریقہ اور ریس کی حالیہ تحقیق) بھی بیان کئے گئے ہیں۔ کتاب کے دوسرے حصوں کی نظر ثانی کی گئی اور چند زائد مثالیں کا اضافہ کیا گیا ہے۔ جو ابوں کو جہاں ضرورت محسوس ہوئی بدل دیا گیا ہے۔

میں اپنے متعدد احباب کا ان کے قیمتی مشوروں اور مدد کے لیے ممنون ہوں ان میں خاص طور پر مسٹر ایچ۔ بی۔ میچل سابق پروفیسر جامعہ کولمبیا پروفیسر ای۔ ایچ۔ نیوولی جامعہ ریڈنگ اور مسٹر ایف۔ انڈر وڈ قابل ذکر ہیں۔

ایچ۔ بی۔ ایچ۔ بیاجو مئی ۱۹۲۸ء



## تاریخی تعارف

تفرقی اور تکمیلی احصاء کی ایجاد کے بعد بہت جلد تفرقی مساواتوں  
 علم کا آغاز ہوا جو صرف تفرقی اور تکمیلی احصاء سے متعلق ہے۔ نیوٹن نے  
 ۱۶۶۹ء میں تفرقی احصاء کی (Fluxional) شکل کا انکشاف کیا اور اس کے  
 گیارہ سال بعد ہی اس نے ۱۶۷۶ء میں ایک تفرقی مساوات کو ایک  
 لائنیا ہی سلسلہ کے استعمال سے حل کیا۔ لیکن یہ نتیجے ۱۶۹۳ء تک  
 شائع نہیں ہوئے اور یہ سنہ وہی ہے جس میں لیب نیر کی تصنیف شائع ہوئی  
 میں ایک تفرقی مساوات کا ذکر کیا گیا ہے (لیب نیر نے ۱۶۸۴ء  
 جس میں تفرقی احصاء پر ایک مضمون لکھا تھا)۔

اس کے بعد چند سال کے اندر ہی بڑی سرعت سے ترقی ہوئی۔  
 ۱۶۹۴ء تا ۱۶۹۷ء میں برنولی نے ”متغیروں کو جدا کرنے“ کے طریقہ کی  
 توضیح کی اور یہ بتایا کہ پہلے رتبہ کی ایک متجانس تفرقی مساوات  
 ایک ایسی مساوات میں تحویل کی جاسکتی ہے جس میں  
 متغیر جدائی پذیر ہوتے ہیں اس نے ان طریقوں کو قائم مرماۃ پر استعمال کیا۔  
 وہ اور اس کا بھائی جیکب (جس کے نام پر ”برنولی کی مساوات“ مشہور  
 ہے) بہت سی تفرقی مساواتوں کو ایسی شیطوں میں تحویل کرنے میں  
 کامیاب ہوئے جن کو وہ حل کر سکتے تھے۔ مکمل اجزائے ضربی کو

غالباً یولر نے ۱۷۳۲ء میں اور (جداگانہ طور پر) فوٹیکن اور کلیرونے دریافت کیا اگرچہ بعض محقق کہتے ہیں کہ ان کا انکشاف لیب نیر نے کیا تھا۔ نادر حل جن کا علم لیب نیر کو ۱۶۹۴ء میں اور بروک ٹیلر کو ۱۷۳۲ء میں ہوا بالعموم اکیلرو (۱۷۳۲ء) کے نام سے منسوب کئے جاتے ہیں۔ لیب نیر نے ان کی ہندسی تعبیر ۱۷۴۲ء میں بیان کی لیکن وہ نظریہ جو موجودہ شکل میں ہے اس کے بہت بعد ۱۷۸۲ء میں ٹیلے نے اور ۱۸۵۵ء میں ایم۔ جے۔ ایم ہل نے بیان کیا۔ مستقل سروں والی دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے یولر سے منسوب ہیں۔ ڈلمبرٹ نے وہ صورت حل کی جن میں اعدادی مساوات کی انسیلیں مساوی ہوتی ہیں۔ خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے علامتی طریقے تقریباً ایک صدی بعد لوبیاٹو نے ۱۸۳۳ء میں اور بول نے ۱۸۵۹ء میں بیان کئے۔

پہلی جزئی تفرقی مساوات جس کا علم ہوا وہ تھی جس سے ایک مرتعش ڈوری کی شکل حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات پر جو دوسرے رتبہ کی ہے یولر اور ڈلمبرٹ نے ۱۷۴۲ء میں بحث کی۔ لگراج نے اس مساوات کے حل کی تکمیل کی اور نیران مقالوں میں جو ۱۷۴۲ء سے ۱۷۸۵ء تک اس نے لکھے پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے۔ اس نے خطی مساوات کا عام تکملہ معلوم کیا اور ممکن تکملوں کی مختلف قسموں کو دریافت کیا جبکہ مساوات خطی نہ ہو۔

یہ نظریے تا حال نامکمل ہیں۔ کرشل نے ۱۸۹۲ء میں اور ہل نے ۱۹۱۴ء میں اس مضمون میں کچھ اضافہ کیا ہے۔ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے دوسرے طریقے چاربی (۱۸۴۲ء) اور جیکوبی (۱۸۳۶ء) نے بیان کئے۔ اس سے اعلیٰ رتبہ کی

مساواتوں کے لیے اہم ترین تحقیقاتیں لاپلاس (۱۷۸۳ء) موننگے (۱۸۳۷ء) امبیر (۱۸۸۸ء) اور ڈاربو (۱۸۷۷ء) نے کی ہیں۔ تقریباً سترہ سو تک تفرقی مساواتوں کا مضمون اپنی ابتدائی شکل میں یعنی ایک ایسی شکل میں حل معلوم کرنا جس میں معلومہ تفاضلوں (یا ان کے تخملوں) کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہو بہت کچھ اسی حالت میں تھا جس میں وہ آج ہے۔ اولاً علما ریاضی کو یہ امید تھی کہ ہر تفرقی مساوات کو اس طریقہ پر حل کیا جاسکتا ہے لیکن ان کی کوششیں بے نتیجہ ثابت ہوئیں جس طرح کہ متقدمین پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی عام جبری مساوات کو حل کرنے میں ناکام ہوئے تھے۔ یہ مضمون اب بدل گیا ہے اور تفاضلوں کے نظریہ سے بہت قریب ہو گیا ہے۔ کوششی نے ۱۸۲۳ء میں یہ ثابت کیا کہ وہ لامتناہی سلسلہ جو ایک تفرقی مساوات سے حاصل ہوتا ہے مستند ہوتا ہے اور اس طرح اس نے حقیقت میں ایک ایسے تفاضل کی تعریف کی جو تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ تفرقی مساواتوں کے مطالعہ کے اس دوسرے دور کی تحقیقاتوں میں استدقاق کے سوالوں (کوششی نے سب سے پہلے استدقاق کی شرطیں بیان کیں) پر بڑی توجہ کی گئی۔ یہ بد قسمتی سے اس کی وجہ سے یہ مضمون بہت نظری اور طالب علم کے لیے بہت مشکل ہو جاتا ہے۔ پہلے دور میں مساواتیں نہ صرف خود سادہ تر تھیں بلکہ ان کا مطالعہ علم حیل اور طبیعیات کے سوالوں کے سلسلہ میں کیا جاتا تھا اور حقیقت یہ ہے کہ اس کام کے آغاز کی وجہ یہی علوم تھے۔

کوششی کی تحقیقاتوں کو برائے اور بوکو (۱۸۵۶ء) نے جاری رکھا اور ایک نیا طریقہ یعنی ”متواتر تقریبات“ کا پیکرڈ (۱۸۹۷ء) نے ایجاد کیا۔ فکس (۱۸۶۶ء) اور فرانیس (۱۸۷۷ء) نے متغیر سروں والی دوسرے اور اعلیٰ رتبہ کی خطی مساواتوں کی تحقیق کی۔ مسلسل گرد ہونے

لائی کے نظریہ سے (۱۸۸۶ء سے) بظاہر غیر متعلق طریقوں میں ربط و اتحاد کا انکشاف ہوا۔ شارز، لین، اورگرے نے اپنے کام کو ترکیبی طریقوں کی امداد سے آسان کر دیا اور واڈیا (۱۹۱۷ء) کے حالیہ مقالہ میں پیکرڈ اور پوائنکار کے نتیجوں کی ترکیبی تعبیر درج ہے۔ منجے اور دیگر علمائے عدوی تقریبات سے بحث کی ہے۔ دیگر تاریخی حوالے کتاب میں جہاں اس کی ضرورت معلوم ہوئی بیان کر دیے گئے ہیں۔ اس سے زیادہ تفصیلی معلومات راوزبال کی کتاب شارٹ ہسٹری آف پٹیمیٹکس میں ملیں گی۔





(۱)

# تفرقی مساواتیں

## پہلا باب

تمہید اور تعریفات - اسقاط - ترسیمی تعبیر

۱ - نمونوں

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{فر۲}{فر۱} = - ف۲ م۱$$

$$۲ \quad \frac{فر۳}{فر۱} + ۳ \frac{فر۲}{فر۱} + \frac{فر۱}{فر۱} = ۱۰ = ۱۰ - ۱ = ۹ = ۳ - ۱ = ۲$$

(۲) .....

$$(۳) \dots\dots\dots = \left[ \left( \frac{فر۲}{فر۱} \right) + ۱ \right] \frac{فر۲}{فر۱} = ۳$$

$$(۴) \dots\dots\dots = \frac{فر۱}{\frac{فر۲}{فر۱} + ۱} = \frac{فر۱}{فر۲ + ۱}$$

$$(۵) \dots\dots\dots = \frac{جف۲}{جف۱} = \frac{جف۲}{جف۱}$$

کی مساواتیں جن میں تفرقی سر شامل ہوں تفرقی مساواتیں کہلاتی ہیں۔  
۲۔ جبر و مقابلہ، علم ہندسہ، علم الحیل، طبیعیات، اور کیمیا کے متعدد مسئلوں سے تفرقی مساواتیں پیدا ہوتی ہیں۔ ان کی مثالیں اس کتاب کے مختلف مقاموں پر دی جائیں گی اور ان مثالوں میں اسقاط، تناسب، انحنا، لفاف، حیل، نظاموں کے اور برقی ردوں کے اہتزاز، شہیروں کا خلاء، حرارت کا ایصال، محلولوں کا نفوذ، کیمیائی تعاملوں کی رفتار وغیرہ پر اطلاق شامل ہوں گے۔

۳۔ تقریظیں۔ وہ تفرقی مساواتیں جن میں صرف ایک غیر تابع (مثلاً) متغیر شامل ہو مثلاً (۱)، (۲)، (۳) اور (۴) معمولی تفرقی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

وہ تفرقی مساواتیں جن میں دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیر اور ان کے لحاظ سے جزئی تفرقی سر شامل ہوتے ہیں مثلاً (۵) جزئی تفرقی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

(۲) نمونہ (۱) جیسی مساوات جس میں دوسرے تفرقی سر شامل ہو اور اس سے اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر شامل نہ ہوں دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ مساوات (۴) پہلے رتبہ کی ہے (۳) اور (۵) دوسرے رتبہ کی ہیں اور (۲) تیسرے رتبہ کی ہے۔ مساوات کا درجہ وہی ہوتا ہے جو اس میں شامل ہو نیو اعلیٰ ترین تفرقی سر کا ہے جبکہ مساوات کو تفرقی سروں کے لحاظ سے منطق اور صحیح بنا لیا گیا ہو۔ چنانچہ مساواتیں (۱)، (۲)، (۴) اور (۵) پہلے درجہ کی ہیں۔

(۳) کو منطق بنانے کے لیے اس کا مربع لینا ہوگا۔ چنانچہ

لہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) میں لا غیر تابع متغیر اور مائع متغیر ہے۔ مساوات (۵) میں لا اور ت دو غیر تابع متغیر اور مائع متغیر ہیں۔

اس کے بعد معلوم ہوگا کہ وہ دوسرے درجہ کی ہے کیونکہ اس میں  
( $\frac{فر۲}{لا۲}$ ) کا مربع شامل ہے۔

درجہ کی اس تعریف سے لایا یا کا منطق یا صحیح شکل میں واقع  
ہونا ضروری نہیں ہے۔

دوسری تعریفیں حسب موقع اور ضرورت بیان کی جائیں گی۔  
۴۔ اسقاط کے ذریعہ تفرقی مساواتوں کی ساخت۔

اب ہم اسقاط کے مسئلہ پر غور کریں گے کیونکہ اس سے یہ  
اندازہ ہوگا کہ تفرقی مساوات کا حل کس قسم کا ہوا کرتا ہے۔  
ذیل میں چند مثالیں دی جاتی ہیں جن میں اختیاری مستقلوں  
ساقط کر کے معمولی تفرقی مساواتیں حاصل کی گئی ہیں۔ ائمہ  
(چوتھے باب میں) چلکر ہم دیکھیں گے کہ جزئی تفرقی مساواتوں کو  
اختیاری مستقلوں کے یا اختیاری تفاضلوں کے اسقاط سے کس طرح  
بنایا جاسکتا ہے۔

## ۵۔ حل طلب مثالیں۔

(۱) سادہ موسیقی حرکت کی مساوات لا = (جم (ف ت عہ)  
پر غور کرو۔ ہم اختیاری مستقلوں (ا اور عہ کو ساقط کریں گے۔

تفرق کرنے پر،  $\frac{فر۱}{فر۲} = - ف (جم (ف ت عہ)$

اور  $\frac{فر۱}{فر۲} = - ف (جم (ف ت عہ) = - ف لا$

اس لیے مطلوب نتیجہ  $\frac{فر۱}{فر۲} = - ف لا$  ہے جو دوسرے رتبہ کی



ایک مساوات ہے۔ اس کی تعبیر یہ ہے کہ اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے مبداء سے فاصلہ۔

(۲) اس آخری نتیجہ سے  $و$  کو ساقل کرو۔

$$\text{پھر تفرق کرنے پر، } \frac{\text{فر}^3 \text{ لا}}{\text{فر}^2 \text{ ت}} = \frac{\text{و}^2 \text{ فر}^2 \text{ لا}}{\text{فر}^2 \text{ ت}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر}^3 \text{ لا}}{\text{فر}^2 \text{ ت}} = \text{و}^2 = \frac{\text{فر}^2 \text{ لا}}{\text{فر}^2 \text{ ت}} \quad (\text{آخری نتیجہ کی رو سے})$$

$$\text{پس ضرب دینے پر، } \frac{\text{فر}^3 \text{ لا}}{\text{فر}^2 \text{ ت}} \times \frac{\text{فر}^2 \text{ ت}}{\text{فر}^2 \text{ ت}} = \frac{\text{فر}^3 \text{ لا}}{\text{فر}^2 \text{ ت}} \times \frac{\text{فر}^2 \text{ ت}}{\text{فر}^2 \text{ ت}}$$

جو تیسرے رتبہ کی مساوات ہے۔ (۳) ان تمام مکایوں کی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا محور محور لا ہو۔

ایسے کسی مکافی کی مساوات کی شکل

$$\text{ہوگی۔ دوبار تفرق کرنے پر حاصل ہوگا}$$

$$\text{ما}^2 = \frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر}^2 \text{ لا}} = \frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر}^2 \text{ لا}}$$

$$\text{یعنی } \text{ما}^2 = \frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر}^2 \text{ لا}}$$

$$\text{اور } \text{ما}^2 = \frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر}^2 \text{ لا}} + \left( \frac{\text{فر}^2 \text{ ما}}{\text{فر}^2 \text{ لا}} \right) = 0 \quad \text{جو دوسرے رتبہ کی مساوات ہے}$$

مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

$$(۱) \quad ۱ = ۱ + ۱ - ۱ \quad (۲) \quad ۱ = ۱ + ۱ - ۱$$

$$(۳) \quad ۱ = ۱ + ۱ - ۱ \quad (۴) \quad ۱ = ۱ + ۱ - ۱$$

$$(۵) \quad ۱ = ۱ + ۱ - ۱ \quad \text{اگر } ۱ = ۱ \text{ تو ثابت کرو کہ } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ نیز اس}$$

نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$$(۶) \quad \text{ثابت کرو کہ مبداء میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کے لیے } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

اس کی تعبیر بیان کرو۔

$$(۷) \quad \text{ثابت کرو کہ خواہ کوئی خط مستقیم ہو اس کے لیے } \frac{۱}{۱} = ۰ \text{۔ اس کی}$$

تعبیر بیان کرو۔

۶۔ ن اختیاری مستقلوں کو ساقط کرنے کے لیے (باعموم)

ن میں رتبہ کی ایک تفرقی مساوات ضروری ہوتی ہے۔

طالب علم دفعہ ۵ کی مثالوں سے اس نتیجہ پر پہنچ چکا ہو گا۔ اگر ہم ایک مساوات کو جس میں ن اختیاری مستقل ہوں ن دفعہ تفرق کریں تو کل (ن + ۱) مساواتیں حاصل ہونگی اور ان سے ن مستقل مقداروں کو ساقط کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ نتیجہ میں ن واں تفرقی سر شامل ہوتا ہے اس لیے اس کا رتبہ ن ہے۔

۷۔ یہ استدلال وہی ہے جو عام طور پر دیا جاتا ہے لیکن اعلیٰ ریاضی کے طالب علم کو اس استدلال میں چند خامیاں نظر آئیں گی۔ یہ بیان کر کسی (ن + ۱) مساواتوں سے ن مقداروں کو ساقط کیا جاسکتا ہے خواہ ان مساواتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو۔

(۴) ۷۔ ن ویں رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات کے عام سے

عام حل میں ن اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں۔  
یہ غالباً اوپر کے مسئلہ کے عکس سے جو یہ ہے کہ ن اختیاری مستقل  
کون ویں رتبہ کی ایک تفرقی مساوات سے بالعموم ساقط کیا جاسکتا ہے  
بالکل واضح نظر آئے لیکن اسکا باقاعدہ ثبوت آسان نہیں ہے۔  
تاہم اگر یہ مان لیا جائے کہ تفرقی مساوات کا حل ایسا ہے کہ

بقیہ صفحہ گذشتہ۔ بہت عام ہے۔ فردری اور کافی شرطوں کا ٹھیک ٹھیک بیان بہت  
ہی پیچیدہ ہے۔

بعض اوقات (ن + ۱) سے کم مساواتوں کی ضرورت پڑتی ہے۔  
ایک صریح مثال مساوات ما = (۱ + ب) لا کی ہے جہاں دو اختیاری  
مستقل اس طریقہ پر واقع ہیں کہ وہ فی الحقیقت ایک مستقل مقدار کے مماثل ہیں۔  
دوسری مثال ما = ۲ لا ما + ب لا ہے جو اس قدر صریح نہیں ہے۔

یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء میں سے گزرتے ہیں فرض  
کرو کہ یہ خطوط مستقیم ما = م لا اور ما = ۲ م لا ہیں ان میں سے ہر مساوات

سے نتیجہ  $\frac{ما}{لا} = \frac{فرما}{لا}$  حاصل ہوتا ہے جو دوسرے رتبہ کی بجائے پہلے

رتبہ کا ہے۔ ابتدائی مساوات کو تفرق کر کے اور ب کو ساقط کر کے  
طالب علم اس نتیجہ کو حاصل کر سکتا ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$(ما - لا) \left( \frac{فرما}{لا} \right) = ۰$$

لے آئندہ بالوں میں طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ یہ مفروضہ ہمیشہ  
جائز نہیں ہے۔

اُس کو لا کی صعودی صحیح قوتوں کے ایک مستحق سلسلہ میں پہنچایا جاسکتا ہے تو یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ اختیاری مستقلوں کی تعداد کیوں ن ہوتی ہے۔

مثلاً تیسرے رتبہ کی تفرقی مساوات  $\frac{x^3}{3!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$  پر غور کرو۔

مان لو کہ  $1 = 1 + 1 + 1 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \dots$  تک  
تب تفرقی مساوات میں درج کرنے پر حاصل ہوگا

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \dots$$

اس لیے

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3!} &= \frac{x^3}{3!} \\ \frac{x^2}{2!} &= \frac{x^2}{2!} \\ \frac{x}{1!} &= \frac{x}{1!} \\ \frac{1}{(n-1)!} &= \frac{1}{(n-1)!} \\ \frac{1}{n!} &= \frac{1}{n!} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

پس  $1 = 1 + 1 + 1 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \dots$

$$(\dots + \frac{1}{n!} +$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (جنرلا - 1)}$$

جس میں صرف تین اختیاری مستقل  $1, 1, 1$  شامل ہیں۔

اِسی طرح کا استدلال مساوات

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = f(\lambda_n), \frac{f_n}{f_{n-1}}, \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}, \dots, \frac{f_1}{f_0}$$

کے لیے بھی کیا جاسکتا ہے۔

حرکیات میں تفرقی مساواتیں عموماً دوسرے رتبہ کی ہوتی

ہیں مثلاً  $\frac{f^2 m}{f^2 m} + f^2 m =$  جو سادہ موسیقی حرکت کی مساوات

ہے۔ ایسا عمل معلوم کرنے کے لیے جس میں اختیاری مستقل شامل

نہ ہوں دو تشریحوں کی ضرورت ہے مثلاً ما اور فرما کی قیمتیں

جبکہ ت = ۰۔ ان سے ابتدائی ہٹاؤ اور رفتار معلوم ہوتے ہیں۔

۸۔ کامل ابتدائی۔ خاص تکملہ۔ نادر حل۔

تفرقی مساوات کا وہ حل جس میں اختیاری مستقلوں کی پوری

تعداد شامل ہو گا بل ابتداءئی کہلاتا ہے۔

کوئی عمل جو کامل ابتدائی سے ان مستقلوں کو مخصوص قیمتیں

دیکر حاصل کیا گیا ہو غاصّ تکملہ کہلاتا ہے۔

چنانچہ  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر۳ا}}{\text{فر۱ا}}$  کا کامل اہستہائی

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n \text{ (جزء لا - ۱)}$$

یا م = ج + د، جنزلا + د، جنزلا، جہاں ج = د - د

یا  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$  جہاں  $\frac{1}{x} = 1$ , اور  $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$



کامل ابتدائی  $ما = ج لا + \frac{1}{ج}$  ہے۔ نیز تصدیق کرو کہ اس تفرقی مساوات کا ایک حل  $ما = ۴ لا$  ہے جس کو کامل ابتدائی سے اخذ نہیں کیا جاسکتا (یعنی یہ حل نادر حل ہے)۔ ثابت کرو کہ یہ حل ان خطوط کے نظام کا لفافہ ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ترسیم سے اس کو واضح کرو۔

۹۔ ترکیبی تعبیر۔ فرض کرو کہ لا اور ما کا ایک تفاعل  $ف(لا، ما)$  ہے جس کی قیمت لا اور ما کی محدود قیمتوں کے ہر زوج کے لیے کاملاً معین اور محدود ہے۔ اب مساوات

$$\frac{ف(لا، ما)}{ف(لا، لا)} = ف(لا، لا)$$

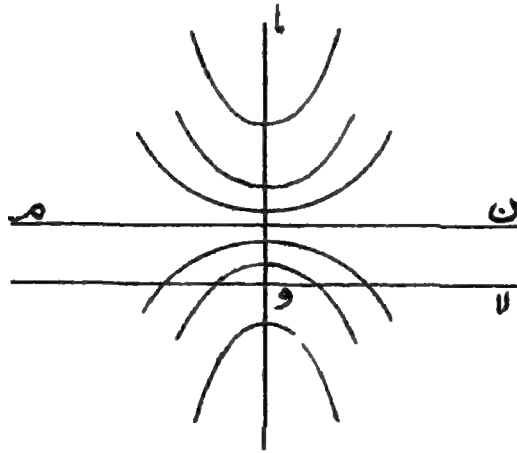
(۶) کے کامل ابتدائی سے منحنيوں کا ایک قبیل تعبیر ہوگا۔ ان منحنيوں کے قبیل کی عام شکل کو سرعت کے ساتھ مرتبہ کرنے کے طریقہ کی چند مثالیں ذیل میں دی جاتی ہیں۔  
اس قبیل کے منحنيوں کو مساوات کے ممیز (Characteristics) کہتے ہیں۔

$$\text{مثال (۱۱)} \quad \frac{ف(لا، ما)}{ف(لا، لا)} = لا(لا - ما)$$

$$\text{یہاں} \quad \frac{ف(لا، ما)}{ف(لا، لا)} = لا - ما + ۱ = (لا + ۱)(لا - ما)$$

۱۰۔ پس وہ تفاعل جو  $\frac{1}{لا}$  کے مانند ہوں خارج ہو جائیں کیونکہ  $لا = ۰$  اور  $ما = ۰$  کے لیے وہ غیر متعین ہوتے ہیں۔  
۱۱۔ یہ طریقہ ڈاکٹر ایس۔ براؤن کی (Brodetsky) اور پروفیسر ٹیکو واڈا (Takeo Wada) سے منسوب ہے۔

اب ہم جانتے ہیں کہ کسی منحنی کا تقعر اوپر وار ہوتا ہے جبکہ دوسرا تفرقی سر مثبت ہو۔ اس لئے مثال میں ممیز،  $ما = ا$  کے اوپر وار مقعر اور  $ما = ا$  کے نیچے نیچے وار مقعر ہونگے۔ اعظم یا اقل نقطے  $لا = ۰$  پر واقع ہیں کیونکہ وہاں  $فر ما = ۰$ ۔ وہ ممیز جو  $ما = ا$  کے قریب ہیں ان ممیزوں سے جو اس سے دور ہیں زیادہ چپٹے ہیں اور  $ما = ا$  خود ایک ممیز ہے۔ ان امور سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ منحنیوں کے قبیل کی عام شکل وہ ہے جس کو شکل (۱) میں دکھلایا گیا ہے:



شکل (۱)

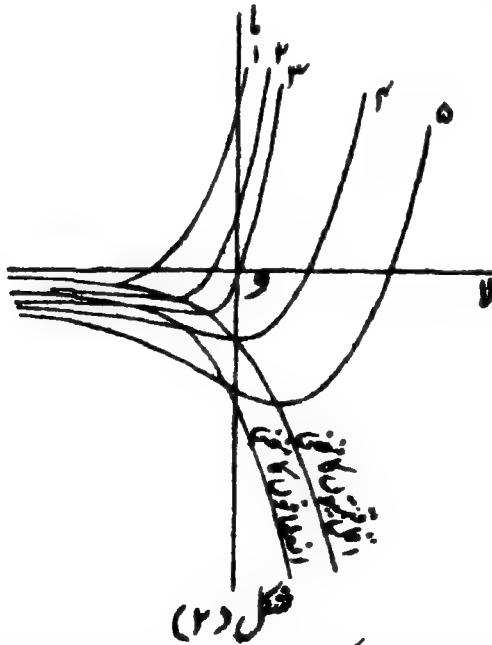
مثال (۲)  $فر ما = ما + و$

یہاں  $فر ما = فر ما + و = و + ما = و + و = ۲ و$

ہم اعظم اور اقل قیمتوں کے منحنی  $ما + و = ۰$  اور انعطافوں کے



منحنی  $۱ + ۲ = ۳$  کو مشتم کرنے سے ابتدا کرتے ہیں۔ اس کے اس مینر پر غور کرو جو مبداء میں سے گذرتا ہے۔ اس نقطہ پر دونوں تفرقی سرشتیں ہیں، اس لیے جب 'لا بڑھتا ہے تو ما بھی بڑھتا ہے اور منحنی اور پروار مقعر ہے۔ اس سے مینر کا دائیں جانب کا حصہ معلوم ہوتا ہے جس کو شکل (۲) میں ۳ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اگر ہم اس حصہ پر بائیں جانب چلیں تو اقل قیمتوں کے منحنی سے گذرینگے۔ نقطہ تقاطع پر ماس 'ولا کے متوازی ہے۔ اس کے بعد پھر ہم چڑھینگے اور انعطافوں کے منحنی پر پہنچینگے۔ اس منحنی کو عبور کرنے کے بعد مینر اوپر وار محدود ہو جاتا ہے اور چڑھنا جاری رکھتا ہے۔ اب شکل سے یہ ظاہر ہے کہ اگر وہ اقل قیمتوں کے منحنی کو کر قطع کرے تو ماس 'ولا کے متوازی نہیں ہو سکتا اور اس لیے مینر 'ولا قطع ہی نہیں کر سکتا بلکہ اس کا متقارب بن جاتا ہے۔



دوسرے مینروں کی نوعیت بھی اس کے مشابہ ہے۔

## حل طلب مثالیں

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} = م(۱-لا)$$

$$(۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} = لا^۲ م$$

$$(۳) \quad اور \quad م + لا^۲ = \frac{فرما}{فرلا}$$

کے میزمرہ قسم کرو۔

۱۰۔ نادر نقطے۔ ایسی تمام مثالوں میں جو گذشتہ دفعہ کی مثالوں

کی مانند ہوں مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہوا ایک اور

صرف ایک ممیز حاصل ہوتا ہے۔ دو منحنیوں  $\frac{فرما}{فرلا} = ۰$  اور

$\frac{فرما}{فرلا} = ۰$  کو مرسم کر کے ہم باسانی ایسے نظام کا نقشہ کھینچ سکتے ہیں۔

لیکن اگر ف (لا، م) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں کے لیے غیر متعین ہو جائے (ایسے نقطوں کو نادر نقطے کہا جاتا ہے) تو ان نقطوں (۸) کے قریب میں نظام کا نقشہ کھینچنا اکثر بہت مشکل ہوتا ہے۔ تاہم حسب ذیل مثالوں پر ہر کسی طریقہ سے بحث کجا سکتی ہے۔ عام صورت میں پیچیدہ تحلیل بحث کی ضرورت ہوتی ہے۔

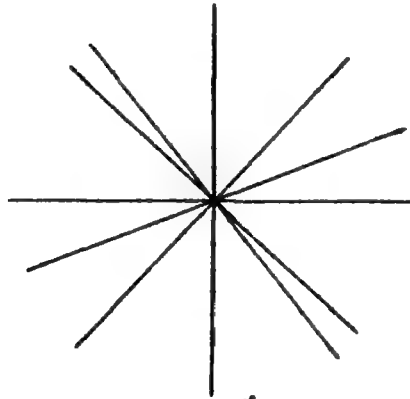
۱۱۔ ڈیکو پروفسر ٹکیو داڈا کا مضمون ”ترکیبی حل“ رسالہ

Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University

Vol. II No. 3, July 1917. — میں

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{ا}{لا} = \frac{فر ا}{فر لا}$$

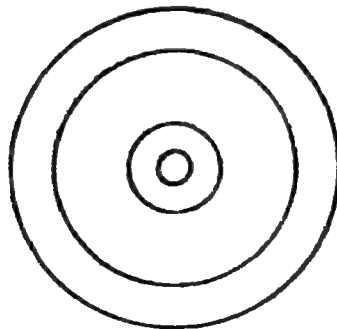
یہاں مبدا و ایک نادر نقطہ ہے۔ اس مساوات کا ہندی مفہوم یہ ہے کہ سمتی نیم قطر اور ماس وہی میلان رکھتے ہیں اور یہ صرف مبدا میں سے گزرنے والے خطوط مستقیم کی صورت میں درست ہے۔



شکل (۳)

اب چونکہ ان خطوط مستقیم کی تعداد لامتناہی ہے اس لیے اس صورت میں نادر نقطے میں سے تینوں کی لامتناہی تعداد گزرتی ہے۔

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{ا}{لا} = \frac{فر ا}{فر لا} = ۱ - \frac{ا}{لا} \times \frac{فر ا}{فر لا} = ۱ -$$



شکل (۴)

اس کا یہ مطلب ہے کہ سمتی نیم قطر اور حماس کے میلان ایسے ہیں کہ ان کا حاصل ضرب - ۱ ہے یعنی سمتی نیم قطر اور حماس ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اس لیے ممیز کسی نصف قطر کے دائرے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ (۹)  
اس صورت میں ناد نقطہ کو صفر نصف قطر کا ایک دائرہ سمجھا جاسکتا ہے جو اس کے قریب کے ممیزوں کی انتہائی شکل ہے لیکن محدود ابعاد کا کوئی ممیز اس میں سے نہیں گذرتا۔

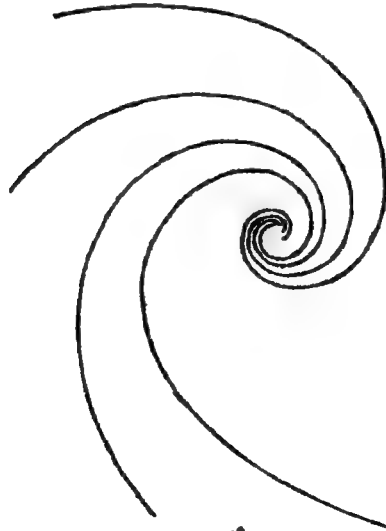
$$\text{مثال (۳)} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما۔ک لا}}{\text{لا+ک ما}}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{مس سا} \quad \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{مس طہ} \quad \text{لکھنے سے حاصل ہوتا ہے}$$

$$\text{مس سا} = \frac{\text{مس طہ۔ک}}{\text{لا+ک مس طہ}}$$

$$\text{مس سا+ک مس سا مس طہ} = \text{مس طہ۔ک}$$

یعنی



شکل (۵)

یعنی  $\frac{\text{مس طہ} - \text{مس سا}}{\text{ا + مس طہ مس سا}} = \text{ک}$   
 یعنی  $\text{مس (طہ - سا)} = \text{ک} ، \text{مستقل}$

اس لیے ممیز مساوی الزاویہ مرغولے (Spirals) ہیں جنکا نادر نقطہ (میداء) ماسک ہے -

ان تین مثالوں میں تین نمونوں کی صورتیں پیش کی گئی ہیں - بعض اوقات ممیزوں کی ایک محدود تعداد ایک نادر نقطے میں سے گزرتی ہے لیکن اس کی مثال اس قدر عجیب ہوگی کہ اس کا اندراج یہاں مناسب نہیں ہے -

## پہلے باب پر مختلف مثالیں

(۱۰)

ذیل کی مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

۱ -  $\text{ا} = \text{ا} + \text{و} + \text{ب} + \text{و} + \text{ج}$

۲ -  $\text{ا} = \text{ا} + \text{و} + \text{ب} + \text{و} + \text{ج} + \text{و}^۳$

[ان چار مساواتوں سے جو متواتر تفرق سے حاصل ہوتی ہیں 'ا' 'ب' 'ج' کو ساقط کرنے کے لیے مقطعہ استعمال کیا جاسکتا ہے]

۳ -  $\text{ا} = \text{و} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{لا}$

۴ -  $\text{ا} = \text{ج} + \text{ج} + \text{لا} ، (\text{زنجیرہ})$

ذیل کی مثالوں میں تفرقی مساواتیں معلوم کرو:

۱ - دیکھو واڈا کا محولہ بالا مضمون -

- ۵۔ وہ تمام مکافہ جن کے محور، محور ما کے متوازی ہیں۔  
 ۶۔ نصف قطر کے تمام دائرے۔  
 ۷۔ وہ تمام دائرے جو مبدا میں سے گزرتے ہیں۔  
 ۸۔ وہ تمام دائرے جن کے نصف قطر یا محل مستوی لا و ما میں خواہ کچھ ہی ہوں۔

[مثال ۶ کا نتیجہ استعمال کیا جاسکتا ہے]

۹۔ ثابت کرو کہ لا کو

$$۲ = لا - \frac{فر ما}{فر لا} + لا \dots\dots\dots (۱)$$

سے اور ب کو

$$۲ = لا - \frac{فر ما}{فر لا} - ب لا \dots\dots\dots (۲)$$

سے ساٹھ کیا جائے تو ہر صورت میں ذیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$لا^۲ - \frac{فر ما^۲}{فر لا} - لا ۲ + \frac{فر ما}{فر لا} = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

[مساوات (۱) کے کامل ابتدائی سے مساوات (۳) پوری ہونی چاہیے کیونکہ (۱)، (۲) سے ناپذیر ہے۔ اس ابتدائی میں لا اور نیز ایک اختیاری مستقل شامل ہوگا۔ پس وہ (۳) کا حل ہے کیونکہ اس میں دو مستقل ہیں اور یہ دونوں مستقل جہاں تک کہ (۳) کا تعلق ہے اختیاری ہیں کیونکہ لا اس مساوات میں شامل نہیں ہے۔ حقیقت میں اس کو (۳) کا کامل ابتدائی ہونا چاہیے۔ اسی طرح (۲) اور (۳) کے کامل ابتدائی وہی ہیں۔ پس (۱) اور (۲) ایک مشترک کامل ابتدائی رکھتے ہیں۔]

۱۰۔ گذشتہ مثال کا طریقہ استعمال کر کے ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{فرما}{فرلا} = ۲ \text{ ب قولا}$$

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = ۲ \text{ ب قولا}$$

اور

کے کامل ابتدائی مہی ہیں۔  
 ۱۱۔ مان لو کہ مثال ۹ کی پہلی دو مساواتوں کے کامل ابتدائی  
 ایک ہی ہیں۔ اس کو معلوم کرنے کے لیے  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی دو قیمتوں کو (لا اور ما  
 کی رقوم میں) مساوی رکھو۔ نیز تصدیق کرو کہ یہ کامل ابتدائی مثال ۹ کی  
 مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے۔  
 ۱۲۔ اسی طرح مثال ۱۰ کی دو مساواتوں کا مشترک کامل ابتدائی  
 معلوم کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جو تفرقی مساوات

(۱۱)

$$\frac{فرما}{فرلا} = ۱ + لا \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ + لا^۲ \frac{فرما}{فرلا}$$

کو پورا کرتے ہیں محور ما کو زاویہ ۴۵° پر قطع کرتے ہیں۔  
 ۱۴۔ نقطہ (۲، ۱) پر ان دو منحنیوں کا میلان محور لا کے ساتھ  
 معلوم کرو جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور مساوات

$$\left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^۲ = لا^۲ - لا + ما$$

کو پورا کرتے ہیں۔  
 ۱۵۔ ثابت کرو کہ مثال ۱۴ کے منحنیوں میں سے کسی ایک کا  
 نصف قطر انحناء نقطہ (۲، ۱) پر ۴ ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ بالعموم دو منحنی جو تفرقی مساوات

$$\text{لا} \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 - \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱ = ۰$$

کو پورا کرتے ہیں کسی نقطہ میں سے گزرتے ہیں لیکن وہ ایک ایسے مکانی پر کے کسی نقطہ کے لیے ایک دوسرے پر نہ مطبق ہوتے ہیں جو نظام کے متغیروں کا لغات ہے۔

۱۷۔ ایک ایسے نقطہ کا طریقہ معلوم کرو کہ اس میں سے گزرنیوالے دو منحنی جو مثال (۱۶) کی تفرقی مساوات کو پورا کریں (۱) علی القوا کم اور (۲) بہ ستقاطع ہوں۔

$$۱۸ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} + \text{فو}$$

کے میز (براڈسکی اور واڈا کے طریقہ سے) مرتب کرو۔  
۱۹۔ حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے حل لا کی صعودی صحیح قوتوں کے سلسلوں میں (حسب دفعہ ۷) معلوم کرو (ان مثالوں میں ما اور

ما، علی الترتیب  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  اور  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  کو تعبیر کرتے ہیں) :-

$$(۱) \text{ما} - \text{لا} - \text{ما} = ۰, (۲) \text{لا} + \text{ما} + \text{لا} + \text{ما} = ۰,$$

$$(۳) \text{لا} + \text{ما} - \text{لا} + \text{ما} = ۰, (۴) (۱ - \text{لا}) + \text{ما} + ۲ = ۰,$$

$$(۵) (۱ - \text{لا}) + \text{ما} + (۱ - \text{لا}) - \text{ما} = ۰.$$

[ جواب :

$$(۱) ۱ = ۱ + \left( \frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۳ \times ۲} + \frac{\text{لا}}{۴ \times ۳ \times ۲} + \dots \right)$$

$$\left( \dots + \frac{\text{لا}}{۵ \times ۴ \times ۳} + \frac{\text{لا}}{۳ \times ۲} + \left( \frac{\text{لا}}{۱} \right) \right) +$$

$$(۲) ۱ = \left( \dots + \frac{\text{لا}}{۳} - \frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۱} - \text{لا} \right) = ۱$$



اس میں چونکہ صرف ایک اختیاری مستقل ہے اس لیے وہ کامل ابتدائی نہیں ہے، اس کا ایک دوسرا حل ہے جو اس شکل کا نہیں ہے جس کو یہاں فرض کیا گیا ہے (دیکھو نواں باب)۔

$$(3) \quad 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$(4) \quad 1 = 1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

$$(5) \quad 1 = 1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots) \text{ (دیکھو دفعہ ۹)}$$



(۱۲)

## دوسرا باب

### پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی مساواتیں

۱۱۔ اس باب میں شکل

$$م + ن = \frac{فرلا}{فرما}$$

کی مساواتوں پر غور کیا جائیگا۔ اس میں م اور ن دونوں لا اور ما کے تفاعل ہیں۔

اس مساوات کو اکثر زیادہ متشاکل شکل میں لکھا جاتا ہے۔

$$م + ن = فرما = فرلا$$

اس شکل کی عام مساوات کو معلومہ تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی رقوم میں حل کرنا ممکن نہیں ہے لیکن ہم چند خاص نمونوں پر غور کریں گے جن کو حل کیا جاسکتا ہے۔

۱۔ تفرقوں فرلا اور فرما کے استعمال کے باقاعدہ جواز کے لیے دیکھو ہارڈی کی کتاب "Pure Mathematics" دفعہ ۱۳۶ [دفعات ۵۲ تا ۵۵، دوسرے تا چھٹے ادیشن میں، ۵۹ تا ۶۰ ساتویں ادیشن میں]۔

ان نمونوں کی تقسیم بالعموم حسب ذیل کیجاتی ہے :

(۱) ٹھیک مساواتیں  
(ب) وہ مساواتیں جو متغیروں کو جدا کرنے سے حل کیجا سکتی ہیں  
(ج) متجانس مساواتیں  
(د) پہلے رتبہ کی خطی مساواتیں -

اس باب میں خاص کر وہ طریقے استعمال کئے گئے ہیں جن کو جان برنولی (باشندہ سال ۱۶۶۷ء تا ۱۷۴۸ء) اور اس کے شاگرد یولر (باشندہ سال ۱۷۵۱ء تا ۱۸۲۷ء) نے اختیار کئے تھے۔ جان برنولی اپنے زمانہ کا بڑا عالم و فاضل شخص تھا اور اس کے شاگرد یولر نے جبر و مقابلہ، علم مثلث، احصاء، استوار حرکیات، باحرکیات، علم ہیئت اور دیگر مضامین میں بڑے زبردست مقالے لکھے ہیں۔

۱۲۔ ٹھیک مساواتیں

مثال (۱) جملہ  $ma + n$  لافرما ایک ٹھیک تفرقہ ہے۔  
اس لیے مساوات  $ma + n = 0$  کو جس سے  $n$  (مالا) = یعنی مالا = ج حاصل ہوتا ہے ٹھیک مساوات کہا جاتا ہے۔

مثال (۲) مساوات  $ma + n$  مس لافرما = ۰ پر نور کرو۔

یہ اپنی اس شکل میں ٹھیک مساوات نہیں ہے لیکن اگر اسکو  $ma + n = 0$  جم لاجم ماسے ضرب دیا جائے تو وہ

جب  $ma + n$  لافرما = ۰ جب لاجم ماسے ضرب دیا جائے تو وہ

۱۳۔ وہ ضروری اور کافی شرط کہ  $ma + n$  لافرما = ۰ ایک ٹھیک مساوات ہو ضمیمہ ۱ میں بیان کی گئی ہے۔

ہو جاتی ہے جو ٹھیک مساوات ہے۔

اس کا حاصل جب ما جب لا = ج ہے۔

۱۳۔ متکمل جزو ضرفی۔ گذشتہ دفعہ کی آخری مثال میں

جم لا جم ما کو متکمل جزو ضرفی کہتے ہیں کیونکہ جب دی ہوئی مساوات کو اس سے ضرب دیا جاتا ہے تو ایک ٹھیک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو فوراً حل کیا جاسکتا ہے۔

مساواتوں کی مخصوص جماعتوں میں متکمل اجزائے ضرفی کو متعین کرنے کے لیے بالعموم مختلف قاعدے دئے جاتے ہیں۔ یہ قاعدے اس باب کے فتم پر تفرقی مثالوں میں ملیں گے۔ ان قاعدوں کو ثابت کرنا دلچسپ ضرور ہے لیکن ان کے بغیر ہی مثالوں کو زیادہ آسانی کے ساتھ بالعموم حل کیا جاسکتا ہے۔

۱۴۔ متغیر جدائی پذیر۔

مثال (۱) مساوات  $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$  میں ما فرما میں دائیں جانب

صرف لا اور بائیں جانب صرف ما شامل ہے، اس لیے متغیر جدا ہیں۔

لوک لا = لوک جم ما + ج

لوک (لا جم ما) = ج

یعنی

لا جم ما = نوٹ = ۱، فرض کرو

مثال (۲)  $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$  فرما

اس شکل میں متغیر جدا نہیں ہیں لیکن ان کو آسانی سے جدا

کیا جاسکتا ہے۔ فرلا سے ضرب دو اور ما سے تقسیم کرو تو

$$\frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = ۲ \text{ لا فرلا}$$

مکمل کرنے پر  
چونکہ ج اختیاری ہے اس لیے اس کو لوک ا کے مساوی رکھا  
جاسکتا ہے جہاں ا دوسرا اختیاری مستقل ہے چنانچہ بالآخر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا} \text{ لا}^۲$$

مثالیں

۱۔  $(۱۲ + ۱۵ - ۹) \text{ فرلا} + (۵ + ۲ - ۴) \text{ فرما} = ۰$

۲۔  $\{ \text{جم لاس ما} + \text{جم} (۱۵ + ۲) \} \text{ فرلا} + \{ \text{جب لاقط ما} \}$

$+ \text{جم} (۱۵ + ۲) \} \text{ فرما} = ۰$

۳۔  $(\text{قط لاس لاس ما} - \text{لا}^۲) \text{ فرلا} + \text{قط لاقط ما فرما} = ۰$

۴۔  $(۱۵ + ۲) (\text{فرلا} - \text{فرما}) = \text{فرلا} + \text{فرما}$

۵۔  $\text{ما فرلا} - \text{لا فرما} + ۳ \text{ لا}^۲ \text{ ما} - \text{لا}^۲ \text{ فرلا} = ۰$

۶۔  $\text{ما فرلا} - \text{لا فرما} = ۰$

۷۔  $(\text{جب لا} + \text{جم لا}) \text{ فرما} + (\text{جم لا} - \text{جب لا}) \text{ فرلا} = ۰$

۸۔  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^۲ \text{ ما}}{\text{لا}^۲}$

۹۔  $\text{ما فرلا} - \text{لا فرما} = \text{لا ما فرلا}$

۱۰۔  $\text{لاس لا فرما} = \text{مم ما فرلا}$

## ۱۵۔ متجانس مساواتیں۔ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانس

(۱۳)

مساوات وہ ہے جس کو شکل

$$\frac{f}{\lambda} = f \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)$$

میں لکھا جاسکے۔

اب اس کا امتحان کرنے کے لیے کہ آیا لا اور ما کا ایک تفاعل  
بائیں جانب کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\mu}{\lambda} = \mu \text{ یا } \lambda = \mu$$

رکھنے سے سہولت پیدا ہوگی۔ شکل (د) ہو جائے یعنی اگر تمام  
اگر ایس ابدال سے نتیجہ کی شکل (د) ہو جائے یعنی اگر تمام  
لا خارج ہو جائیں تو مساوات متجانس ہوگی۔

مثال (۱) مساوات  $\frac{f}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda}$  اوپر کے ابدال سے

$$\frac{f}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} \text{ ہو جاتی ہے۔ یہ مساوات متجانس ہے۔}$$

مثال (۲)  $\frac{f}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda}$  اوپر کے ابدال سے  $\frac{f}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda}$  لاؤ ہو جاتی

ہے۔ یہ متجانس نہیں ہے۔

## ۱۶۔ حل کا طریقہ۔ چونکہ کسی متجانس مساوات کو اس کی بائیں

جانب  $\mu = \lambda$  رکھ کر  $\frac{f}{\lambda} = f$  (د) میں تحویل کیا جاسکتا ہے

اس لیے اس ابدال کا اثر دائیں جانب کے جملہ پر معلوم کرنا فطری بات

ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ اس ابدال سے مساوات کو ہمیشہ حل کیا جاسکے گا  
[دیکھو اس باب کے ختم پر متفرق مثالوں میں مثال ۱۰۔]

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{\text{فرما} + \text{لا}^2}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

رکھو      ما = ولا

یعنی  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ولا} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$  (کیونکہ اگر ما، لا کا تفاعل ہے تو  
و بھی لا کا تفاعل ہے) اس ابدال سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ولا} + ۱}{۲}$$

یعنی  $۲ \text{ لا فرو} = (۱ + \text{ولا} - ۲ \text{ ولا}) \text{ فرلا}$

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{۲ \text{ فرو}}{(۱ - \text{ولا})}$$

تمکمل کرنے پر  $\frac{۲ - \text{ولا}}{۱ - \text{ولا}} = \text{لوک لا ج}$

$$\text{لیکن } \frac{\text{لا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{۱ - \text{ولا}} = \frac{۲ - \text{ولا}}{۱ - \text{ولا}} = \frac{۲ - \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$$

پس لا - ما سے ضرب دینے پر  
 $۲ \text{ لا} = (۱ - \text{لا})(\text{لوک لا ج})$

مثال (۲)۔  $(\text{لا} + \text{ما}) \text{ فرما} + (\text{لا} - \text{ما}) \text{ فرلا} =$

(۱۵)

۱۔ "حل" سے ہماری مراد معمولی حل تکمیل میں تحویل کرنا ہے۔ بلاشبہ یہ ممکن ہے کہ  
ایسے مکمل کو ہم معمولی ابتدائی تفاعلوں کی رقوم میں بیان نہ کر سکیں۔

اس سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما-لا}{لا+ما}$   
 رکھو  $ما = ولا$  اور حسب سابق عمل کرو تو

$$ولا + لا = \frac{فرو}{فرلا} = \frac{۱-و}{۱+و}$$

یعنی  $لا = \frac{فرو}{فرلا} = \frac{۱-و}{۱+و} - \frac{۱+و}{۱+و}$

متغیروں کو جدا کرنے سے  $-\frac{فرلا}{لا} = \frac{و(۱+و)}{۱+و}$

یعنی  $-\frac{فرلا}{لا} = \frac{و}{۱+و} - \frac{و}{۱+و}$

تکمیل کرنے پر  $-\frac{۱}{۴} لوک (و+۱) - مس-او = لوک لا+ج$

یعنی  $۲ لوک لا+ لوک (و+۱) + ۲ مس-او + ج = ۰$   
 لوک لا (و+۱) + ۲ مس-او + ج = ۰

سے بالآخر  $و = \frac{۱}{۴} رکھنے پر لوک (ما+لا) + ۲ مس-ا = ۱ + ۰$

۱۷۔ وہ مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہیں

مثال (۱) مساوات  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما-لا}{لا+ما}$

تجانس نہیں ہے۔ یہ مثال گذشتہ دفعہ کی مثال (۲) کے مشابہ ہے صرف اتنا فرق ہے کہ

$\frac{ما-لا}{لا+ما}$  کی بجائے  $\frac{۱+لا-ما}{۵+لا+ما}$  ہے۔



اب  $ما - لا = ۰$  اور  $ما + لا = ۰$  دو خطوط مستقیم کو جو مبدا میں سے گزرتے ہیں تعبیر کرتے ہیں۔

خطوط  $ما - لا = ۱$  اور  $ما + لا = ۵$  کا نقطہ تقاطع آسانی سے  $(۲ - ۳)$  معلوم ہو جاتا ہے۔

رکھو  $لا = ۴ - ۲$ ،  $ما = ۳ - ۲$  جس کا یہ مطلب ہے کہ نئے مبدا کو نقطہ  $(۲ - ۳)$  پر لیا گیا ہے اور نئے محور پرانے محوروں کے متوازی ہیں۔

تب  $ما - لا = ۱$  اور  $ما + لا = ۵$  نیز  $فر لا = فر لا$  اور  $فر ما = فر ما$

اس لیے مساوات ہو جاتی ہے  $\frac{فر ما}{ما + لا} = \frac{فر ما}{ما - لا}$  اور گزشتہ دفعہ کے مطابق اس کا حل ہے

لوک  $(ما + لا) + ۲$  مست  $\frac{ما}{۴} = ۱$ ۔

یعنی لوک  $[(ما + ۳) + (لا + ۲)] + ۲$  مست  $\frac{ما + ۳}{۲ + لا} = ۱$ ۔

مثال (۳)  $\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{ما - لا}{ما + لا}$

(۱۶)

اس مثال کو پچھلی مثال کی طرح حل نہیں کیا جاسکتا کیونکہ خطوط

$ما - لا = ۱$  اور  $ما - لا = ۵$  متوازی ہیں۔

چونکہ بائیں جانب کا جملہ  $ما - لا$  کا ایک تفاعل خیال کیا جاسکتا ہے اس لیے رکھو  $ما - لا = ی$

یعنی  $\frac{فر ما}{فر لا} = ۱ - \frac{فر ما}{فر لا}$

تو مساوات ہو جاتی ہے

$$1 + \frac{y}{5} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + 1$$

$$\frac{2}{5+y} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

یعنی

متغیروں کو جدا کرنے پر  $(5+y) \text{ فری} = 2 \text{ فرلا}$ تکمل کرنے پر  $\frac{1}{2} \text{ فری} + 5 = 2 \text{ فرلا}$ 

$$10 + 5y = 4 \text{ فرلا} + 2$$

یعنی

یہی بجائے درج کرنے پر  $(2 - 4) 10 + (4 - 2) 5 = 4 \text{ فرلا} + 2$   
 یعنی  $(2 - 4) 10 + (4 - 2) 5 = 4 \text{ فرلا} + 2$  (ج ۲ = ۱۰ رکھنے سے)

### مثالیں

[Wales]

$$(1) \quad (2 - 4) \text{ فرما} = (4 - 2) \text{ فرلا}$$

[Sheffield]

$$(2) \quad (2 - 4) \text{ فرما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ فرلا}$$

[Math Tripos]

$$(3) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$(5) \quad \frac{20 - 69 + 12}{10 - 62 + 12} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$(6) \quad (2 - 4) 10 + (4 - 2) 5 = 4 \text{ فرلا} + 2$$

$$(7) \quad \frac{2 - 62 - 13}{3 - 62 - 13} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$(8) \quad (2 + 4) (2 - 4) = (4 - 2) \text{ فرما} + \text{فرلا}$$

## ۱۸۔ خطی مساواتیں

$$\text{مساوات} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف} = \text{ما} = \text{ق}$$

کو جس میں ق اور ق ضربت کو لا کے تفاعل ہیں لیکن ما کے تفاعل نہیں ہیں پہلے رتبہ کی خطی مساوات کہتے ہیں۔

اس کی ایک سادہ مثال  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{لا}} \times \text{ما} = \text{لا}$  ہے۔  
اگر ہم اس کی ہر جانب کو لا سے ضرب دیں تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لا} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{لا}^2$$

$$\text{فرما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} (\text{لا}^2 - \text{ما})$$

$$\text{اس لیے تکمیل کرنے پر} \quad \text{لا} = \frac{1}{\text{فرما}} (\text{لا}^2 + \text{ج})$$

ہم نے اس مثال کو متکمل جزو ضربی لا کے استعمال سے حل کیا ہے جو دیکھنے سے ہی معلوم ہو جاتا ہے۔

۱۹۔ فرض کرو کہ ہم عام صورت میں متکمل جزو ضربی کو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اگر ایسا جزو ضربی سا ہے تو مساوات

$$\text{سا} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{س} \text{ف} = \text{ما} = \text{س} \text{ق}$$

کی دائیں جانب کا جملہ کسی حاصل ضرب کا تفرقی سر ہے اور پہلی رقم  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ حاصل ضرب سا ہونا چاہئے۔

$$\text{اس لیے رکھو} \quad \text{سا} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{س} \text{ف} = \text{ما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (\text{سا} + \text{س} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \text{ما} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}})$$

اس سے حاصل ہوتا ہے  $س ف م = م \frac{فرما}{فرلا}$

یعنی  $ف فرلا = \frac{فرما}{فرلا}$

یعنی  $ل ف فرلا = ل کوک م$   
 $س = م ف فرلا$

پس حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے :

$\frac{فرما}{فرلا} + ف م = ق$  کو حل کرنے کے لیے اس کی ہر  
 جانب کے جملہ کو  $م ف فرلا$  سے جو اس کا ایک متکمل جزو  
 ضربی ہے ضرب دو۔  
 ۲۰۔ مثالیں۔

(۱) دفعہ ۱۸ میں بیان کردہ سادہ مثال

$$\frac{فرما}{فرلا} + م \times \frac{۱}{لا} = لا^۲$$

پر غور کرو۔

یہاں  $ف = \frac{۱}{لا}$ ، اس لیے  $م ف فرلا = ل کوک لا$  اور  $ق = لا$   
 اس طرح قاعدہ سے وہی متکمل جزو ضربی حاصل ہوتا ہے جس کو ہم نے  
 استعمال کیا تھا۔

$$(۲) \frac{فرما}{فرلا} + م لا م = م ق - لا^۲$$

یہاں  $f = 2$  لا،  $f$  فر لا = لا<sup>۲</sup> اور تکمل جزو ضربی  $f$  ہے۔

(۱۸) اس سے ضرب دینے پر  $2 = \frac{f}{f} + \frac{f}{f} + \frac{f}{f}$

یعنی  $2 = \frac{f}{f} (f + f + f)$

تکمل کرنے پر  $f + f + f = 2$

$f = \frac{2}{3}$

(۳)  $f = 3$  فر لا = لا<sup>۳</sup>

یہاں تکمل جزو ضربی  $f$  ہے۔

اس سے ضرب دینے پر  $3 = \frac{f}{f} + \frac{f}{f} + \frac{f}{f} + \frac{f}{f}$

یعنی  $3 = \frac{f}{f} (f + f + f + f)$

تکمل کرنے پر  $f + f + f + f = 3$

$f = \frac{3}{4}$

۲۱۔ وہ مساواتیں جو خطی مساواتوں میں تحویل

پذیر ہیں۔

مثال (۱) لا ما -  $\frac{\text{فرما}}{\text{قولا}} = \text{ما}^۳ - \text{قولا}^۲$

ما سے تقسیم کرو تاکہ بائیں جانب کا جملہ ما سے آزاد ہو چنانچہ

$$\text{قولا}^۲ = \frac{\text{فرما}}{\text{قولا}} - \frac{۱}{\text{ما}} \times \text{لا}$$

یعنی  $\text{قولا}^۲ = \frac{۱}{\text{ما}} \times \text{لا} + \frac{۱}{\text{ما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{قولا}}$

رکھو  $\frac{۱}{\text{ما}} = \text{ی تو}$   $۲ \text{ لا ی} + \frac{\text{فرما}}{\text{قولا}} = ۲ \text{ قولا}$

یہ مساوات خطی ہے اور فی الحقیقت مثال (۲) کے مشابہ ہے  
کیونکہ اس میں صرف ما کی بجائے ی ہے۔

پس حل ہے  $\text{ی} = (۲ \text{ لا} + \text{ج}) \text{قولا}$

$$\frac{۱}{\text{ما}} = (۲ \text{ لا} + \text{ج}) \text{قولا}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{قولا}} +$$

$$\pm = ۱ \sqrt{۲ \text{ لا} + \text{ج}}$$

یہ مثال برنولی کی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{قولا}} + \text{ف ما} = \text{ق ا}^۳$$

کی جس میں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں ایک مخصوص صورت ہے۔  
جیکب برنولی یا برنولی (باشندہ بال) نے اس مساوات کی ۱۶۹۵ء  
میں تحقیق کی تھی۔

(۱۹)

مثال (۲)  $(۱۰ - ۷۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۰ = ۰$

یہ موجودہ شکل میں خلی نہیں ہے لیکن اگر  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$  سے ضرب دیں تو

$$۰ = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} (۱۰ - ۷۲) + ۱۰$$

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} (۱۰ - ۷۲) + ۱۰ = ۰$$

یعنی

یہ خلی ہے اگر ما کو غیر تابع متغیر سمجھا جائے۔  
 حسب سابق عمل کرنے پر متکمل جزو ضربی ما حاصل ہوگا اور  
 حل ہوگا

$$\begin{aligned} ۱۰ - ۷۲ &= \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + ۱۰ \\ ۱۰ - ۷۲ &= \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + ۱۰ \end{aligned}$$

یعنی

مثالیں -

[Wales] (۱)  $(۱ + ۷) = ۱۰ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

(۲)  $(\text{Sheffield}) \quad ۱ = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (۱۰ - ۷۲)$

(۳)  $۱۰ - ۷۲ = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۰$

(۴)  $۱۰ - ۷۲ = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۰$

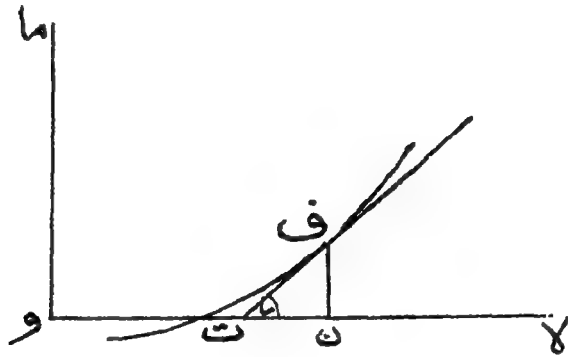
(۵)  $۱۰ - ۷۲ = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۰$

$$(۶) \quad (لا + ۲ ما) = \frac{فرما}{فرلا} ما$$

$$(۷) \quad فرلا + لا فرما = قوما قظا فرما$$

۲۲ - ہندسی مسئلے - قائمہ مرماۃ - اب ہم چند

ہندسی مسئلوں پر جن سے تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں غور کریں گے۔  
مثال (۱) وہ منحنی معلوم کرو جس کا زیر ماس مستقل ہے -



شکل (۶)

$$\text{زیر ماس ت ن} = \text{ف ن م م سا} = \frac{فرما}{فرلا}$$

(۱۰)

$$ما = \frac{فرلا}{ک}$$

پس

$$فرلا = \frac{ک}{ا}$$

$$لا + ج = ک لوک ما$$

ۛ



∴  $\alpha = \omega$  ، اختیاری مستقل ج کو ک لوک ۱ کے

مساوی رکھنے سے۔

مثال (۲)۔ ایسا منحنی معلوم کرو کہ کسی دو نقطوں ف ، ق کے درمیان اس کا طول ، ایک ثابت نقطہ و سے ف اور ق کے فاصلوں کے فرق کے متناسب ہو۔

اگر ف کو ثابت سمجھا جائے تو قس ق ف یہ دو مستقل

قطبی محدودوں کو استعمال کرو چنانچہ و کو قطب اور و ف کو ابتدائی خط لو۔ تب اگر ق کے محدود (ر ، ط) ہوں تو

$$س = ک - ر - ک ب$$

لیکن علم احصاء میں ثابت کیا گیا ہے کہ

$$(فرس) = (ر فرط) + (فر ر)$$

$$پس ک (فر ر) = (ر فرط) + (فر ر)$$

$$یعنی فرط = ± \sqrt{ک^2 - \frac{1}{فر^2}}$$

$$= \frac{1}{فر} ، فرض کرو$$

∴  $ر = ج \cos \alpha$  ، مساوی الزاویہ مرغولہ

مثال (۳)۔ نیم کروی مکافوں ۱ ، ۲ = لا کے قبیل کے قائم مرماۃ معلوم کرو جہاں ۱ متغیر مبدل ہے۔

منحنیوں کے دو قبیلوں کو قائم مرماۃ اس وقت کہا جاتا ہے جبکہ ایک قبیل کا ہر رکن دوسرے قبیل کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرے۔

اول ہم ۱ کو سا قط کر کے دے ہوئے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔ چنانچہ

$$1 \text{ ما} = 2 \text{ لا}$$

$$2 \text{ لا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ ما} \quad \text{کو تفرق کرنے پر}$$

ماصل ہوتا ہے، اس لیے تقسیم سے

$$\frac{2}{\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{3}{\text{لا}} \dots \dots (1)$$

اب  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{مس سا جہاں سا}$ ، محور لا کے ساتھ مماس کا

میلان ہے۔ مرماۃ کے لیے سا کی قیمت (فرض کرو سا) مساوات

$$\text{سا} = \text{سا} \pm \frac{1}{\pi}$$

سے حاصل ہوتی ہے یعنی مس سا = مم سا

یعنی دے ہوئے قبیل کے لیے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  کی بجائے مرماۃ کے لیے  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$  رکھنا چاہئے۔

(۱) میں یہ تبدیلی کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{3}{\text{لا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} - \frac{2}{\text{ما}}$$

$$2 \text{ لا فرلا} + 3 \text{ ما فرما} = 0$$

$$2 \text{ لا}^2 + 3 \text{ ما}^2 = 0$$

جو متشابہ اور متشابہا واقع ہونے والے ناقصوں کا ایک نظام ہے۔  
مثال ۴۔ منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو مرغولوں کے قبیل

ر = ۱ طہ کو ایک مستقل زاویہ عہ پر قلع کرے۔  
 حسب سابق ہم ۱ کو سا قف کرنے سے ابتدا کرتے ہیں۔ چنانچہ  
 اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$ر = \frac{فرط}{فر} طہ$$

اب  $\frac{ر فرط}{فر} = مس فہ$  جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو حماس اور سمتی  
 نیم قطر کے درمیان ہے۔ اگر دوسرے قبیل کے لیے یہی زاویہ فہ ہو تو  
 فہ = فہ ± عہ

$$مس فہ = \frac{مس فہ \pm مس عہ}{1 \mp مس فہ \pm مس عہ} = \frac{طہ + ک}{1 - ک طہ}$$

جبکہ مس فہ کی بجائے حاصل شدہ قیمت رکھی جائے اور  $\pm مس عہ$   
 کی بجائے ک لکھا جائے۔

اس طرح دوسرے قبیل کے لیے

$$\frac{ر فرط}{فر} = \frac{طہ + ک}{1 - ک طہ}$$

اس کا حل طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے۔

$$ر = ج (طہ + ک) + ا - ک طہ$$

نتیجہ

حاصل ہوگا۔

## حل طلب مثالیں۔

(۱) وہ منحنی معلوم کرو جس کا زیر عماد مستقل ہے۔

(۲) ایک منحنی کے کسی نقطہ ف پر کا حماس محور لاسے ت پر

ماتا ہے۔ وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے  $وف = فت$  جہاں  
و مبدا ہے۔

(۳) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے کسی نقطہ پر مماس اور سمتی نیم قطر کا  
درمیانی زاویہ سمتی زاویہ کا دو چند ہے۔

(۴) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے معین کا ظل عادی مستقل ہے۔  
منحنیوں کے سب ذیل قبیلوں کے قائم مرماۃ معلوم کرو:

$$(۵) \quad لا - ما = ا^۲ \quad (۶) \quad لا + ما = ا^۲ \quad (۷) \quad لا = ا^۲$$

$$(۸) \quad ف لا + ق ما = ا^۲ \quad (ف اور ق مستقل)$$

$$(۹) \quad \frac{ط ا}{ط + ا} = ۱ \quad (۱۰) \quad ر ط = ا$$

(۱۰) منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو ہم مرکز دائروں کے ایک نظام  
کو مستقل زاویہ عہ پر قطع کرتے ہیں۔

## دوسرے باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) \quad (۳ - ما - لا) \frac{فرما}{فرلا} = ما$$

$$(۲) \quad لا \frac{فرما}{فرلا} = \sqrt{۲ + ما - ما^۲ - لا^۲}$$

$$(۳) \quad مس لا جم ما فرما + جب ما فرلا + فوج لا فرلا = .$$

$$(۴) \quad لا \frac{فرما}{فرلا} + ما^۳ = لا ما^۲ \quad [Sheffield]$$

$$(۵) \quad لا \frac{فرما}{فرلا} = \sqrt{ما^۳ + ما^۲ - لا^۲}$$

$$(۶) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ولا} + \text{ما} + \text{گ}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ن}}$$

محرومیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مساوات  $\text{ما فرلا} - ۲ \text{ لا فرما} = ۰$  مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے محور اور رأس پر کے ماس مشترک ہیں۔

(۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$(۲ \text{ لا} + ۳ \text{ ما} + ۱) \text{ فرلا} + (۳ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} + ۱) \text{ فرما} = ۰$$

زائدوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے متقارب خطوط  $\text{لا} + \text{ما} = ۰$  اور  $۲ \text{ لا} + ۳ \text{ ما} + ۱ = ۰$

ہیں۔

$$(۹) \text{ اگر } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲ \text{ ماس لا} = \text{جب لا}$$

اور  $\text{ما} = ۰$  جبکہ  $\text{لا} = \frac{۱}{۳}$  تو ثابت کرو کہ ماس کی اعظم قیمت  $\frac{۱}{۳}$  ہے۔

[Math Tripos]

(۱۰) ثابت کرو کہ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی عام متجانس مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ن} \left( \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \right)$$

$$\text{کامل} \quad \text{لوک لا} = \text{ن} \left( \frac{\text{فرو}}{\text{و}} \right) + \text{ج}$$

ہے جہاں  $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{و}$

(۱۱) ثابت کرو کہ  $\text{ن} \text{ ما فرلا} + \text{ق لا فرما} + \text{ک لا} = ۰$  (یا  $\text{فرلا} + \text{س لا فرما} = ۰$ )

کا ایک متکمل جزو ضربی لا ما ہے اگر

$$\frac{۱ + \text{ن}}{\text{س}} = \frac{۱ + \text{م} + \text{و}}{\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \frac{۱ + \text{ک}}{\text{ق}} = \frac{۱ + \text{و}}{\text{ن}}$$

اس طریقہ کو مساوات

$$۳ \text{ ما فرلا} - ۲ \text{ لا فرما} + \text{لا}^۱ \text{ ما}^۱ (۱۰) \text{ ما فرلا} - ۲ \text{ لا فرما} = ۰$$

کے حل کرنے میں استعمال کرو۔

$$(۱۲) \text{ مساوات } \frac{\text{ن} (لا \text{ ما}) + \text{قا} (لا \text{ ما}) \text{ فر} (لا \text{ ما})}{\text{لا} \text{ ما} - \text{قا} (لا \text{ ما})} + \frac{\text{لوک} \text{ لا}}{\text{ما}} = ج$$

کو تفرق کر کے تصدیق کرو کہ

$$\text{ن} (لا \text{ ما}) \text{ ما فرلا} + \text{قا} (لا \text{ ما}) \text{ لا فرما} = ۰$$

کا ایک متکمل جزو ضربی

(۲۳)

$$\frac{۱}{\text{لا} \text{ ما} \{ \text{ن} (لا \text{ ما}) - \text{قا} (لا \text{ ما}) \}}$$

ہے۔

اس سے مساوات  $(\text{لا}^۱ \text{ ما} + \text{لا} \text{ ما} + ۱) \text{ ما فرلا} - (\text{لا}^۱ \text{ ما} - \text{لا} \text{ ما} + ۱) \text{ لا فرما} = ۰$  کو حل کرو۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر مساوات  $\text{ما فرلا} + \text{ن} \text{ فرما} = ۰$  ٹھیک ہے تو

$$\frac{\text{جف} \text{ ن}}{\text{جف} \text{ لا}} = \frac{\text{جف} \text{ م}}{\text{جف} \text{ ما}}$$

[اس کے عکس کا ثبوت ضمیمہ (۱) میں دیکھو]

(۱۴) تصدیق کرو کہ ٹھیک مساوات کی شرط

$$(\text{ف} \text{ فرلا} + \text{ق} \text{ فرما}) \text{ کو} \text{ف} (لا \text{ فرلا}) = ۰$$

سے پوری ہوتی ہے اگر

$$\frac{\text{جف} \text{ ف}}{\text{جف} \text{ ما}} = \frac{\text{جف} \text{ ق}}{\text{جف} \text{ لا}} + \text{ق} \text{ ف} (لا)$$

اس سے ثابت کرو کہ  $\text{ف} \text{ فرلا} + \text{ق} \text{ فرما} = ۰$  کے لیے ہمیشہ ایک متکمل جزو ضربی معلوم کیا جاسکتا ہے اگر

$$\frac{1}{\left[ \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} \right]}$$

صرف لا کا تفاعل ہو۔

اس طریقہ سے (لا + لا م) فر لا + ۲ م فر ما = ۰

کو حاصل کرو۔

(۱۵) وہ منحنی معلوم کرو (۱) جس کا قطبی زیر ماس مستقل ہے

(۲) جس کا قطبی زیر عماد مستقل ہے۔

(۱۶) وہ منحنی معلوم کرو جو مبدا میں سے گذرتا ہے اور جس کے لیے

وہ رقبہ جو منحنی، معین، اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے معین کے مکعب کا ک گنا ہے۔

(۱۷) ایک منحنی کا عماد ف گ محور لا سے گ پر ملتا ہے۔

اگر مبدا سے گ کا فاصلہ ف کے فاصلہ کا دو چند ہو تو ثابت کرو کہ منحنی ایک قائم زائد ہے۔

(۱۸) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے لا کے محور کا وہ حصہ جو

مبدا اور کسی نقطہ پر کے ماس کے درمیان منقطع ہوتا ہے اس نقطہ کے معین کے متناسب ہے۔

(۱۹) منحنیوں کے حسب ذیل قبیلوں کے قائم مر ماة معلوم کرو:

$$(۱) (۱ - لا) + ۲ م + ۲ لا = ۰$$

$$(۲) ۱ = ۱ ط$$

$$(۳) ۱ = ۱ + جم ن ط$$

پہلے نتیجہ کی ہندسی تعبیر معلوم کرو۔

(۲۰) ہم ماسکی مخروطیوں

$$۱ = \frac{۲ م}{۲ + ب} + \frac{۲ لا}{۲ + لا}$$

کے نظام کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔ اس لیے ثابت کر دو کہ یہ نظام خود اپنا آپ قائم مرماۃ ہے۔

(۲۱) انجیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو مکافوں  $\text{ما} = \text{م} \text{ و لا کے قبیل کو } ۵۵ \text{ پر قطع کرے۔}$

(۲۲) اگر  $\text{ع} + \text{خ} = \text{ف} (\text{لا} + \text{خا})$  جہاں  $\text{ع} \text{ و } \text{لا} \text{ ماکام (۲۴)}$  حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ قبیل  $\text{ع} = \text{ستقل} \text{ و } = \text{مستقل} \text{ قائم مرماۃ ہیں۔}$

نیز ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جف} \text{ لا}}{\text{جف} \text{ ما}} + \frac{\text{جف} \text{ ع}}{\text{جف} \text{ لا}} = 0 = \frac{\text{جف} \text{ ع}}{\text{جف} \text{ ما}} + \frac{\text{جف} \text{ و}}{\text{جف} \text{ لا}}$

[یہ مسئلہ برق سکونیات میں قوت کے خطوط اور مستقل قوہ کے خطوط یا ماحرکیات میں بہاؤ کے خطوط حاصل کرنے میں بہت کار آمد ہے، ع اور و کو مزدوج تفاعل کہتے ہیں۔]

(۲۳) ریڈیم کے انحطاط کی شرح مابقی مقدار کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ کسی وقت  $t$  پر اس کی مقدار

$$1 = 10^k \cdot t$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲۴) اگر  $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ج} (1 - \frac{\text{و}}{\text{ع}})$  اور  $\text{و} = 0$  جبکہ  $t = 0$  تو ثابت کرو کہ

$$\text{و} = \text{ک مسر ج ت}$$

[اس سے ہوا میں گرتے ہوئے جسم کی رفتار حاصل ہوتی ہے جبکہ ہوا کی مزاحمت کو  $\text{و}$  کے متناسب لیا جائے۔ جیسے ت بڑھتا جاتا ہے و انتہائی قیمت ک کے قریب آتا جاتا ہے۔ اس کے مشابہ یک مساواتیں



گیس کی روانیت معلوم ہوتی ہے جبکہ اس کو وقت تک روانی اثر کے تحت رکھا گیا ہو۔

(۲۵) دو مائع ایک برتن میں جوش کھا رہے ہیں۔ یہ معلوم ہو کہ کسی لمحہ پر بھاپ کی شکل میں ان کی جو مقداریں اڑ جاتی ہیں ان کی نسبت ان مقداروں کی نسبت کے متناسب ہے جو ابھی مائع کی حالت میں باقی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مقداریں (فرض کرو لا اور ما) شکل ذیل کے ایک رشتہ میں مربوط ہیں :

$$m = j \cdot L$$

[ یارنگٹن کی "Higher Mathematics for Students of Chemistry" سے یہ مثال لی گئی ہے۔ ]



## تیسرا باب

### مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۲۳۔ اس باب میں ہم ایسی مساواتوں پر غور کریں گے جن کی شکل

$$b \frac{f}{f_0} + b \frac{f_1}{f_1 - f_0} + b \frac{f_2}{f_2 - f_0} + \dots$$

$$b \frac{f_n}{f_n - f_0} + b \frac{f_{n+1}}{f_{n+1} - f_0} = f (لا) \dots (۱۱)$$

ہوتی ہے جہاں  $f (لا)$  لاکا ایک تفاعل ہے اور تمام  $b$  مستقل ہیں۔ یہ مساواتیں تمام قسموں کے ارتعاش یعنی جیلی، برقی، یا صوتی ارتعاشوں کے مطالعہ میں بہت اہم ہیں۔ ان کی مثالیں ہم اس باب کے ختم پر مختلف سوالوں کی صورت میں دینگے۔ نیچے جو طریقے درج ہیں یوں اور ڈالبرٹ سے بالعموم منسوب کئے جاتے ہیں۔ نیز ہم اس شکل کی ہمزاد مساواتوں کے نظاموں پر اور ان

لے جین لی رائنڈ ڈالبرٹ (پیرس، ۱۸۸۳ء) سب سے زیادہ اُس اصول کی وجہ سے مشہور ہے جو علم حرکت میں ڈالبرٹ کا اصول کہلاتا ہے اس اصول سے سیمالوں کی حرکت پر استعمال کر کے وہ جزئی تفرقی مساواتوں پر پہنچا تھا۔

مساواتوں پر غور کرینگے جو اس شکل میں ایک سادہ استحالہ کے ذریعہ  
تحویل پذیر ہوں۔

۲۴۔ سادہ ترین صورت۔ پہلے رتبہ کی مساواتیں۔

اگر ہم  $n = 1$  اور  $f (لا) = 0$  لیں تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$b \frac{f_1}{f_2} + b_1 = 0 \quad (۲۱)$$

$$\text{یعنی } b \frac{f_1}{f_2} + b_1 = 0$$

$$\text{یا } b \text{ لوک } م + b_1 لا = \text{مستقل}$$

$$\text{اس لیے } \text{لوک } م = - \frac{b_1 لا}{b} + \text{مستقل}$$

$$= - \frac{b_1 لا}{b} + \text{لوک } 1 \text{ (فرض کرو)}$$

$$1 = \frac{b_1 لا}{b}$$

۲۵۔ دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔

اگر ہم  $n = 2$  اور  $f (لا) = 0$  لیں تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$b \frac{f_1^2}{f_2^2} + b_1 \frac{f_1}{f_2} + b_2 = 0 \quad (۲۳)$$

مساوات (۲) کے حل سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ حل  $1 = لا$  ہوگا

(۲۶) جہاں  $m$  کوئی خاص مستقل ہے شاید (۳) کو پورا کر سکے۔

چنانچہ مائی اس قیمت سے مساوات (۳)

$$1 = لا (b_1 م^2 + b_2 م + b_3) = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

اس طرح اگر م مساوات

$$ببم + ببم + ببم = ۰ \dots\dots\dots (۴)$$

کی ایک اصل ہو تو  $ما = ۱$  تو مساوات (۳) کا ایک حل ہے خواہ ا کی قیمت کچھ ہی ہو۔

فرض کرو کہ مساوات (۴) کی اصلیں عہ اور بہ ہیں۔ تب اگر عہ اور بہ غیر مساوی ہیں تو مساوات (۳) کے دو حل ہیں یعنی

$$ما = ۱ \text{ تو } اور ما = بب \text{ تو}$$

اب اگر ہم مساوات (۳) میں  $ما = ۱$  تو  $بب + بب$  درج کریں تو حاصل ہوگا

$$۱ \text{ تو } (ببب + ببب + ببب + ببب) + بب \text{ تو } (ببب + ببب + ببب + ببب) = ۰$$

جو سچا درست ہے کیونکہ عہ اور بہ مساوات (۴) کی اصلیں ہیں۔  
اس طرح دو حلوں کے حاصل جمع سے ایک تیسرا حل حاصل ہوتا ہے [یہ اس واقعہ سے فوراً ظاہر ہے کہ مساوات (۳) خطی ہے]۔  
چونکہ اس تیسرے حل میں دو اختیاری مستقل ہیں جن کی تعداد مساوی کے رتبہ کے مساوی ہے اس لیے ہم اس حل کو عام حل سمجھینگے۔  
مساوات (۴) کو ”امدادی مساوات“ کہتے ہیں۔

مثال۔

$$۲ \frac{فرما}{فرلا} + ۵ \frac{فرما}{فرلا} = ۰ \text{ کو حل کرنے کے لیے آزمائشی}$$

حل  $ما = ۱$  تو فرض کرو۔

چنانچہ اس سے حاصل ہوگا

$$1 \text{ کو } (2^2 + 5^2 + 2) = 0$$

یہ  $m = 2$  یا  $\frac{1}{2}$  سے پوری ہوتی ہے۔ اس لیے عام حل

$$m = 1 \text{ کو } 2^2 + 5^2 + 2 = 0$$

۲۶۔ ترمیم جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں خیالی  
یا ملتف ہوں۔

جب امدادی مساوات (۲۶) کی اصلیں شکل  $f + x$ ،  $g + y$ ،  
خ  $g$  کی ہوتی ہیں جہاں  $x = 0$ ۔ اتو حل

$$m = 1 \text{ کو } (f + x) + (g + y) = 0$$

میں ترمیم کرنا مناسب ہے تاکہ اُس میں خیالی مقادیر شامل نہ ہونے  
پائیں۔ اُس کے نیچے ہم مسئلوں

$$f + x = 0 \text{، } g + y = 0$$

$$f + x = 0 \text{، } g + y = 0$$

کا (جو کسی علم مثلث تحلیلی کی کتاب میں مل سکتے ہیں) استعمال کرتے ہیں  
چنانچہ مساوات (۵) ہو جاتی ہے

$$m = 1 \text{ کو } (f + x) + (g + y) = 0$$

$$= 0 \text{ کو } \{ (f + x) + (g + y) \} = 0$$

ع اور خ (۱-ب) کی بجائے ف رکھنے سے۔  
 ع اور ف بالکل ویسے ہی اختیاری مستقل ہیں جیسے ا اور ب ہیں۔ پہلی نظر میں شاید یہ معلوم ہو کہ ف کو خیالی ہونا چاہئے (۲۴) لیکن اس کا ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔ مثلاً اگر  $۱ = ۲ + ۱$  خ  
 ب  $۱ = ۲ - ۱$  خ تو ع  $۲ = ۲$  اور ف  $۲ = ۲$

مثال۔  $\frac{۲}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$  فرما  $۱۳ + ۰ = ۰$

امدادی مساوات م  $۲ - ۱ = ۱۳ + ۰$  ہے جس کی اصلیں  
 $۳ = ۲ \pm ۱$  خ ہیں  
 حل کو م  $۱ = ۱$  فو  $(۲+۳)$  خ لا + ب فو  $(۲-۳)$  خ لا لکھا جاسکتا ہے یا

م  $=$  ج فو  $(۲-۳)$  لا۔ ع

جہاں ج جم ع  $=$  ع اور ج جب ع  $=$  ف

اس لئے ج  $=$   $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$  اور مس ع  $=$   $\frac{۱}{۲}$

## ۲۷۔ مساوی اصلوں کی صورت۔

جب امدادی مساوات میں مساوی اصلیں ع  $=$  بہ ہوں تو حل

م  $=$  ا فو  $۱$  + ب فو  $۱$

م  $=$  (ا + ب) فو  $۱$

حل میں تخیل ہوتا ہے۔

اب دو اختیاری متقلوں کا مجموعہ ا + ب فی الحقیقت

صرف ایک اختیاری مستقل ہے۔ اس لیے اس حل کو عام ترین حل

نہیں کہا جاسکتا۔

ہم آئندہ [دفعہ ۳۴] ثابت کریں گے کہ عام حل

$$M = (A + B)C^L$$

ہے۔

۲۸۔ دو سے اعلیٰ ترتیبوں کی مساواتوں پر توسیع۔

دفعات ۲۵ اور ۲۶ کے طریقے مساوات (۱) پر اطلاق پذیر ہیں خواہ  $n$  کی قیمت کچھ ہی ہو بشرطیکہ  $f(L) = 0$ ۔

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{f^3 M}{f^3 L} - 6 \frac{f^2 M}{f^2 L} + 11 \frac{f M}{f L} - 6 M = 0$$

امدادی مساوات  $M^3 - 6M^2 + 11M - 6 = 0$  ہے جس کی سہلیں

$$M = 1, 2, 3 \text{ ہیں۔}$$

$$\text{اس لیے} \quad M = A^1 C^0 + B^2 C^0 + J^3 C^0$$

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{f^3 M}{f^3 L} - 8 M = 0$$

امدادی مساوات  $M^3 - 8M = 0$  ہے یعنی

$$0 = (M - 2)(M^2 + 2M)$$

$$M = 2 \text{ یا } -1 \pm \sqrt{3}$$

$$M = A^2 C^0 + C^0 (E \text{ جم } L + 3J \text{ جب } L)$$

$$\text{یا} \quad M = A^1 C^0 + J^3 C^0 \text{ جم } (L - 3J)$$

حل طلب مثالیں

حل کرو:

(۱)  $\frac{فرما}{فرلا} + ۴ = \frac{فرما}{فرلا} + ۳ = ۰$  (۲)  $\frac{فرما}{فرلا} + ۴ = ۴$

(۳)  $\frac{فرما}{فرلا} + ۴ = \frac{فرما}{فرلا} + ۱۲ = ۰$  (۴)  $\frac{فرما}{فرلا} - ۴ = ۴ + ۵ = ۰$

(۵)  $\frac{فرس}{فرت} + ۴ = \frac{فرس}{فرت} + ۱۳ = ۰$  (۶)  $\frac{فرس}{فرت} + ۴ = ۴$

(۷)  $\frac{فرما}{فرلا} + ۲ = \frac{فرما}{فرلا} - ۲ = ۰$

(۸) مثال (۷) کا حل کیا ہو جائیگا اگر ابتدائی شرطیں

$۱ = \frac{فرما}{فرلا} = ۰$  جبکہ لا

ہوں یا اگر ما محدود رہے جبکہ لا  $= +\infty$

حل کرو

(۹)  $\frac{فرما}{فرلا} + ۱۳ = \frac{فرما}{فرلا} + ۳۶ = ۰$  (۱۰)  $\frac{فرما}{فرلا} - ۱۳ = \frac{فرما}{فرلا} + ۳۶ = ۰$

(۱۱)  $\frac{فرما}{فرلا} + ۸ = ۰$  (۱۲)  $\frac{فرما}{فرلا} - ۶۴ = ۰$

(۱۳)  $ل = \frac{فرط}{فرت} + ج طہ = ۰$  اگر دیا گیا ہو کہ طہ = ع اور فرت = جبکت =

[یہ تقریبی مساوات طول ل کے ایک ایسے سادہ رقا ص کے چھوٹے بہتر اوزوں کے لیے ہے جس کی حرکت سکون کے محل سے جس کا میلان افق کے ساتھ ع تھا شروع ہوئی تھی]

(۱۴) وہ شرط معلوم کرو کہ

م  $\frac{فرس}{فرت} + ک = \frac{فرس}{فرت} + ج س = ۰$



کے مل میں مثلثی رقیں شامل ہوں۔

[یہ مساوات کمیت م کے ایک ذرہ کی حرکت کی ہے جبکہ ذرہ اپنے خط حرکت کے ایک ثابت نقطہ کی جانب ایک قوت سے جو اس نقطہ سے اس کے فاصلہ کا ج گنا ہے جذب ہوتا ہے اور رگڑ کی ایک مزاحمت سے جو اس کی رفتار کا ک گنا ہے قاصر پاتا ہے۔ مطلوبہ شرط سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اہتزازی ہونی چاہئے مثلاً سر کا دو شاخہ جو ہوا میں مرتعش ہو جہاں لچک کی قوت جو اس کو توازن کے محل کی طرف مسترد کرنے کا میلان رکھتی ہے ہٹاؤ کے متناسب ہے اور ہوا کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہے۔]

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر ک اس قدر چھوٹا ہو کہ  $\frac{1}{k}$  قابل نظر انداز ہے تو

مثال (۱۴) کی مساوات کا حل اس حل کا تقریباً  $\frac{1}{k}$  گنا ہے جو حاصل ہوتا اگر ک صفر ہوتا۔

[اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خفیف قصر سے تعدد میں غلطی کوئی تبدیلی نہیں ہوتی لیکن متواتر ارتعاشوں کا حیث ایک سلسلہ ہندسیہ میں گھٹتا ہے]

$$(۱۶) \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}$$

(۲۹)

دیا گیا ہو کہ  $\frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}$  اور یہ کہ ج س

> ل۔

[ا ق وہ بار ہے جو وقت ت پر گنجائش ج کے ایک لینی مرتبان کے ایک کوٹ پر ہوتا ہے جب کہ مرتبان کے کوٹ وقت ت = ۰ پر ایک تار سے جس کی مزاحمت س اور ذاتی امالہ کی قدر

ل ہے مربوط کئے گئے ہوں۔]

## ۲۹ - متمم تفاعل اور خاص تکملہ -

اب تک ہم نے صرف ایسی مثالوں پر بحث کی ہے جن میں مساوات (۱) کا تفاعل (لا) صفر کے مساوی تھا۔ اب ہم اس رشتہ کو بیان کریں گے جو اس مساوات کے اس حل میں جبکہ ف (لا) صفر کے مساوی نہ ہو اور اس حل میں جو ف (لا) کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے پایا جاتا ہے۔ ہم ایک سادہ مثال سے ابتدا کرتے ہیں چنانچہ مساوات

$$۲ \frac{فر}{لا} + ۵ = ۶ + \frac{فر}{لا} ۵$$

پر غور کرو۔

یہ ظاہر ہے کہ اس کا ایک حل  $لا = ۱$  ہے۔ ایسا کوئی حل جس میں اختیاری مستقل شامل نہ ہوں خاص تکملہ کہلاتا ہے۔ اب اگر ہم  $لا = ۱$  و لکھیں تو تفرقی مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ \frac{فر}{لا} + ۵ = (۱ + لا) ۲ + (۱ + \frac{فر}{لا}) ۵$$

$$۰ = ۲ + \frac{فر}{لا} ۵$$

$$۰ = ۲ + \frac{فر}{لا} ۵$$

$$۰ = ۲ + \frac{فر}{لا} ۵$$

وہ رقمیں جن میں اختیاری مستقل شامل ہوں متمم تفاعل کہلاتی ہیں۔

اس کی تعمیم آسانی سے کیجا سکتی ہے۔ چنانچہ اگر

$$\text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}} - \text{ا}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \dots + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}} - \text{ا}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \text{ا}$$

= ف (لا) ..... (۶)

کا ایک خاص تکملہ ما = ع ہو تو

$$\text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}} - \text{ا}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \dots + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}} - \text{ا}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \text{ا}$$

= ف (لا) ..... (۷)

اب مساوات (۶) میں ما = ع + رکھو اور مساوات (۷) کو تفریق کرو تو

$$\text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}} - \text{ا}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \dots + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}} - \text{ا}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فر}^{\text{لا}} \text{ا}} + \text{ب} \text{ا}$$

+ ب و = ..... (۸)

اگر (۸) کا حل و = فا (لا) ہو جس میں ن اختیاری مستقل  
شامل ہوں تو (۶) کا عام حل  
ما = ع + فا (لا)

ہے اور فا (لا) متمم تفاعل ہے۔

پس معلوم ہوا کہ مستقل سروں والی ایک خطی تفرقی  
مساوات کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا  
حاصل جمع ہوتا ہے جہاں متمم تفاعل اس مساوات کا  
حل ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات میں لا کے تفاعل  
کی بجائے صفر رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

حل طلب مثالیں۔

مثالوں (۱) تا (۳) میں اس امر کی تصدیق کرو کہ دئے ہوئے تفاعل ان کے ساتھ لکھی ہوئی مساواتوں کے خاص تکمیلے ہیں، نیز عام حل معلوم کرو:

$$(۱) \text{ فو }^{\text{لا}}، \text{ فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} - \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = \text{ما }^{\text{لا}}$$

$$(۲) \text{ (۳) فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} - \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۳۶$$

$$(۳) \text{ (۲) جب }^{\text{لا}} ۳، \text{ فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۱۰ \text{ جب }^{\text{لا}} ۳$$

حسب ذیل مثالوں میں مستقلوں کی وہ قیمتیں معلوم کرو جن کے لئے دئے ہوئے تفاعل ان کے ساتھ لکھی ہوئی مساواتوں کے خاص تکمیلے ہوئیں:

$$(۴) \text{ (۲) فو }^{\text{لا}}، \text{ فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۱۱۲$$

$$(۵) \text{ (۵) فو }^{\text{ت}}، \text{ فر }^{\text{ت}} = \frac{\text{فر }^{\text{س}}}{\text{فر }^{\text{ت}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{س}}}{\text{فر }^{\text{ت}}^2} = ۶۰$$

$$(۶) \text{ (۶) جب }^{\text{لا}} ۲، \text{ فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۱۲$$

$$(۷) \text{ (۷) جب }^{\text{لا}} ۲، \text{ فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۸$$

جب ۲-

$$(۸) \text{ (۸) فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۱۲$$

حسب ذیل مساواتوں کے خاص تکمیلے آزمائش سے معلوم کرو:

$$(۹) \text{ (۹) فر }^{\text{لا}} = \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} + \frac{\text{فر }^{\text{ما}}}{\text{فر }^{\text{لا}}^2} = ۸۰$$

$$(۱۰) \quad \frac{۲}{۳} \frac{فرما}{فرلا} + ۲ = \frac{فرما}{فرلا} + ۳۰۰ = ۳۰۰$$

$$(۱۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} + ۸ = \frac{فرما}{فرلا} + ۲۵ = ۵۰$$

### ۳۰۔ عامل عف اور جبر و مقابلہ کے اساسی قانون

جب خاص تکملہ اوپر کے طریقوں سے معلوم نہ ہو سکے تو بعض دیگر طریقے جن میں عامل عف شامل ہوتا ہے استعمال کئے جاتے ہیں عامل عف سے  $\frac{فرما}{فرلا}$  مراد ہے۔ یہ عامل متم تفاعل کی شکل کو جبکہ امدادی تفاعل کی اصلیں مساوی ہوں مثلاً  $\frac{فرما}{فرلا}$  کے لئے بھی کارآمد ہے۔

عف<sup>۲</sup>،  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی بجائے اور عف<sup>۳</sup>،  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی بجائے

استعمال کیا جائے گا، علیٰ ہذا القیاس۔

اب جملہ  $\frac{فرما}{فرلا} + ۲ = \frac{فرما}{فرلا} + ۵$  کو شکل

$$۲ \text{ عف} + ۲ = ۵ \text{ عف} + ۲$$

میں لکھا جاسکتا ہے یا شکل

$$(۲ \text{ عف} + ۲) = (۵ \text{ عف} + ۲)$$

میں ہم اس کو اجزائے ضربی کی شکل

$$(۲ \text{ عف} + ۲) = (۵ \text{ عف} + ۲)$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں ہم نے یہاں عف کے جملہ کے اجزائے ضربی یہ سمجھ کر معلوم کئے ہیں گویا کہ عف ایک معمولی جبر یہ مقدار ہے۔ کیا یہ جائز ہے؟

وہ عمل جو معمولی جبر و مقابلہ میں کئے جاتے ہیں تین قانونوں پر

مبنی ہیں :

۱۔ قانون تقسیمی،  $m(1+b) = m + 1 + b$

۲۔ قانون تبدیلی،  $1b = b1$

۳۔ قانون قوت نما،  $1^m \times 1^n = 1^{m+n}$

اب عفاں میں سے پہلے اور تیسرے قانونوں کو پورا کرتا ہے کیونکہ

عفا (۶ + ۷) = عفا۶ + عفا۷

اور عفا<sup>۶</sup> × عفا<sup>۷</sup> = عفا<sup>۶+۷</sup> (م اور ن مثبت صحیح اعداد)

اب رہا دوسرا قانون تو ایں کے متعلق عفا (ج ع) = ج (عفا) درست ہے اگر ج ایک مستقل ہے لیکن درست نہیں اگر ج متغیر ہے۔ نیز

عفا<sup>۶</sup> (عفا<sup>۷</sup>) = عفا<sup>۶</sup> (عفا<sup>۷</sup>) (م اور ن مثبت صحیح اعداد)

پس ہم دیکھتے ہیں کہ عفا جبر و مقابلہ کے اساسی قانونوں کو پورا کرتا ہے، صرف وہ قانون تبدیلی کو متغیروں کی صورت میں پورا نہیں کرتا۔ آئندہ ہم لکھینگے

فا (عفا) = عفا<sup>۱</sup> + عفا<sup>۲</sup> + عفا<sup>۳</sup> + عفا<sup>۴</sup> + عفا<sup>۵</sup> + عفا<sup>۶</sup> + عفا<sup>۷</sup> + عفا<sup>۸</sup> + عفا<sup>۹</sup> + عفا<sup>۱۰</sup> + عفا<sup>۱۱</sup> + عفا<sup>۱۲</sup> + عفا<sup>۱۳</sup> + عفا<sup>۱۴</sup> + عفا<sup>۱۵</sup> + عفا<sup>۱۶</sup> + عفا<sup>۱۷</sup> + عفا<sup>۱۸</sup> + عفا<sup>۱۹</sup> + عفا<sup>۲۰</sup> + عفا<sup>۲۱</sup> + عفا<sup>۲۲</sup> + عفا<sup>۲۳</sup> + عفا<sup>۲۴</sup> + عفا<sup>۲۵</sup> + عفا<sup>۲۶</sup> + عفا<sup>۲۷</sup> + عفا<sup>۲۸</sup> + عفا<sup>۲۹</sup> + عفا<sup>۳۰</sup> + عفا<sup>۳۱</sup> + عفا<sup>۳۲</sup> + عفا<sup>۳۳</sup> + عفا<sup>۳۴</sup> + عفا<sup>۳۵</sup> + عفا<sup>۳۶</sup> + عفا<sup>۳۷</sup> + عفا<sup>۳۸</sup> + عفا<sup>۳۹</sup> + عفا<sup>۴۰</sup> + عفا<sup>۴۱</sup> + عفا<sup>۴۲</sup> + عفا<sup>۴۳</sup> + عفا<sup>۴۴</sup> + عفا<sup>۴۵</sup> + عفا<sup>۴۶</sup> + عفا<sup>۴۷</sup> + عفا<sup>۴۸</sup> + عفا<sup>۴۹</sup> + عفا<sup>۵۰</sup> + عفا<sup>۵۱</sup> + عفا<sup>۵۲</sup> + عفا<sup>۵۳</sup> + عفا<sup>۵۴</sup> + عفا<sup>۵۵</sup> + عفا<sup>۵۶</sup> + عفا<sup>۵۷</sup> + عفا<sup>۵۸</sup> + عفا<sup>۵۹</sup> + عفا<sup>۶۰</sup> + عفا<sup>۶۱</sup> + عفا<sup>۶۲</sup> + عفا<sup>۶۳</sup> + عفا<sup>۶۴</sup> + عفا<sup>۶۵</sup> + عفا<sup>۶۶</sup> + عفا<sup>۶۷</sup> + عفا<sup>۶۸</sup> + عفا<sup>۶۹</sup> + عفا<sup>۷۰</sup> + عفا<sup>۷۱</sup> + عفا<sup>۷۲</sup> + عفا<sup>۷۳</sup> + عفا<sup>۷۴</sup> + عفا<sup>۷۵</sup> + عفا<sup>۷۶</sup> + عفا<sup>۷۷</sup> + عفا<sup>۷۸</sup> + عفا<sup>۷۹</sup> + عفا<sup>۸۰</sup> + عفا<sup>۸۱</sup> + عفا<sup>۸۲</sup> + عفا<sup>۸۳</sup> + عفا<sup>۸۴</sup> + عفا<sup>۸۵</sup> + عفا<sup>۸۶</sup> + عفا<sup>۸۷</sup> + عفا<sup>۸۸</sup> + عفا<sup>۸۹</sup> + عفا<sup>۹۰</sup> + عفا<sup>۹۱</sup> + عفا<sup>۹۲</sup> + عفا<sup>۹۳</sup> + عفا<sup>۹۴</sup> + عفا<sup>۹۵</sup> + عفا<sup>۹۶</sup> + عفا<sup>۹۷</sup> + عفا<sup>۹۸</sup> + عفا<sup>۹۹</sup> + عفا<sup>۱۰۰</sup>

+ عفا<sup>۱۰۱</sup> + عفا<sup>۱۰۲</sup> + عفا<sup>۱۰۳</sup> + عفا<sup>۱۰۴</sup> + عفا<sup>۱۰۵</sup> + عفا<sup>۱۰۶</sup> + عفا<sup>۱۰۷</sup> + عفا<sup>۱۰۸</sup> + عفا<sup>۱۰۹</sup> + عفا<sup>۱۱۰</sup> + عفا<sup>۱۱۱</sup> + عفا<sup>۱۱۲</sup> + عفا<sup>۱۱۳</sup> + عفا<sup>۱۱۴</sup> + عفا<sup>۱۱۵</sup> + عفا<sup>۱۱۶</sup> + عفا<sup>۱۱۷</sup> + عفا<sup>۱۱۸</sup> + عفا<sup>۱۱۹</sup> + عفا<sup>۱۲۰</sup> + عفا<sup>۱۲۱</sup> + عفا<sup>۱۲۲</sup> + عفا<sup>۱۲۳</sup> + عفا<sup>۱۲۴</sup> + عفا<sup>۱۲۵</sup> + عفا<sup>۱۲۶</sup> + عفا<sup>۱۲۷</sup> + عفا<sup>۱۲۸</sup> + عفا<sup>۱۲۹</sup> + عفا<sup>۱۳۰</sup> + عفا<sup>۱۳۱</sup> + عفا<sup>۱۳۲</sup> + عفا<sup>۱۳۳</sup> + عفا<sup>۱۳۴</sup> + عفا<sup>۱۳۵</sup> + عفا<sup>۱۳۶</sup> + عفا<sup>۱۳۷</sup> + عفا<sup>۱۳۸</sup> + عفا<sup>۱۳۹</sup> + عفا<sup>۱۴۰</sup> + عفا<sup>۱۴۱</sup> + عفا<sup>۱۴۲</sup> + عفا<sup>۱۴۳</sup> + عفا<sup>۱۴۴</sup> + عفا<sup>۱۴۵</sup> + عفا<sup>۱۴۶</sup> + عفا<sup>۱۴۷</sup> + عفا<sup>۱۴۸</sup> + عفا<sup>۱۴۹</sup> + عفا<sup>۱۵۰</sup> + عفا<sup>۱۵۱</sup> + عفا<sup>۱۵۲</sup> + عفا<sup>۱۵۳</sup> + عفا<sup>۱۵۴</sup> + عفا<sup>۱۵۵</sup> + عفا<sup>۱۵۶</sup> + عفا<sup>۱۵۷</sup> + عفا<sup>۱۵۸</sup> + عفا<sup>۱۵۹</sup> + عفا<sup>۱۶۰</sup> + عفا<sup>۱۶۱</sup> + عفا<sup>۱۶۲</sup> + عفا<sup>۱۶۳</sup> + عفا<sup>۱۶۴</sup> + عفا<sup>۱۶۵</sup> + عفا<sup>۱۶۶</sup> + عفا<sup>۱۶۷</sup> + عفا<sup>۱۶۸</sup> + عفا<sup>۱۶۹</sup> + عفا<sup>۱۷۰</sup> + عفا<sup>۱۷۱</sup> + عفا<sup>۱۷۲</sup> + عفا<sup>۱۷۳</sup> + عفا<sup>۱۷۴</sup> + عفا<sup>۱۷۵</sup> + عفا<sup>۱۷۶</sup> + عفا<sup>۱۷۷</sup> + عفا<sup>۱۷۸</sup> + عفا<sup>۱۷۹</sup> + عفا<sup>۱۸۰</sup> + عفا<sup>۱۸۱</sup> + عفا<sup>۱۸۲</sup> + عفا<sup>۱۸۳</sup> + عفا<sup>۱۸۴</sup> + عفا<sup>۱۸۵</sup> + عفا<sup>۱۸۶</sup> + عفا<sup>۱۸۷</sup> + عفا<sup>۱۸۸</sup> + عفا<sup>۱۸۹</sup> + عفا<sup>۱۹۰</sup> + عفا<sup>۱۹۱</sup> + عفا<sup>۱۹۲</sup> + عفا<sup>۱۹۳</sup> + عفا<sup>۱۹۴</sup> + عفا<sup>۱۹۵</sup> + عفا<sup>۱۹۶</sup> + عفا<sup>۱۹۷</sup> + عفا<sup>۱۹۸</sup> + عفا<sup>۱۹۹</sup> + عفا<sup>۲۰۰</sup>

جہاں تمام ب مستقل ہیں اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ ہم اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں یا کوئی اور عمل جو جبر و مقابلہ کے

اساسی قانونوں پر منحصر ہوں استعمال میں لا سکتے ہیں ایسی مثال کے لئے جس میں عاملوں کے لیے قانون قوت نما درست نہیں رہتا جبکہ عفو کی منفی قوتیں واقع ہوتی ہیں دیکھو دفعہ ۳۷ کی مثال (۳) -

$$(۳) - \text{فا}(\text{عفو}) = \text{فو}^1 \text{فا}^1$$

$$\text{چونکہ} \quad \text{عفو}^1 = \text{فو}^1$$

$$\text{عفو}^2 \text{فو}^2 = \text{فو}^2$$

اور علیٰ ہذا اس لیے

$$\text{فا}(\text{عفو}) = \text{فو}^1 = (\text{ب} \text{عفو}^1 + \text{ب} \text{عفو}^2 + \dots + \text{ب} \text{عفو}^n + \text{ب} \text{فو}^1)$$

$$= (\text{ب}^1 + \text{ب}^2 + \dots + \text{ب}^n + \text{ب}^1 + \text{ب}^2 + \dots + \text{ب}^n) \text{فو}^1$$

$$= \text{فو}^1 \text{فا}^1$$

$$(۳۲) \quad ۳۲ - \text{فا}(\text{عفو}) = \{\text{فو}^1 \text{و}^1\} = \text{فو}^1 \text{فا}^1 (\text{عفو}^1 + \text{و}^1) \text{جہاں و}^1 \text{لا کا کوئی}$$

تفاعل ہے - حاصل ضرب کے ن ویں تفرقی سر کے لئے لیب نیز کا جو مسئلہ ہے اس کی رو سے

$$\text{عفو}^n \{\text{فو}^1 \text{و}^1\} = (\text{عفو}^n \text{فو}^1) + \text{و}^1 (\text{عفو}^n - \text{فو}^1) (\text{عفو}^1 + \text{و}^1)$$

$$+ \frac{1}{n} (\text{ن} - 1) (\text{عفو}^2 \text{فو}^2) (\text{عفو}^2 + \text{و}^2) + \dots$$

$$+ \text{فو}^1 (\text{عفو}^n + \text{و}^n)$$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^3} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^3} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

اسی طرح  $\frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) = \{ \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots \}$ ، علیٰ ہذا القیاس

اس لیے  $\frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) = \{ \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots \}$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

$$= \frac{1}{p} (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p^2} (1 - \frac{1}{p}) + \dots$$

$$33 - \text{فا (عف)}^2 \text{ جم اول} = \text{فا} (-\frac{1}{p}) \text{ جم اول}$$

$$\text{چونکہ عف}^2 \text{ جم اول} = -\frac{1}{p} \text{ جم اول}$$

$$\text{عف}^2 \text{ جم اول} = (-\frac{1}{p}) \text{ جم اول}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{اس لیے فا (عف)}^2 \text{ جم اول} = \text{ب عف}^2 + \text{ب عف}^2 + \dots$$

$$+ \dots + \text{ب عف}^2 + \text{ب عف}^2 + \dots$$



$$\{b(-\dot{a}) + b(-\dot{a})^2 + \dots + b(-\dot{a})^n\} =$$

$$+ b(-\dot{a})^{n+1}$$

$$= \text{فا}(-\dot{a}) \text{جم و لا}$$

$$\text{اسی طرح فا}(\text{عف}^2) \text{جب و لا} = \text{فا}(-\dot{a}) \text{جب و لا}$$

۳۴۔ متم تفاعل جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں

مساوی ہوں۔  
جب امدادی مساوات کی اصلیں عہ اور عہ مساوی ہوتی  
ہیں تو اس کو شکل

میں لکھا جاسکتا ہے۔ تب ابتدائی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} - 2\text{عہ} + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} + \text{عہ}^2 = 0$$

$$\text{یعنی } (\text{عف}^2 - 2\text{عہ} + \text{عہ}^2) = 0$$

$$(\text{عف} - \text{عہ})^2 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

ہوگی۔

ہم پہلے معلوم کر چکے ہیں کہ  $\text{ما} = \text{فو}^2$  ایک حل ہے۔ عام حل  
معلوم کرنے کے لیے  $\text{ما} = \text{فو}^2$  و رکھو جہاں و، لا کا ایک تفاعل ہے۔

دفعہ ۳۲ کی رو سے

$$(\text{عف} - \text{عہ})^2 = \{\text{فو}^2\} = \text{فو}^2 (\text{عف} - \text{عہ} + \text{عہ}) = 0 = \text{فو}^2 \text{عف}^2$$

پس مساوات (9) یہ بتاتی ہے

$$\text{عف}^2 = \text{و}$$

$$\text{و} = \text{ا} + \text{ب لا}$$

یعنی

$$\text{ما} = \text{قو}^2 (\text{ا} + \text{ب لا})$$

اس لیے

(۳۳) اسی طرح مساوات (عف - عہ)  $\text{پ} = \text{ما}$  .  
مساوات عف  $\text{پ} = \text{و}$  .  
میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و} = (\text{ا} + \text{ا}^2 \text{لا} + \text{ا}^3 \text{لا}^2 + \dots + \text{ا}^n \text{لا}^{n-1})$$

$$\text{اور } \text{ما} = \text{قو}^2 (\text{ا} + \text{ا}^2 \text{لا} + \text{ا}^3 \text{لا}^2 + \dots + \text{ا}^n \text{لا}^{n-1})$$

جب متعدد مساوی اصلیں ہوں مثلاً

$$(\text{عف} - \text{عہ}) \text{پ} (\text{عف} - \text{بہ}) \text{ق} (\text{عف} - \text{جہ}) \text{ا} = \text{ما} \dots (۱۰)$$

تو چونکہ عاملوں پر قانون تبدیلی جاری کیا جاسکتا ہے اس لیے ہم  
اس مساوات کو شکل

$$(\text{عف} - \text{بہ}) \text{ق} (\text{عف} - \text{جہ}) \{ (\text{عف} - \text{عہ}) \text{پ} \} = \text{ما}$$

میں لکھ سکتے ہیں اور یہ مساوات 'سادہ' مساوات

$$(\text{عف} - \text{عہ}) \text{پ} = \text{ما} \dots (۱۱)$$

کے کسی حل سے پوری ہوتی ہے۔

اسی طرح مساوات (۱۰)

$$(\text{عف} - \text{بہ}) \text{ق} = \text{ما} \dots (۱۲)$$

$$(\text{عف} - \text{جہ}) \text{ا} = \text{ما} \dots (۱۳)$$

یا  
کے کسی حل سے پوری ہوتی ہے۔

مساوات (۱۰) کا عام حل مساواتوں (۱۱)، (۱۲) اور (۱۳) کے عام حلوں کا مجموعہ ہے اور اس میں (پ + ق + ر) اختیاری مستقل شامل ہوں گے۔

مثال (۱) حل کرو (عف<sup>۳</sup> - ۸ عف<sup>۲</sup> + ۱۶) = ۰

یعنی (عف<sup>۲</sup> - ۴) = ۰

امدادی مساوات (م<sup>۲</sup> - ۴) = ۰ ہے

جس کی اصلیں م = ۲ (دو مرتبہ) یا م = -۲ (دو مرتبہ) ہیں۔  
اس لیے قاعدہ کی رو سے حل ہے

ما = (۱ + ب لا) قو<sup>۲</sup> + (ع + ف لا) قو<sup>۲</sup>

مثال (۲) حل کرو (عف<sup>۲</sup> + ۱) = ۰

امدادی مساوات (م<sup>۲</sup> + ۱) = ۰ ہے

م = خ (دو مرتبہ) یا م = -خ (دو مرتبہ)

ما = (۱ + ب لا) قو<sup>۲</sup> + (ع + ف لا) قو<sup>۲</sup>

ما = (پ + ق لا) جم لا + (س + ر لا) جب لا

حل طلب مثالیں۔

(۱) (عف<sup>۴</sup> + ۲ عف<sup>۳</sup> + عف<sup>۲</sup>) = ۰

(۲) (عف<sup>۴</sup> + ۳ عف<sup>۳</sup> + ۳ عف<sup>۲</sup> + ۱) = ۰

(۳) (عف<sup>۴</sup> - ۲ عف<sup>۳</sup> + ۲ عف<sup>۲</sup> - ۱) = ۰

(۴) (عف<sup>۴</sup> - ۳ عف<sup>۳</sup> - عف<sup>۲</sup>) = ۰

(۵) ثابت کرو کہ

فا (عف<sup>۲</sup>) (پ جمز لا + ق جیز لا) = ف (د<sup>۲</sup>) (پ جمز لا

+ ق جیز لا)

(۶) ثابت کرو کہ (عف۔۱)  $\frac{1}{\text{ف}} = \text{ب} \frac{1}{\text{ف}}$  (فوجب ب لا)

۳۵۔ خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے لیے لامتناہی طریقے  
جبکہ فا (لا) =  $\frac{1}{\text{ف}}$ ۔

حسب ذیل طریقے عامل عف کو اس طرح استعمال کرنے پر  
مبنی ہیں گویا کہ وہ ایک معمولی جبریہ مقدار ہے۔ اول ہم کسی جبریہ  
عمل کو جو مناسب معلوم ہو اختیار کریں گے اور جب اس کی تکمیل  
سے نتیجہ حاصل ہو جائے تو اس نتیجہ کی تصدیق راست تفرق کے  
عمل سے کی جائے گی۔ ترقیم

فا (عف) ف (لا)

کو مساوات کے خاص تکملہ کے لیے استعمال کیا جائے گا۔  
فا (عف) ما = ف (لا)

(۱) اگر ف (لا) =  $\frac{1}{\text{ف}}$  تو دفعہ ۳۱ کے نتیجہ

فا (عف)  $\frac{1}{\text{ف}} = \text{ف} \frac{1}{\text{ف}}$  (۱)

سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ  $\frac{1}{\text{ف}}$  کی ایک قیمت  $\frac{1}{\text{ف}}$  (۱)  $\frac{1}{\text{ف}}$

ہو سکتی ہے جب تک کہ فا (۱)  $\neq 0$ ۔  
اس کی تصدیق آسانی ہو جاتی ہے کیونکہ

فا (عف)  $\left\{ \frac{1}{\text{ف}} \right\} = \frac{\frac{1}{\text{ف}}}{\text{فا (۱)}} = \frac{1}{\text{فا (۱)}} \frac{1}{\text{ف}}$  بموجب دفعہ ۳۱  
=  $\frac{1}{\text{ف}}$

(۲) اگر فا (۱) = تو (عف - ۱) کو فا (عف) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہئے۔

فرض کرو کہ فا (عف) = (عف - ۱) فہ (عف) جہاں فہ (۱) ≠ ۰۔  
اب دفعہ ۳۲ کے نتیجہ

$$\text{فا (عف)} = \left\{ \frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \right\} = \text{فو} \text{ فا (عف + ۱) و}$$

سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ۱ = تو

$$\left\{ \frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \right\} = \frac{1}{\text{عف - ۱}} = \text{فو} \times \frac{1}{\text{عف - ۱}} = \frac{\text{فو}}{\text{عف - ۱}} = \text{فا (عف)}$$

$$\frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \times \frac{1}{\text{عف - ۱}} = 1 \times \frac{1}{\text{عف - ۱}} =$$

درست ہو سکتا ہے جبکہ ہم یہ صریح مفروضہ اختیار کریں کہ  $\frac{1}{\text{عف - ۱}}$  وہ مال ہے جو عف کا مقلوب ہے یعنی وہ عال جو لا کے لحاظ سے تکمل کرتا ہے، اسی طرح  $\frac{1}{\text{عف}}$  لا کے لحاظ سے ب مرتبہ تکمل کرتا ہے۔ نیز اس نتیجہ کی جو آزمائشی طریقہ سے حاصل ہوا ہے آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ

$$\left\{ \frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \right\} = \left\{ \frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \right\} \text{ فا (عف - ۱) فہ (عف) = } \left\{ \frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \right\} \text{ فا (عف - ۱) فہ (عف) = } \left\{ \frac{\text{فو}}{\text{فہ}} \right\} \text{ فا (عف - ۱) فہ (عف) =}$$

$$= \text{فہ (عف)} \left[ \frac{\text{فہ}}{\text{عف}} \cdot \frac{\text{لا}}{\text{اب}} \right] \text{ حسب دفعہ ۳۲}$$

$$= \text{فہ (عف)} \left[ 1 \times \frac{\text{فہ}}{\text{فہ}} \right]$$

نددی مثالوں کو حل کرنے میں آزمائشی طریقوں کی بار بار تصدیق (۳۵) کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

$$\text{مثال (۱)} \quad (\text{عف} + ۳) \text{ فہ}^۲ = ۵۰ \text{ فہ}^۲$$

خاص تکملہ

$$\text{فہ}^۲ = \frac{۵۰ \text{ فہ}^۲}{۳ + \text{عف}} = ۵۰ \text{ فہ}^۲ \times \frac{۱}{۳ + \text{عف}}$$

ہے۔ متمم تفاعل کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ \text{ فہ}^۲ = ۵۰ \text{ فہ}^۲ + (۱ + ۳ \text{ فہ}^۲)$$

$$\text{مثال (۲)} \quad (\text{عف} - ۲) \text{ فہ}^۲ = ۵۰ \text{ فہ}^۲$$

اگر  $۵۰ \text{ فہ}^۲$  میں عف کی بجائے ۲ درج کیا جائے

تو نتیجہ لاتنا ہی حاصل ہوتا ہے۔ لیکن دوسرا طریقہ استعمال کرنے سے

$$۱ \text{ فہ}^۲ \times \frac{۱}{۲ - \text{عف}} = ۱ \text{ فہ}^۲ \times \frac{۱}{۲ - \text{عف}} = ۵۰ \text{ فہ}^۲ \times \frac{۱}{۲ - \text{عف}}$$

$$۲۵ \text{ فہ}^۲ =$$

متمم تفاعل جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲۵ \text{ فہ}^۲ = ۵۰ \text{ فہ}^۲ + (۱ + ۳ \text{ فہ}^۲)$$

## حل طلب مثالیں۔

حل کرو:

$$(۱) (عف^۲ + ۶ عف + ۲۵) = ۱۰۴ = ۱۰۴$$

$$(۲) (عف^۲ + ۲ ب عف + ب^۲ + ق) = ۱۰۴ = ۱۰۴$$

$$(۳) (عف^۲ - ۹) = ۱۰۴ = ۱۰۴$$

$$(۴) (عف^۲ - ۴ عف + ۴) = ۱۰۴ = ۱۰۴$$

$$۸ = ۸$$

## ۳۶۔ خاص تکملہ جبکہ ف (لا) = جم و لا

دفعہ ۳۳ کی رو سے

فہ (عف^۲) جم و لا = ف (-) جم و لا

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جم خاص تکملہ کو اس طرح حاصل کر سکتے ہیں کہ جہاں جہاں عف واقع ہے اس کی بجائے - اور ج کریں۔  
مثال (۱) (عف^۲ + ۳ عف + ۲) = ۱۰۴ = ۱۰۴

$$\frac{۱}{عف^۲ + ۳ عف + ۲} = \frac{۱}{جم} = \frac{۱}{جم}$$

نسب نامیں عف لانے کے لیے نسب نما اور شمار کنندہ کو ۳ عف سے ضرب دو جیسا کہ اہم مقداروں کی صورت میں کیا جاتا ہے تو حاصل ہوگا

$$\frac{۳ عف + ۲}{۳ عف - ۲} = \frac{۱}{۳ عف - ۲}$$

جس سے

$$\frac{3 \text{ عف} + 2 \text{ جم} 2 \text{ لا}}{27 - 36} = - \frac{1}{27} - (3 \text{ عف} 2 \text{ جم} 2 \text{ لا} + 2 \text{ جم} 2 \text{ لا})$$

$$= - \frac{1}{27} - (2 \text{ جم} 2 \text{ لا} + 2 \text{ جب} 2 \text{ لا})$$

$$= \frac{1}{27} (3 \text{ جب} 2 \text{ لا} - 2 \text{ جم} 2 \text{ لا})$$

(۳۶) مثال (۲) (عف<sup>۲</sup> + عف + ۱۱ عف + ۶) = ۲ جب ۳ لا

$$\frac{1}{27 - 36} = \frac{2 \text{ جب} 3 \text{ لا}}{27 - 36} = \frac{2 \text{ جب} 3 \text{ لا}}{27 - 36} = \frac{2 \text{ جب} 3 \text{ لا}}{27 - 36}$$

$$= \frac{1}{27 - 36} \text{ جب} 3 \text{ لا}$$

$$= \frac{27 + \text{عف}}{54 - 36} \text{ جب} 3 \text{ لا}$$

$$= - \frac{1}{585} (3 \text{ جم} 3 \text{ لا} + 27 \text{ جب} 3 \text{ لا})$$

$$= - \frac{1}{195} (8 \text{ جب} 3 \text{ لا} + 3 \text{ جم} 3 \text{ لا})$$

اب ہم راست تفریق کے عمل سے یہ بنلا سکتے ہیں کہ حاصل شدہ

نتیجے درست ہیں -

اگر ایسے طریقہ کو

[ق (عف<sup>۲</sup>) + عف ق = م] = ۲ جم ۱ لا + ج جب ۱ لا  
پر استعمال کیا جائے جہاں ب اور ج مستقل ہیں تو حاصل ہوگا

ق - (۱) (ب جم ۱ لا + ج جب ۱ لا) + ق - (۱) (ب جب ۱ لا - ج جم ۱ لا)

$$\{ق - (۱)\} + \{ق - (۱)\}$$



یہ بتلانا بہت آسان ہے کہ جملہ بالا فی الحقیقت ایک خاص تکملہ ہے بشرطیکہ نسب نما معدوم نہ ہو۔ اس نسبت سے صورت پر آئندہ بحث کی جائے گی (صفحہ ۳۸)۔

## حل طلب مثالیں

حل کرو:

$$(۱) (عف + ۱) = ۱۰ \text{ جب } ۲ لا$$

$$(۲) (عف - ۵) = ۱۰ \text{ جب } ۴ لا$$

$$(۳) (عف + ۸) = ۲۵ \text{ جب } ۱۲ لا$$

$$(۴) (عف + ۲) = ۱۰ \text{ جب } ۲۰ لا$$

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{فرس}{فرس} + \frac{۲ک}{فرس} = ۱۰ \text{ جب } ۲ لا$$

کے خاص تکملہ کو شکل پ جم (ج ت - ص)

$$\text{میں لکھا جاسکتا ہے جہاں پ} = \frac{۱}{(ب - ۲) + ۲ک}$$

$$\text{مس ص} = \frac{۲ک}{ب - ۲}$$

پس ثابت کرو کہ اگر ج متغیر ہو اور ک 'ب' اور ۱ مستقل ہوں تو پ

$$\text{بڑے سے بڑا ہو گا جبکہ ک بہت چھوٹا ہو اور ج} = \sqrt{۲ک - ۲} \text{ تقریباً۔ اس}$$

$$\text{صورت میں نہ} = \frac{۱}{۲} \text{ تقریباً اور پ} = \frac{۱}{۲ک - ۲} \text{ تقریباً۔}$$

[یہ تفرقی مساوات ایک رُتقش نظام کے لیے ہے جس میں ایک قوت سے جو رفتار کے متناسب ہے قصر ہوتا ہے اور جو ایک بیرونی

دوری قوت کے زیر عمل ہے۔ خاص تکملہ سے قسری ارتعاش حاصل ہوتے ہیں اور متمم تفاعل سے وہ آزاد ارتعاش جن کا قصر جلد عمل میں آجاتا ہے [دیکھو مثال ۱۵ دفعہ ۲۸ کے بعد]۔ ان قسری ارتعاشوں کا محیط بڑے سے بڑا ہو گا اگر بیرونی قوت کا دور  $\frac{\pi}{2}$  آزاد ارتعاشوں کے

دور [جو  $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$  تقریباً ہے] کے تقریباً مساوی ہو اور تب (۳۷)

صد جو بیرونی قوت اور جو اب کے درمیان ہیئت کا فرق ہے تقریباً  $\frac{\pi}{2}$  ہوتا ہے۔ یہ کمک کا اہم مظہر ہے جس کے اطلاق آواز تعمیرات اور بے تاریکی غراف میں بہت اہم ہیں۔

۳۷۔ خاص تکملہ جبکہ ف (لا) = لا جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

اس صورت میں آزمائشی طریقہ  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots$  کو عف کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاتا ہے۔

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots$$

$$= \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots$$

$$= \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots$$

پس متمم تفاعل کو جمع کرنے سے

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

کامل  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots$  جب  $f_0 = 1$  ہے۔

مثال (۲)

$$\frac{1}{\text{عف}^2 - \text{عف} + 3} = \frac{1}{\text{عف}^2} \left( \frac{1}{\text{عف} - 1} - \frac{1}{\text{عف} - 3} \right) \quad \text{لاگرنی کسروں میں}$$

$$= \frac{1}{3} \left( 1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + \dots \right) - \frac{1}{3} \left( 1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \text{عف} + \frac{\text{عف}^2}{3} + \frac{\text{عف}^3}{9} + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \text{عف} + \frac{13}{24} \text{عف}^2 + \frac{1}{81} \text{عف}^3 + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \dots + \frac{131}{243} \text{عف}^4 + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{عف} + \frac{1}{3} \text{عف}^2 + \frac{1}{3} \text{عف}^3 + \dots$$

شتم تفاعل جمع کرنے پر  
 $(\text{عف}^2 - \text{عف} + 3) = 1$

$$\text{کامل} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{عف} + \frac{1}{3} \text{عف}^2 + \frac{1}{3} \text{عف}^3 + \dots + \frac{1}{3} \text{عف}^n + \dots$$

$$\text{مثال (۳)} \quad \frac{1}{\text{عف}^2 (\text{عف} + 3)} = \frac{1}{96} \left( \frac{1}{\text{عف}^2} - \frac{1}{\text{عف} + 3} \right)$$

$$= \frac{1}{96} \left( \frac{1}{\text{عف}^2} - \frac{1}{\text{عف} + 3} \right)$$

$$= \frac{1}{96} \left( \frac{1}{\text{عف}^2} - \frac{1}{12} \right)$$

$$= \frac{1}{96} \left( \frac{1}{\text{عف}^2} - \frac{1}{12} \right)$$

$$\text{اس لیے } \text{عف}^2 (\text{عف} + 3) = 1 \quad \text{کامل}$$

$\text{لا}^2 - \text{لا}^4 + \text{جم}^2 + \text{لا}^2 + \text{ب جب}^2 + \text{ع} + \text{غ لا}$

## متبادل طریقہ

$$\frac{1}{n} \times \frac{96}{\text{عف}^2} = \frac{1}{(\text{عف}^2 + 96)} \times 96$$

اس میں ایک زائد رقم ۳ ہے لیکن یہ رقم اوپر کے حل کے متمم (۳۸) تفاعل میں شامل ہے۔

عف، اتفاعل فا (عف) میں جزو ضربی کے طور پر شریک نہیں ہے اختیار کیا ہے۔ اس کی وجہ حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ پھیلاؤ معمولی طویل تقسیم کے ذریعہ حاصل کئے جاتے ہیں۔ یہ امر ہمیشہ ممکن ہے اگرچہ جزوی اکسروں کا استعمال علاؤ زیادہ سہولت بخش ہو سکتا ہے۔ اگر تقسیم کا عمل جاری رکھا جائے یہاں تک کہ خارج قسمت میں عف آجائے تو باقی میں عف<sup>4</sup> جزو ضربی کے طور پر شریک رہے گا۔ فرض کرو کہ باقی

ف (عف)  $\times$  عف<sup>۱+۲</sup> ہے۔ تب

$$\frac{1}{\text{فا (عف)}} = \text{ج} + \text{ج عف} + \text{ج عف}^2 + \dots + \text{ج عف}^m$$

$$+ \frac{\text{ف (عف)} \times \text{عف}^m}{\text{فا (عف)}} + \dots \dots \dots (1)$$

یہ ایک جبریہ متماثلہ مساوات ہے اور اس لیے

$$= \text{فا}(\text{عف})\{\text{ج} + \text{ج ع ف} + \text{ج ع ف}^2 + \dots + \text{ج ع ف}^n\}$$

$$+ \text{فء اعف} \times \text{عفا} + \text{ءا} \dots (2)$$

$$\{ \text{فا} (\text{عف}) \times \text{عف}^1 \} = \text{لا}^1 \text{ کا ایک خاص تکملہ ہے یعنی یہ کہ}$$

$$\{ \text{فا} (\text{عف}) \times \text{عف}^1 \} = \{ (\text{ج} \text{عف}^1 + \text{ج} \text{عف}^2 + \text{ج} \text{عف}^3 + \dots + \text{ج} \text{عف}^n) \}$$

$$+ \dots + \text{ج} \text{عف}^n \} = \text{لا}^1 \text{ (۴)}$$

$$\text{اب } \{ \text{فا} (\text{عف}) \times \text{عف}^1 \} = \text{ع} = \{ \text{فا} (\text{عف}) \} \text{ع}^1$$

$$\text{نیز } \text{عف}^1 = \{ (\text{ج} \text{عف}^1 + \text{ج} \text{عف}^2 + \text{ج} \text{عف}^3 + \dots + \text{ج} \text{عف}^n) \} \text{ع}^1$$

اس لیے مساوات (۴) کی دائیں جانب کا جملہ ہو جاتا ہے

$$\{ \text{فا} (\text{عف}) \} = \{ (\text{ج} \text{عف}^1 + \text{ج} \text{عف}^2 + \text{ج} \text{عف}^3 + \dots + \text{ج} \text{عف}^n) \} \text{ع}^1 = \text{لا}^1 \text{ بموجب (۳)}$$

اویہی ثابت کرنا تھا۔

متبادل طریقہ میں ہمیں خاص تکملہ میں رزائد رقیں ملیں گی،  
فرض کرو کہ یہ رقیں

$$\text{ج} \text{عف}^1 + \text{ج} \text{عف}^2 + \text{ج} \text{عف}^3 + \dots + \text{ج} \text{عف}^n \text{ع}^1$$

ہیں۔ ان میں ایسی رقیں شریک ہیں جن میں لا کی (۱-۱) ویں اور  
اس سے مترقیوں آتی ہیں۔ لیکن یہ سب کی سب متعم تفاعل میں واقع  
ہوتی ہیں۔ اس لئے پہلے طریقہ کو ترجیح حاصل ہے۔

(۳۹) یہ یاد رہے کہ اگر  $\text{عف}^1$ ،  $\text{ع}^1$  کے تکملہ کی سادہ ترین شکل کو  
تعبیر کرے اور اس میں کوئی اختیاری مستقل نہ آئے تو

$$\text{عف}^1 = (\text{عف}^1 \times 1) = \text{عف}^1 \times 0 = 0$$

$$\text{عف} = (\text{عف}^1 \times 1) = \text{عف}^1 \times 1 = 1$$

$$\text{عف} = (\text{عف}^1 \times 1) \neq \text{عف}^1 (\text{عف}^1 \times 1)$$

لیکن  
اس لیے

اسی طرح  $\text{عف}^1 (\text{عف}^2 \times \text{لا}) \neq \text{عف}^2 (\text{عف}^1 \times \text{لا})$  اگر  $m < n$   
 پس جب  $\text{عف}$  کی منفی قوتیں زیر بحث ہوتی ہیں تو جبر و مقابلہ  
 کے قانون ہمیشہ پورے نہیں ہوتے۔ اس سے یہ معلوم ہوتا ہے  
 کہ مثال (۳) میں اختیار کردہ دو مختلف طریقوں سے کیوں مختلف  
 نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔

### حل طلب مثالیں۔

حل کرو:

$$(1) (\text{عف} + 1) = 6 \quad (2) (\text{عف}^2 + 2 \text{عف}) = 6 \quad \text{لا} = 2$$

$$(3) (\text{عف}^2 - 6 \text{عف} + 9) = 6 \quad \text{لا} = 18$$

$$(4) (\text{عف}^2 - 6 \text{عف} + 9 \text{عف}^2) = 6 \quad \text{لا} = 18$$

$$(5) (\text{عف}^2 - \text{عف} - 2) = 6 \quad \text{لا} = 2 \quad \text{لا} = 18$$

$$(6) (\text{عف}^2 - \text{عف}^2 + 2 \text{عف}) = 6 \quad \text{لا} = 2 \quad \text{لا} = 18$$

### ۳۸۔ خاص تکملے دوسری سادہ صورتوں میں۔

اب ہم سادہ صورتوں میں خاص تکملوں کو محسوب کرنے کی  
 چند ایسی نمونہ کی مثالیں درج کرتے ہیں جن پر گزشتہ دفعوں  
 میں بحث نہیں ہوئی ہے۔

$$\text{مثال (۱)} (\text{عف} + ۴) = ۶ \quad \text{جب لا} = ۲$$

یہاں ہم  $\frac{1}{\text{عف} + ۴}$  جب  $۲$  لا کی قیمت کو  $\text{عف}^2$  کی بجائے  $۲$   
 لکھ کر معلوم نہیں کر سکتے کیونکہ اس اندراج سے نسب نامہ صفر کے مساوی  
 ہو جاتا ہے۔ لیکن  $\frac{۲}{\text{عف} + ۴}$  کا خیالی حصہ  $x$  جب  $۲$  لا ہے اور





$$= \text{قو}^2 \left( -\frac{1}{\text{عف}} - \frac{1}{\text{عف} - 1} \right) \text{لا}^3$$

$$= \text{قو}^2 \left( -\frac{1}{\text{عف}} - 1 - \text{عف} - \text{عف}^2 - \text{عف}^3 - \dots \right) \text{لا}^3$$

$$= \text{قو}^2 \left( -\frac{1}{\text{عف}} - \text{لا}^3 - \text{لا}^2 - \text{لا} - 1 - \text{عف} - \text{عف}^2 - \text{عف}^3 - \dots \right)$$

تم تقاضا جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$= \text{قو}^2 - \text{قو}^3 \left( \frac{1}{\text{عف}} + \text{لا}^3 + \text{لا}^2 + \text{لا} + 1 - \text{عف} - \text{عف}^2 - \text{عف}^3 - \dots \right)$$

جس میں رقم ب قو<sup>2</sup> میں - ۶ قو<sup>2</sup> شامل ہے۔

$$\text{مثال (۳)} \quad (\text{عف}^2 - ۶ \text{عف} + ۱۳) = ۸ \text{ قو}^3 \text{ جب لا}^2$$

$$\frac{1}{\text{عف}^2 - ۶ \text{عف} + ۱۳} \times ۸ \text{ قو}^3 \text{ جب لا}^2 = ۸ \text{ قو}^3 \frac{1}{\{(\text{عف} + ۳) - ۶(\text{عف} + ۳) + ۱۳\}} \text{ جب لا}^2$$

$$= ۸ \text{ قو}^3 \frac{1}{\text{عف}^2 + ۳} \text{ جب لا}^2$$

$$= ۸ \text{ قو}^3 \left( -\frac{1}{\text{عف}} + \text{لا}^2 \text{ جم لا}^2 \right) \text{ دیکھو مثال (۱)}$$

$$= -\text{لا}^2 \text{ قو}^3 \text{ جم لا}^2$$

تم تقاضا جمع کرنے پر

$$= \text{قو}^3 (1 \text{ جم لا}^2 + \text{ب جب لا}^2 - \text{لا}^2 \text{ جم لا}^2)$$

یہ طریقہ تقریباً ایسے تمام خاص تکملوں کی قیمت معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں جن سے طالب علم کو واسطہ پڑ سکتا ہے۔ دیگر تمام صورتوں میں

اُس طریقہ پر غور کیا جاسکتا ہے جس کو اس باب کے ختم پر مثالوں (۳۳) اور (۳۴) میں واضح کیا گیا ہے۔

## حل طلب مثالیں۔

حل کرو:

$$(۱) (عف^۲ + ۱) = ۴ = ۴ (۲) (عف - ۱) = ۴ = (۳ + لا) قو^۲$$

$$(۳) (عف^۳ - ۳ عف - ۲) = ۴ = ۵۴۰ لا قو^۳$$

$$(۴) (عف^۲ + ۲ عف + ۲) = ۴ = ۲ قو جب لا$$

$$(۵) (عف^۲ + ۱) = ۴ = ۲۴ لا جم لا$$

$$(۶) (عف^۵ - عف) = ۴ = ۱۲ قو + ۸ جب لا - ۲ لا$$

$$(۷) (عف^۲ - ۶ عف + ۲۵) = ۴ = ۲ قو لا جم لا + ۸ قو لا (۱ - ۲ لا) جب لا$$

## ۳۹۔ متجانس خطی مساوات۔

یہ نام شکل

$$(ب لا عف + ب لا عف - لا عف + ... + ب) = ف (لا)$$

کی مساوات کو دیا جاتا ہے۔  
اس میں اگر ہم لا = قو رکھیں تو وہ اُس نمونہ میں تحویل ہوتی ہے جس پر پہلے غور کیا جا چکا ہے۔

$$مثال۔ (لا عف^۳ + ۳ لا عف^۲ + لا عف) = ۴ = ۲۴ لا$$

(۴۱)

$$رکھو لا = قو = \frac{قو}{قو} لا$$



کو متجانس خطی شکل میں  $y = 1 + b$  لا رکھ کر تبدیل کیا جاسکتا ہے جس سے حاصل ہوگا

$$\text{ع} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = \text{ب} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}$$

حل طلب مثالیں -

$$(1) \quad 2\text{لا}^2 - \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = 62 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}$$

$$(2) \quad 2\text{لا}^2 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = 625 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}$$

$$(3) \quad 2\text{لا}^2 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = 68 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \quad (\text{جم لوک لا})$$

$$(4) \quad 2\text{لا}^2 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = 6 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \quad (\text{لوک لا})$$

$$(5) \quad (2\text{لا} + 1)^2 - \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = 616 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \quad (2\text{لا} + 1)^2$$

$$(6) \quad (2\text{لا} + 1)^2 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} = 6 + \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \quad (\text{جم لوک لا})$$

۴۔ مستقل سروں والی ہمزاد خطی مساواتیں - (۴۲)

طریقہ کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی۔ یہاں دو تابع متغیر  $y$  اور ایک غیر تابع متغیر  $x$  ہے۔ ع حسب سابق  $\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}$  کی بجائے استعمال کیا جائیگا۔

$$(5\text{ع} + ۴) = ۱ - (۲\text{ع} + ۱) = ۱ - ۲\text{ع} \quad (1)$$



$$= (عف + ۸) قو^۱ - (عف + ۴) قو^۵$$

$$\text{یعنی } (-۲ عف^۲ - ۲ عف + ۴) ی = ۱۲ قو^۱$$

$$۳ = ی قو^۱ + ع قو^۱ + ف قو^۲$$

پار مستقل 'ا'، 'ب'، 'ع' اور 'ف' میں ربط معلوم کر نیکیے نیے  
ابتدائی مساواتوں میں سے کسی ایک میں اندراج کرو، فرض کرو کہ  
مساوات (۲) میں اندراج کیا گیا ہے تو

$$(عف + ۸) (۲ قو^۱ + ۱ قو^۱ + ب قو^۲) - (۳ قو^۱ + ۲ قو^۱ + ع قو^۱ + ف قو^۲) = ۵ قو^۱$$

$$۳ = ع \quad ۱۳ = ا \quad اور \quad ۲ = ب$$

$$۳ = ی قو^۱ + ع قو^۱ + ف قو^۱ = ۳ قو^۱ + ۱۳ قو^۱ + ۲ قو^۱ + ب قو^۲ \quad \text{حسب سابق}$$

## حل طلب مثالیں

$$(۱) عف - ما - ی = ۰$$

$$(عف - ۱) ما - (عف + ۱) ی = ۰$$

$$(۲) (عف - ۱) ما + (۲ عف - ۸) ی = ۰$$

$$(۳) (عف - ۵) ما - ۲ ی = ۰$$

$$(۳) (۲ عف^۲ - عف + ۹) ما - (عف^۲ + عف + ۳) ی = ۰$$

$$(۲ عف^۲ + عف + ۷) ما - (عف^۲ - عف + ۵) ی = ۰$$

(۴۳)

$$(۴) (عف + ۱) ما = ی + قو^۱$$

$$(عف + ۱) ی = ما + قو^۱$$

$$(۵) (عف + ۵) ما - ۲ ی = ۳۶ جم ۷ لا$$

$$ما + عف ی = ۹۹ جم ۷ لا$$

$$(۶) (۲\text{عف} + ۱) م + (۳۲\text{عف} + ۳) ی = ۹۱\text{قو} + ۱۴\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$۱ - (۸\text{عف} - ۱) ی = ۲۹\text{قو} + ۴\text{جب} ۲\text{لا} + ۱۳۵\text{جم} ۲\text{لا}$$

### تیسرے باب پر متفرق مثالیں

حل کرو:

$$(۱) (۱\text{عف} - ۱) م = ۱۶\text{قو}$$

$$(۲) (۴\text{عف} + ۲\text{عف} + ۱۲\text{عف} + ۹) م = ۱۴۴\text{قو}$$

$$(۳) (۴\text{عف} + ۶\text{عف} + ۱۱\text{عف} + ۶\text{عف}) م = ۲۰\text{قو} ۲\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$(۴) (۲\text{عف} - ۲\text{عف} + ۴\text{عف} - ۴) م = ۶۸\text{قو} ۲\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$(۵) (۴\text{عف} - ۶\text{عف} - ۸\text{عف} - ۳) م = ۲۵۶\text{قو} (۱ + ۲\text{لا})$$

$$(۶) (۴\text{عف} - ۸\text{عف} - ۹) م = ۵۰\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$(۷) (۴\text{عف} - ۲\text{عف} + ۱) م = ۴۰\text{جم} ۲\text{لا}$$

$$(۸) (۲\text{عف} - ۲) م = ۸\text{لا} + ۲\text{قو} + ۲\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$(۹) (۲\text{عف} - ۲) م = ۸\text{لا} + ۲\text{قو} ۲\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$(۱۰) (۴\text{عف} + ۱) م = ۳\text{جم} ۲\text{لا} + ۲\text{جب} ۲\text{لا}$$

$$(۱۱) (۴\text{عف} + ۱۰\text{عف} + ۹) م = ۹۶\text{جب} ۲\text{لا} + ۲\text{جم} ۲\text{لا}$$

$$(۱۲) (۴\text{عف} - ۱) م = ۱۰\text{لا} + ۱\text{مثبت صحیح عدد ہے}$$

$$(۱۳) \frac{۱۲\text{لوک} ۲\text{لا}}{۲\text{لا}} = \frac{۱}{۲\text{لا}} + \frac{۱}{۲\text{لا}}$$

$$(۱۴) \quad ۱۰ = \frac{فرما}{فرلا} \frac{۲}{لا} + \frac{فرما^۲}{فرلا^۲}$$

$$(۱۵) \quad \frac{ما۶}{لا} = \frac{فرما^۳}{فرلا^۳}$$

$$(۱۶) \quad (۴+لا۲)(۳+لا۲) = \frac{فرما}{فرلا} (۱+لا) + \frac{فرما^۲}{فرلا^۲} (۱+لا)$$

$$(۱۷) \quad ۴ = لا + \frac{فرلا}{فرت} ۲ - \frac{فرلا^۲}{فرت^۲}$$

$$\frac{فرما}{فرت} ۴ + \frac{فرما^۲}{فرت^۲} = ما۴ + لا۲۵ + ۱۶ تو$$

$$(۱۸) \quad \frac{فرلا}{فرت} = ما۲, \quad \frac{فرما}{فرت} = ی۲, \quad \frac{فری}{فرت} = لا۲$$

$$(۱۹) \quad ت = \frac{فرلا}{فرت} + ما = ۰, \quad ت = \frac{فرما}{فرت} + لا = ۰$$

$$(۲۰) \quad ت^۲ = \frac{فرلا^۲}{فرت^۲} + ت = \frac{فرلا}{فرت} + ما۲ = ۰$$

$$ت^۲ = \frac{فرما^۲}{فرت^۲} + ت = \frac{فرما}{فرت} - لا۲ = ۰$$

$$(۲۱) \quad \text{ثابت کرو کہ (عق}^۲ + ۱ - ۱) = ما = ۰ \text{ کا حل } ۱ \text{ تو اور شکل}$$

تو (ج رجم س لا + ج جب س لا)  
کی رمتوں کے ن زوجوں پر مشتمل ہے جہاں

$$ج = \frac{۱}{۱+ن۲} \text{ اور } س = \frac{۱}{۱+ن۲}$$

اور ر علی الترتیب قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ اختیار کرتا ہے۔



(۲۲) اگر (عف - ۱) = ۶ = ۰

(عف - ۱) = ۵ = ۰

(عف - ۱) = ۴ = ۰

تو 'و' اور 'ما' کو علی الترتیب معلوم کرو اور (عف - ۱) = ۳ = ۰ کو حل کرو۔  
(۲۲) ثابت کرو کہ

(۲۳)

(عف - ۱) (عف - ۱ - ۵) (عف - ۱ - ۵۲) = ۰

کے حل کو  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  اور  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  ج کو  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  اور  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

لکھا جاسکتا ہے۔

اس لیے (عف - ۱) = ۳ = ۰ کو حل اخذ کرو۔

[یہ طریقہ ڈلمبرٹ سے منسوب ہے۔ اعلیٰ ریاضی کے طالب علم کو فوراً یہ محسوس ہوگا کہ یہ حل بغیر مزید بحث کے قابل اطمینان نہیں ہے۔ یہ واضح ہے کہ دوسری تفرقی مساوات پہلی مساوات کی انتہا ہے لیکن یہ واضح نہیں ہے کہ دوسری مساوات کامل پہلی مساوات کے حل کی انتہا بھی ہے۔]

(۲۴) اگر (عف - ۱) = ۳ کو 'و' سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

ی، جف م، اور جف م جف م سب معدوم ہوتے ہیں جبکہ م = ۱۔

پس ثابت کرو کہ 'و'، 'لا' اور 'لا' سب (عف - ۱) = ۳ = ۰۔

کے حل ہیں۔

[دیکھو کہ حال (عف - ۱) اور جف م تبدیلی پذیر ہیں]

(۲۵) ثابت کرو کہ (عف + ۱) = ۴ = ۰ جم (۱ + ۵) لا

$$\frac{\text{جم } ۱ \text{ لا} - \text{جم } (۱ + ۱) \text{ لا}}{(۱ + ۱) - ۱} \quad \text{کا ایک مل}$$

ہے۔ پس  $(\text{عف} + ۱) = ۱ = \text{جم } ۱ \text{ لا}$  کا خاص تکملہ اذکر و۔  
[اس پر وہی اعتراض وارد ہوتا ہے جو مثال (۲۳) کی صورت میں ہوا تھا]

(۲۶) ثابت کرو کہ اگر و لا کا ایک تفاعل ہو اور فا (عف) وہی معمولی مفہوم لیا جائے تو

$$(۱) \text{ عف } [لا] = لا \text{ عف} + و \text{ عف} - ۱$$

$$(۲) \text{ فا (عف) } [لا] = لا \text{ فا (عف) } + و \text{ فا (عف) } - ۱$$

$$(۳) \frac{۱}{\text{فا (عف)}} [لا] = \left\{ لا - \frac{۱}{\text{فا (عف)}} \times \text{فا (عف)} \right\} \times \frac{۱}{\text{فا (عف)}} + و$$

$$(۴) \frac{۱}{\text{فا (عف)}} [لا] = \left\{ لا - \frac{۱}{\text{فا (عف)}} \times \text{فا (عف)} \right\} \times \frac{۱}{\text{فا (عف)}} + و$$

ان ضابطوں کو استعمال کرنے کی سفارش نہیں کی جاتی کیونکہ غلط نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں اگر اعمال کی ترتیب میں کافی احتیاط نہ کی جائے۔

$$(۲۷) (۱) \text{ عف } (۱ - ۱) = لا$$

اور (۲)  $(\text{عف} + ۱) = ۱ = لا \text{ جم } لا$   
کے خاص تکملے پھلی مثال کے میجوں (۳) اور (۴) کو استعمال کر کے حاصل کرو۔  
(۲۸) ثابت کرو کہ

$$لا \frac{۱}{\text{فا (عف)}} = \frac{۱}{\text{فا (عف)}} (۱ - ۱) + (۲ - ۱) + \dots + (ن - ۱) + ۱$$

جہاں طہ کو لا  $\frac{۱}{\text{فا (عف)}}$  کی بجائے لکھا گیا ہے۔

(۲۹) ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ فا (ط) لا } = \text{ لا فا (م)}$$

$$(۲) \text{ فا (ط) لا } = \frac{\text{لا}}{\text{فا (م)}} ، \text{ بشرطیکہ فا (م) } \neq ۰$$

$$(۳) \text{ فا (ط) لا } = [\text{لا و}] = \frac{\text{لا}}{\text{فا (ط+م)}} \text{ و}$$

جہاں و، لا کا ایک تفاعل ہے۔

(۴) پچھلی مثال کے نتیجوں کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ

(۲۵)

$$\text{لا}^۲ = \frac{\text{لا}^۲}{\text{فر لا}} - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{لا}^۲}{\text{فر لا}} = \text{لا}^۲$$

$$\text{کامل} \quad \frac{۱}{۴} \text{ لا} + \frac{۱}{۴} \text{ لا} + \frac{۱}{۴} \text{ لا}$$

ہے جہاں ۱ اور ۲، م (۱-۱) - م ۲ + ۱ = کی اصلیں ہیں یعنی ۲ اور ۳۔

$$(۳۱) \text{ اگر یہ دیا گیا ہو کہ (عف-۱) = م = ۱، تو}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ (عف-۱) (عف-۲) = م = ۱}$$

دوسری تفرقی مساوات کا عام حل (جس میں دو نامعلوم مستقل شریک ہوں) لکھ کر اور پہلی مساوات میں اندراج کر کے ان مستقلوں میں سے ایک کی قیمت معلوم کرو اور اس طرح پہلی مساوات کا حل حاصل کرو۔

$$(۳۲) \text{ پچھلی مثال کے طریقہ سے } \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} + \text{لا} = \text{لا کو}$$

حل کرو۔

$$(۳۳) \text{ اگر } \text{فر لا} \text{ سے } \text{فر لا} \text{، تو } \text{فر لا} \text{، تو } \text{فر لا} \text{، تو } \text{فر لا}$$

$$\text{فر لا} \text{ سے } \text{فر لا} \text{، تو } \text{فر لا} \text{، تو } \text{فر لا}$$

وغیرہ

تعبیر کئے جائیں تو ثابت کرو کہ فا (عف) ما = ء کے حل جہاں فا (عف) ن  
 اجزائے ضربی (عف - ا) (عف - ب) .... کا ماضی ضرب ہے  
 ما = عن  
 لکھا جاسکتا ہے۔

یہ درست ہے اگر فا (عف) کے اجزائے ضربی سب کے سب مختلف نہ بھی ہوں۔  
پس (عف-ا) (عف-ب) ما = مو لوک لاکو مل کرو۔

(۳۴)  $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$  کو جزئی کسور میں رکھ کر ثابت کرو کہ فا (عف) = ۶ کے حل کو شکل

3  $\frac{1}{(1)} \int_0^1 x^2 dx$

میں بیان کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ فا (عف) کے اجزائے ضربی سب کے سب مختلف ہوں =

{ اگر فاد (ع) کے اجزائے ضربی مختلف نہ ہوں تو تکملوں کے عمل تکرار پائیں گے }

عمل لکھارپا میں نے [ اس مثال اور گزشتہ مثال کے طریقوں سے کسی خطی مساوات کو جس کے مترسقل ہوں نظری طور پر حل کر لیا جاسکتا ہے۔ لیکن جب تک کہ  $\epsilon$  ان سادہ تفاعلوں (قوت نماؤں) جیوب اور جیوب التمام اور کثیر الاضلاع کے حاصل ضرب) میں سے ایک نہ ہو جن پر اس کتاب میں بحث کی گئی ہے اس وقت تک محول بالا عمل میں ایک ایسے غیر محدود عمل مکمل سے واسطہ پڑے گا جس کی تکمیل نہیں ہو سکے گی۔

اگر ع = ف (لا) تو قو<sup>۱۱</sup> می عو<sup>۱۱</sup> فز لا کو شکل

ف (ت) و (ت) فرت

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں زیریں حدک ایک اختیاری مستقل ہے۔  
(۳۵) (۱) اس کی تصدیق کرو کہ

$$\frac{فر^۲}{فرلا} + ب^۲ = ف (لا)$$

کا خاص تکملہ  $ما = \frac{۱}{ب} ف (ت)$  جب ب (لا-ت) فرت ہے۔

[یاد رہے کہ اگر لا اور ب 'لا کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{فر}{فرلا} ف (لا) (ت) فرت = ف (لا) (ب) فرب - ف (لا) (ا) فر$$

$$+ \frac{فر (لا) (ت) فرت}{فرلا}$$

(۲) اس خاص تکملہ کو پچھلی مثال کا نتیجہ استعمال کر کے حاصل کرو۔

(۳) پس حاصل کرو (عف + ا) ما = قم لا

(۴) ثابت کرو کہ اس طریقہ سے

$$(عف + ا) ما = ف (لا)$$

کا حاصل بھی حاصل ہوگا (ایسی شکل میں جس میں عمل تکمیل کی علامتیں داخل نہیں ہونگی) اگر ف (لا) تفاعلوں مس لا، مم لا، قلا میں سے کوئی ایک ہو

(۳۶) - ثابت کرو کہ  $\frac{فر^۲}{فرت} + ب^۲ = ک$  جم ب ت کا خاص

تکملہ ایک اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے جس کا محیط لا انتہا بڑھتا جاتا ہے۔

[یہ محکم کا منظر ہے جس کا ذکر پہلے آچکا ہے] دیکھو مثال ۵

دفعہ [۳۶] - بلاشبہ اس نمونہ کی طبیعی مساواتیں صرف تقریبی ہوتی ہیں، اس لیے یہ نہیں مان لینا چاہئے کہ اہتزاز فی الواقع لامتناہی ہو جاتا ہے۔ تاہم وہ اس قدر بڑا ہو سکتا ہے کہ خطرہ سے خالی نہ ہو۔ یہی وجہ ہے کہ

فوج جب پل پر سے گذرتی ہے تو اس کو بے قاعدہ ہو کر قدم رکھنے کی ہمت  
یکجائی ہے تاکہ ان کے قدم پل کی ساخت کے فطری اہتزاز کے ساتھ ٹریں  
نہ ہونے پائیں [ (۳۷) ثابت کرو کہ

$$\frac{فر}{فر} = ۲ + \frac{فر}{فر} + (۲ + ۲) = ۴ = ک - قوت جھٹ$$

کا خاص تکملہ متغیر حیطہ ک - قوت کے اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے۔  
اس حیطہ کی اعظم قیمت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ بہت بڑا  
ہوتا ہے اگر وہ بہت چھوٹا ہو۔ لامتناہی وقت کے بعد اس حیطہ کی کیا  
قیمت ہوگی؟

[ یہ ایک نظام کے قسری ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے جبکہ نظام قاصر  
فاعلیت کے ساتھ ٹھک میں ہو اور دونوں میں نقصان دہ لگڑکی وجہ سے ہو۔  
نتیجہ سے یہ ظاہر ہے کہ اگر لگڑکی خفیف ہے تو قسری ارتعاش جلد بڑے  
ہو جاتے ہیں اگرچہ پچھلی مثال کی طرح لامتناہی نہیں ہو جاتے۔ بعض  
صور توں میں اس سے استفادہ کیا جاتا ہے۔ اگر بے تار تیلیگراف کے  
موصوفی آلے ہر ٹیزی امواج کے ساتھ لگاک میں نہ ہوں تو اثرات اس قدر  
ضعیف ہوں گے کہ ان کو شناخت کرنا مشکل ہوگا۔ ]

(۳۸) حل کرو  $\frac{فر}{فر} - ن = ۰$  (۳۷)

[ اس سے ایک پتلے انتصابی دھیرے کے جو تیز گردش  
میں ہو کسی حصہ کا جانبی ہٹاؤ معلوم ہوتا ہے، لایر رجسٹر حصہ کا انتصابی  
ارتعاع ہے ]  
(۳۹) اگر پچھلی مثال میں

$$\frac{فر}{فر} = م = ۰ \text{ جبکہ } لا = ۰ \text{ اور } لا = ل$$

ثابت کرو کہ

$$m = 6 \text{ (جم ن لا - جم ن لا) } + f \text{ (جب ن لا - جب ن لا)}$$

اور  $جم ن ل = 1$  [اس کا یہ مطلب ہے کہ دہرا دو نقطوں پر سہارا گیا ہے جن میں سے ایک دوسرے کے اوپر ل ارتفاع پر ہے اور دہرا ان نقطوں پر تکیا رہے پر مجبور ہے۔ آخری مساوات سے  $n$  معلوم ہو گا جبکہ  $l$  معلوم ہو] (۴۰) ثابت کرو کہ

$$\frac{فر ۳}{فر ۳} + \frac{فر ۲}{فر ۲} + \frac{فر ۱}{فر ۱} = ۰$$

کا تمام تفاعل ناقابل قدر ہو جاتا ہے جبکہ  $لا$  کافی طور پر بڑا ہو، لیکن

$$۰ = ۱ + \frac{فر ۲}{فر ۲} - \frac{فر ۳}{فر ۳}$$

کا تمام تفاعل لا انتہا بڑھتے ہوئے حیطہ کے ساتھ اہتزاز کرتا ہے۔ [اس نمونہ کی مساوات بھاپ ٹرین کے ماکم کی زاوی پر رفتار کے لیے تقریباً درست ہوتی ہے۔ پہلی مساوات گردش کی ایک قائم حرکت کے متناظر ہے اور دوسری جو فینڈ گی یا غیر قائم حرکت کے۔ دیکھو

Perry's "Steam Engine"

کا ضمیمہ ۱

(۴۱) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں

$$م \frac{فر ۲}{فر ۲} = وز - ھز \frac{فر ۱}{فر ۱}$$

$$م \frac{فر ۲}{فر ۲} = ھز \frac{فر ۱}{فر ۱}$$

کا عام حل جہاں  $م$ ،  $و$ ،  $ھ$  اور  $ز$  مستقل ہیں  
 $لا = (+ ب جم) (ست - ع)$

$$ما = \frac{و}{سہ} - ت + ج + ب جب (سہ ت - ع)$$

ہے جہاں  $سہ = \frac{م}{م}$  اور  $ا$  'ب' 'ج' 'عہ' اختیاری مستقل ہیں۔

اگر یہ دیا جائے کہ  $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{فرتا}{فرت} = لا = ما = ۰$  جبکہ  $ت = ۰$  تو ثابت کرو کہ یہ نل

$$لا = \frac{و}{سہ} - (۱ - جم سہ ت)$$

$$ما = \frac{و}{سہ} - (سہ ت - جب سہ ت) \text{ (خط تیسری کی نسبت)}$$

میں تحویل ہوتا ہے۔  
(۴۸) [ان مساواتوں سے کیمت م اور بار ز کے ایک ایسے جُسم کا

راستہ معلوم ہوتا ہے جو ایک بالائینفشتی نور سے منور جست کی منفی طور پر بار شدہ چادر سے سطح کے متوازی مقناطیسی میدان  $م$  کے تحت دفع ہوتا ہو۔ و، بار کی ہوئی سطح کی وجہ سے برقی حدت ہے۔ تجربہ سے لا کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کر کے ہرجے۔ جے تھا مسن نے  $\frac{۲}{سہ}$  کی قیمت معلوم کی اور اس سے نسبت  $\frac{۱}{۲}$  محسوب کی جاسکتی

ہے جبکہ و اور  $م$  معلوم ہوں۔ دیکھو (Phil. Mag.) جلد ۲۸ صفحہ ۵۴۷ ۱۸۹۹

(۴۲) اگر ہم زاد مساواتیں

$$ل = \frac{فرتا}{فرت} + \frac{فرتا}{فرت} + \frac{ع}{ج} = نر ب جم ب ت$$

$$ل = \frac{فرتا}{فرت} + \frac{فرتا}{فرت} + \frac{ع}{ج} = ۰$$



دی گئی ہوں جہاں  $ل$ ،  $ل$ ،  $م$ ،  $ج$ ،  $ج$ ،  $ن$  اور  $ب$  مستقل ہیں  
تو ثابت کرو کہ  $ع$  کی شکل

$ل$ ،  $ج$ ،  $ب$ ،  $ت$  +  $ل$ ،  $ج$ ،  $م$ ،  $ت$  -  $ع$  +  $ب$ ،  $ج$ ،  $ن$ ،  $ت$  -  $ب$  -  $ہ$   
اور  $ع$  کی شکل

$ل$ ،  $ج$ ،  $ب$ ،  $ت$  +  $ل$ ،  $ج$ ،  $م$ ،  $ت$  -  $ع$  +  $ب$ ،  $ج$ ،  $ن$ ،  $ت$  -  $ب$  -  $ہ$   
ہے جہاں

$$ل = \frac{ع}{س} ب ج، (ا - ب ج، ل،)$$

$$ل = \frac{ع م}{س} ب ج ج،$$

ک جملہ  $(ل، ل، - م)$ ،  $ج ج، ب$  -  $(ل ج، ل ج، ب + ا$  کو  
تعبیر کرتا ہے،  $م$  اور  $ن$  خاص محدود مستقل ہیں،  $ل$ ،  $ب$ ،  $ع$  اور  $ہ$   
اختیاری مستقل ہیں،  $ل$  کو  $ل$  کی رقوم میں اور  $ب$  کو  $ب$  کی رقوم  
میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ  $م$  اور  $ن$  حقیقی ہیں اگر  $ل$ ،  $ل$ ،  $م$ ،  $ج$ ،  $ج$  اور

$ج$  حقیقی اور مثبت ہوں، اور  $ل$ ،  $ل$ ،  $م$ ،  $ج$ ،  $ج$ ،  $ن$ ،  $ت$  -  $ب$  -  $ہ$   
[ان مساواتوں سے ایک تبدل میں ابتدائی اور ثانوی رقومیں  
 $ع$  اور  $ع$  معلوم ہوتی ہیں جبکہ دوسروں میں گنجائش  $ج$  اور  $ج$  کے مکشفے  
ہوں -  $ل$  اور  $ل$  ذاتی امالہ کی قدریں ہیں اور  $م$  باہمی امالہ کی قدریں  
مذاہمتوں کو (جو بالعموم بہت خفیف ہوتی ہیں) نظر انداز کیا گیا ہے۔

نہ جب ہر ابتدائی رُو کی عاملہ قوت محرکہ برق ہے]

ہمزاد مساواتوں کے لیے متبادل طریقے۔ مثال ۳

صفحہ (۷۹) میں مامعلوم کر لینے کے بعد ہم ی کو بغیر عمل تکمل کے اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ دی ہوئی مساواتوں پر علی الترتیب عفف اور (عفف + ۲) سے عمل کریں اور تفریق کریں۔ اگر عفف میں کوئی دو کثیر رقمی ف (عفف) اور فا (عفف) ڈکے گئے ہوں اور ان میں کوئی مشترک جزو ضربی جس میں عفف ہو موجود نہ ہو تو ہم دوسرے ایسے کثیر رقمی فہ (عفف) اور سا (عفف) معلوم کر سکتے ہیں کہ

فہ (عفف) ف (عفف)۔ سا (عفف) فا (عفف) = ۱

(دیکھو سمتیہ کا جبر و مقابلہ دفعہ ۱۰۰)

سادہ صورتوں میں ہم فہ (عفف) اور سا (عفف) کو صرف

معائنہ سے ہی معلوم کر سکتے ہیں۔

ہم مثال ۳ کی دی ہوئی مساواتوں کی بجائے ان کا مجموعہ اور فرق رکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مثال ۴ میں عمل کر کے ہم ما + ی اور ما۔ ی کو نئے متغیروں کے طور پر لے سکتے ہیں۔



# چوہنشاہ

(۴۹)

## سادہ تفرقی مساواتیں

۴۱۔ اس باب میں حسب ذیل اور پر غور کیا جائے گا: جزئی تفرقی مساواتیں کس طرح پیدا ہوتی ہیں، سادہ خاص حل کس طرح حاصل کئے جاسکتے ہیں، اور ان خاص حلوں کے لامتناہی سلسلوں کے ذریعہ زیادہ دقیق اور مشکل حل کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ نیز فوریہ کے سلسلہ کا استعمال سمجھایا جائیگا جس سے ایسے دقیق اور مشکل حل دی ہوئی شرطوں کو پورا کر سکیں گے۔

اس باب میں جن مساواتوں پر غور کیا گیا ہے ان میں وہ مساواتیں شامل ہیں جو حرارت کے ایصال، دھڑیوں کے ارتعاش، برقی سکونیات، تہاذب، ٹیلیفون، برقی مقناطیسی موجوں، اور محلولوں کے نفوذ کے مسئلوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ زیادہ تر یولر، ڈلمبرٹ، اور لگرائج کے طریقے استعمال کئے گئے ہیں۔

۱۸۱۳ء تا ۱۸۳۶ء (باشذہ یورن) نے لگرائج (باشذہ یورن) نے ریاضی دان گذرا ہے اس نے ریاضی کی ہر شاخ میں بڑے بڑے اضافے کئے۔ تغیرات کے علم الاحصا کی بنیاد اس نے ڈالی اور جزئی تفرقی مساواتوں کے مضمون میں بڑی توسیع کی۔ نیز نظری علم بحیل اور صغاری احصاء کو بڑی ترقی دی۔

## ۴۲۔ اختیاری تفاعلوں کا استقاط۔

پہلے باب میں ہم یہ بتلا چکے ہیں کہ اختیاری مستقلوں کے استقاط سے معمولی تفرقی مساواتیں کس طرح بنائی جاتی ہیں۔ جزئی تفرقی مساواتوں کو اختیاری تفاعلوں کے استقاط سے اکثر بنایا جاسکتا ہے۔

مثال (۱)  $ما = ف(لا - ا ت) + فا(لا + ا ت) \dots (۱)$  سے اختیاری تفاعلوں  $ف$  اور  $فا$  کو ساقط کرو۔

$$\frac{جف}{جف لا} = ف(لا - ا ت) + فا(لا + ا ت)$$

$$\text{اور} \quad \frac{جف^۲}{جف لا^۲} = ف^۲(لا - ا ت) + فا^۲(لا + ا ت) \dots (۲)$$

$$\text{اسی طرح} \quad \frac{جف}{جف ت} = -ا ت(لا - ا ت) + ا فا(لا + ا ت)$$

$$\text{اور} \quad \frac{جف^۲}{جف ت^۲} = ا^۲ ت^۲(لا - ا ت) + ا^۲ فا^۲(لا + ا ت)$$

(۲) اور (۳) سے

$$\frac{جف^۲}{جف لا^۲} = \frac{ا}{ا^۲} \frac{جف^۲}{جف ت^۲} \dots (۳)$$

یہ دوسرے رتبہ کی جزئی تفرقی مساوات ہے۔

$$\text{مثال (۲)} \quad ی = ف\left(\frac{ا}{لا}\right)$$

لے یہ مساوات ایک تہی ہوئی دُوری کے عرضی ارتعاشوں کے لئے صادق آتی ہے۔ اس کا عام ترین حل مساوات (۱) ہے جو دو موجوں کو تعبیر کرتی ہے جو رفتار  $ا$  سے حرکت کر رہی ہیں جن میں سے ایک دائیں جانب اور دوسری بائیں جانب۔

سے اختیاری تفاعل ف کو ساقط کرو۔

$$\text{جفی} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \frac{\text{ف}}{\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)}$$

$$\text{جفی} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \frac{\text{ا}}{\text{لا}} - \frac{\text{ف}}{\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)} \quad \text{اور}$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{لا جفی} + \text{ما جفی} = \frac{\text{جفی}}{\text{جفی}} = ۱$$

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری تفاعلوں کو ساقط کرو:

$$(۱) \quad \text{ی} = \text{ف} (\text{لا} + \text{ا} + \text{ما})$$

$$(۲) \quad \text{ی} = \text{ف} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) + \text{فا} (\text{لا} - \text{خ} + \text{ما}) \quad \text{جہاں } \text{خ} = ۱ - \text{ا}$$

$$(۳) \quad \text{ی} = \text{ف} (\text{لاجم} + \text{ع} + \text{ماجم} + \text{ع} - \text{ا} + \text{ت}) + \text{فا} (\text{لاجم} + \text{ع})$$

$$(۴) \quad \text{ی} = \text{ف} (\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲) + \text{ماجم} + \text{ع} + \text{ا} + \text{ت}$$

$$(۵) \quad \text{ی} = \text{ف} (\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ف}) (\text{لا} - \text{ب} + \text{ما})$$

$$(۶) \quad \text{ی} = \text{لا}^۲ \text{ف} \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

### ۴۳۔ اختیاری مستقلوں کا اسقاط۔

ہم پہلے باب میں دیکھ چکے ہیں کہ اختیاری مستقلوں کو معمولی تفرقی مساواتوں کے ذریعہ کس طرح ساقط کیا جاسکتا ہے۔ یہ جزئی تفرقی مساواتوں کے ذریعہ بھی کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{مثال (۱)} \quad \text{ی} = \text{ا} + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} + \text{ب} + \text{لا}$$

سے ۱ اور ب کو ساقط کرو۔

$$\therefore \frac{\text{جفی}^2}{\text{جفت}^2} = \text{ب}^2 \text{ ۱ قوت جب ب لا}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{جفی}^2}{\text{جفت}^2} = \text{ب}^2 \text{ ۱ قوت جب ب لا}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{جفی}^2}{\text{جفت}^2} + \frac{\text{جفی}^2}{\text{جفت}^2} = 0$$

مثال (۲) ی = ۱ (لا + ما) + ب (لا - ما) + ۱ ب ت + ج  
سے ۱ ب، اور ج کو ساقط کرو۔

$$\frac{\text{جفی}}{\text{جفت}} = ۱ + ب$$

$$\frac{\text{جفی}}{\text{جفت}} = ۱ - ب$$

$$\frac{\text{جفی}}{\text{جفت}} = ۱ ب$$

(۵۱)

$$\text{لیکن} \quad (۱ + ب)^2 - (۱ - ب)^2 = ۴ ۱ ب$$

$$\text{اس لیے} \quad \left(\frac{\text{جفی}}{\text{جفت}}\right)^2 - \left(\frac{\text{جفی}}{\text{جفت}}\right)^2 = ۴ \frac{\text{جفی}}{\text{جفت}}$$

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

$$(۱) \quad ی = ۱ قوت ب ت + جم ب لا$$

$$(۲) \quad ی = ۱ قوت جم ق لا جب ر ما، جہاں ب = ق + ر$$

$$(۳) \quad ی = ا + لا + (ا - ا) + ما + ب$$

$$(۴) \quad ی = ا + لا + ب + ما + ا' + ب'$$

$$(۵) \quad ی = (ا - لا) + (ا - ب) + ب'$$

$$(۶) \quad ی + ب = ا + لا + ما$$

## ۴۴۔ جزئی تفرقی مساواتوں میں خاص مشکلیں۔

ہم پہلے باب میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ ن ویں رتبہ کی ہر معمولی تفرقی مساوات کے متعلق یہ سمجھا جاسکتا ہے کہ وہ ایک ایسے حل سے ماخوذ ہوتی ہے جس میں ن اختیاری مستقل ہوتے ہیں۔ اس سے شاید یہ فرض کر لیا جائے کہ ن ویں رتبہ کی ہر جزئی تفرقی مساوات بھی اسی طرح ایک حل سے جس میں ن اختیاری تفاعل شامل ہوں اخذ پذیر ہے۔ لیکن یہ صحیح نہیں ہے۔ عام طور پر یہ ناممکن ہے کہ ن اختیاری تفاعلوں کے حاصل اسقاط کون ویں رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے طور پر بیان کیا جائے۔ اس سے اعلیٰ تر رتبہ کی مساوات مطلوب ہوتی ہے اور نتیجہ یکساں نہیں ہوتا۔

اس باب میں صرف خاص حلوں کو معلوم کرنے پر اکتفا کیا جائیگا۔

۱۔ آئندہ (پچھا باب) یہ بتلایا جائیگا کہ بعض مستثنیٰ صورتوں میں معمولی تفرقی مساوات کے نادر حل ہوتے ہیں جو اس حل کے علاوہ ہوتے ہیں جس میں اختیاری مستقل ہوا کرتے ہیں۔ یہ نادر حل معمولی حل سے ان مستقلوں کو مخصوص قیمتیں دیکر اخذ نہیں کئے جاسکتے اور وہ بالکل مختلف شکل کے ہوتے ہیں۔

Differential Calculus دفعات

۲۔ دیکھو ایڈورڈ کی کتاب

Differential Calculus

۵۱۲ اور ۵۱۳ یا ولیم سن کی کتاب

دفعہ ۳۱۷۔

ان کے ذریعہ ہم ان مسئلوں کو حل کر سکیں گے جو طبعیاتی مساواتوں میں بالعموم وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ ہمیں اس امر کا اعتراف ہے کہ ہم عام ترین حل معلوم کرنے کے ناقابل ہیں لیکن ہماری اس ناقابلیت کا بڑا کچھ اس خیال سے ہو جاتا ہے کہ ان صورتوں میں جنہیں عام ترین حل معلوم کئے جا چکے ہیں یہ انتہائی مشکل ہے کہ ان کو کسی مخصوص مسئلہ پر استعمال کیا جائے۔

۲۵۔ سادہ خاص حل۔

(۵۲)

$$\text{مثال (۱) مساوات} \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{1}{2} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف}^2 \text{ت}}$$

۳۔ عالم طبیعیات ممکن ہے یہ سمجھ لے کہ ہر ایسے مسئلہ کا ایک حل ہوتا ہے اور مزید بریں ایسا لگتا ہے ہوتا ہے لیکن نظری ریاضیات میں ان میں سے پہلے واقعہ کا ثابت کرنا بہت مشکل ہے، اس کا ثبوت حال ہی میں تکمیلی مساواتوں کے نظریہ کی مدد سے دیا گیا ہے [دیکھو ہیوڈ اور فریشا کی کتاب

(L' Equation de Fredholm et ses applications à la Physique Mathématique)

۴۔ مثلاً اوہٹیکر نے یہ ثابت کیا ہے کہ لاپلاس کی مساوات

$$0 = \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ی}}$$

کا حل  $\nabla^2 \phi = 0$  (لاجمت + ماجبت + خری) ت فرت ہے۔

لیکن اگر ہم ایسا حل معلوم کرنا چاہیں جو ایک دی ہوئی سطح پر بعض خاص شرطوں کو پورا کرے تو ہم بالعموم وہ حل استعمال کرتے ہیں جو ایک لامتناہی سلسلہ کی شکل میں ہوتا ہے۔



پر غور کرو (اس سے حرارت کا ایصال ایک بعد میں معلوم ہوتا ہے)۔  
یہ مساوات خطی ہے۔ اب معمولی خطی مساواتوں کی بحث میں ہم نے  
قوت نماؤں کو بہت مفید پایا ہے۔ چنانچہ مساوات بالا کا آزمائشی  
حل  $Y = M + N$  ہے۔ تفرقی مساوات میں درج کرنے پر

$$M + N = \frac{1}{2} N + N$$

حاصل ہوتا ہے جو درست ہے اگر  $N = M + 1$   
پس  $M + N = M + 1$  ایک حل ہے۔

$M$  کی علامت بدلنے پر  $M + N = 0$  بھی ایک حل ہے۔

مثال (۲) بالا پر کی مساوات کا وہ حل معلوم کرو جو معدوم ہو  
جبکہ  $t = -\infty$ ۔

پچھلے حل میں  $t$ ،  $M + N$  میں واقع ہے۔ یہ ت کے ساتھ  
بڑھتا ہے کیونکہ  $M$  مثبت ہے اگر  $M$  اور  $N$  حقیقی ہوں۔  $M + N$   
کو گھٹانے کے لئے  $M = 0$  رکھو تو  $M = 0$ ۔  $M + N = 0$  چنانچہ اس سے  
حل  $M = 0$ ۔  $M + N = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح  $M = 0$ ۔  $M + N = 0$   
بھی ایک حل ہے۔

پس چونکہ تفرقی مساوات خطی ہے اسلئے تو  $(M + N)$   $M = 0$ ۔  $M + N = 0$   
ایک حل ہے جس کی بجائے ہم حسب معمول  
تو  $M = 0$  (ع جم پ لا + ف جب پ لا)

رکھتے ہیں -

مثال (۳)  $\frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} = \text{سادہ حل معلوم کرو جو معدوم}$   
 ہو جبکہ  $\infty + =$  اور نیز جبکہ  $\infty =$ ۔

ی =  $\text{قو}^2 \text{ لا} + \text{ن}^2 \text{ ما}$  رکھنے سے  $(\text{م}^2 + \text{ن}^2) \text{ قو}^2 \text{ لا} =$  حاصل ہوتا ہے اس لیے  $\text{م}^2 + \text{ن}^2 =$ ۔

وہ شرط جبکہ  $\infty + =$  اس امر کی متقاضی ہے کہ  $\text{ن}$  حقیقی اور منفی ہو، فرض کرو  $\text{ن} = -\text{پ}$  تب  
 $\text{م} = \pm \text{خ}$

اس لیے  $\text{قو}^2 \text{ لا} (\text{قو}^2 \text{ لا} + \text{ب} \text{ قو}^2 \text{ پ})$  ایک حل ہے

یعنی  $\text{قو}^2 \text{ لا} (\text{ع} \text{ جم} \text{ پ} \text{ لا} + \text{ف} \text{ جب} \text{ پ} \text{ لا})$  ایک حل ہے  
 لیکن  $\text{ی} = 0$  اگر  $\text{لا} = 0$ ، اس لیے  $\text{ع} = 0$ ۔

اس لیے مطلوبہ حل  $\text{ف} \text{ قو}^2 \text{ لا}$  جب  $\text{پ} \text{ لا} =$  ہے۔

### حل طلب مثالیں

$$(۱) \frac{\text{جف}^2 \text{ ما}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} = \frac{\text{جف}^2 \text{ ما}}{\text{جف}^2 \text{ ت}} \text{ اگر یہ دیا گیا ہو کہ } \text{ما} = \text{جبکہ } \text{لا} = \infty$$

اور نیز جبکہ  $\infty + =$ ۔

$$(۲) \frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} = \frac{1}{\frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}} \text{ اگر یہ دیا گیا ہو کہ } \text{ی} (\text{لا یا ما})$$

کی کسی حقیقی قیمتوں کے لیے (بکسی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ  $\text{ی} = 0$  جبکہ  $\text{لا} = 0$  یا  $\text{ما} = 0$ ۔

$$(۳) \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + ۱ = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \quad \text{اگر یہ دیا گیا ہو کہ ی کبھی بھی}$$

لا متناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۰$  جبکہ لا = ما = ۰

$$(۴) \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}} \quad \text{اگر یہ دیا گیا ہو کہ}$$

و = ۰ جبکہ لا = ۰ جبکہ ما = ۰ اور نیز جبکہ ی = ۰

$$(۵) \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ما}} \quad \text{اگر یہ دیا گیا ہو کہ و کبھی بھی لا متناہی}$$

نہیں ہوتا اور یہ کہ و = ج اور  $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} = ۰$  جبکہ لا = ما = ی = ۰

$$(۶) \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} \quad \text{اگر یہ دیا گیا ہو کہ و = ۰}$$

جبکہ ت = ۰ جبکہ لا = ۰ یا ل اور جبکہ ما = ۰ یا ل

۴۶۔ زیادہ پیچیدہ ابتدائی اور حدودی شرطیں۔

دفعہ ۴۵ کی مثال (۳) میں

$$= \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$$

کا ایک حل ف تو پتا جب پ لا حاصل ہوا ہے جو ان شرطوں کو پورا کرتا ہے

۱۔ چونکہ ت سے بالعموم وقت تغیر ہوتا ہے اور لا اور ما سے قائم محدود اس لیے وہ شرط کہ ی = ۰ جبکہ ت = ۰ ابتدائی شرط کہلاتی ہے اور وہ شرط کہ ی = ۰ اگر لا = ۰ یا ما = ۰ حدودی شرط کہلاتی ہے۔

ی = ۰۔ اگر  $1 = + \infty$  یا اگر  $0 =$ ۔  
اب فرض کرو کہ ہم دو زائد شرطیں عائد کرتے ہیں مثلاً  $ی = ۰$ ۔ اگر  
 $لا = ل$ ، اور  $ی = ل$ ۔  $لا$ ۔ اگر  $ما = ۰$ ،  $لا$  کی ان تمام قیمتوں کے لئے  
جو صفر اور ل کے درمیان ہیں۔

پہلی شرط سے حاصل ہوتا ہے جب  $پ = ل$ ۔  
یعنی  $پ = ل = ن$  جہاں  $ن$  کوئی صحیح عدد ہے۔  
سہولت کے منظر ہم اول  $ل = ن$  لیں گے جس سے  $پ = ن$   
حاصل ہوتا ہے یعنی ایک صحیح عدد۔

دوسری شرط سے  $ف$  جب  $پ = لا = ن$ ۔  $لا$  کی ان تمام  
قیمتوں کے لئے جو صفر اور  $ن$  کے درمیان ہیں۔ یہ ناممکن ہے۔  
تاہم اس عمل کی بجائے جس میں صرف ایک رقم ہے ہم حسب  
ذیل حل دے سکتے ہیں:

$ف$  جب  $لا + ف$  جب  $۲ + ف$  جب  $۳ + ف$  جب  $۳ + لا + \dots$   
کیونکہ مساوات غلطی ہے (اگر یہ واضح نہ ہو تو دیکھو تیسرا باب دفعہ ۲۵)۔  
 $پ$  کو قیمتیں  $۱$ ،  $۲$ ،  $۳$ ، ... دیکھی ہیں اور نتیجوں کو جمع کیا گیا ہے۔  
 $ما = ۰$  رکھنے اور کل جملہ کو  $ن$ ۔  $لا$  سے مساوی رکھنے سے  
حاصل ہوتا ہے

$ف$  جب  $لا + ف$  جب  $۲ + ف$  جب  $۳ + لا + \dots$   
 $ن = لا$ ۔  $لا$  صفر اور  $ن$  کے درمیان  $لا$  کی تمام  
قیمتوں کے لیے۔

۱۔ یہ مسئلہ دھات کی ایک نیم لا متناہی مستطیلی پٹی میں حرارت کی ایکساں تقسیم  
کا ہے جبکہ لا متناہی اضلاع صفر درجہ حرارت پر اور قاعدہ (ا۔ لا۔ لا)۔  
حرارت پر رکھے گئے ہوں جہاں  $ل$  مستطیلی پٹی کا عرض ہے۔

ممکن ہے طالب علم یہ خیال کرے کہ یہ مساوات اتنی ہی ناممکن ہے جتنی دوسری لیکن یہ ایک اہم واقعہ ہے کہ ہم ف کی ایسی قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ درست ہو جائے۔  
یہ ایک زیادہ عام مسئلہ کی جس کو اب ہم بیان کریں گے ایک مخصوص صورت ہے۔

۴۷ - فوریر کے نیم سعت سلسلے - لا کا ہر وہ تفاعل جو (۵۴)

بعض خاص شرطوں کو پورا کرے شکل  
ف (لا) = ۱ جب لا + ۱ جب ۲ لا + ۱ جب ۳ لا + ... لاتنا ہی تک  
لے ایک مستحق سلسلے میں، صفر اور ۱ کے درمیان نا کی تمام قیمتوں کے لیے (لیکن  
ضروری نہیں کہ انتہائی قیمتوں لا = ۰ اور لا = ۱ کے لیے پھیلا یا جاسکتا ہے۔  
اس کو فوریر کا نیم سعت جیبی سلسلہ کہتے ہیں۔  
اوپر جن شرطوں کا اشارہ کیا گیا ہے وہ ہر طبیعی سوال میں عملاً  
پوری ہوتی ہیں۔  
اسی طرح ان ہی شرطوں کے تحت ف (لا) کو نیم سعت جیب التمامی  
سلسلے  
ب + ب جم لا + ب جم ۲ لا + ب جم ۳ لا + ..... لاتنا ہی تک  
میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

۱۷ جوزف فوریر (۱۷۶۸ تا ۱۸۳۰ء) "La Theorie analytique de la chaleur"  
کے مصنف کی حیثیت میں بہت معروف ہے۔ اس کا متذکرہ صدر سلسلہ حرارت کے ایصال  
کے مسئلوں کو حل کرنے میں پیدا ہوا۔  
۱۸ یہ کافی ہے کہ ف (لا) 'واحدیتی' محدود اور مسلسل ہو اور لا = ۰ اور لا = ۱  
کے درمیان اس کی اعظم اور اقل قیمتوں کی تعداد محدود ہو۔ لیکن یہ شرطیں ضروری نہیں  
ہیں۔ ضروری اور کافی شرطوں کا جب تک انکشاف نہیں ہوا۔

ان سلسلوں کو ان سلسلوں کے مقابلہ میں جو صفر اور ۲۲ کے درمیان صادق آتے ہیں اور جن میں جیب اور جیب التمام دونوں رٹیں شامل ہوتی ہیں ہم سب سے پہلے کہتے ہیں۔ لیکن یہ تسلیم کر لینے کے بعد کہ یہ پھیلاؤ ممکن ہیں سرور کی قیمتیں معلوم کرنا آسان ہے۔ جیبی سلسلہ کو جب ن لا سے ضرب دو اور رقم بہ رقم حاصل کرو تو حاصل ہوگا۔

ن کی ف (لا) جب ن لا فرلا

$$= 1 \text{ ن کی جب لا جب ن لا فرلا} + 1 \text{ ن کی جب ۲ لا جب ن لا فرلا} + \dots$$

وہ رقم جس میں ن جزو ضربی ہے

ن کی جب ن لا فرلا

$$= \frac{1}{2} \text{ ن کی (۱-جم ۲ ن لا) فرلا}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ن کی [لا - } \frac{1}{2} \text{ جب ۲ ن لا]} \text{ فرلا}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ن کی}$$

ہے۔

(۵۵) وہ رقم جس میں کوئی دوسرا سر مثلاً ۱ شامل ہے

۱ فوریر کے سلسلوں پر پوری بحث حسب ذیل کتابوں میں ملے گی

Hobson's "Theory of Functions". (۲) Carlaw's Fourier's series and (۱) Integrals

۱۰۵ یہ فرض کر لینا کہ ایسا کرنا جائز ہے بحث طلب ہے۔







اور  $f(\lambda) = m(\lambda - \lambda_1) \dots \lambda_n$  اور  $\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_n$  کے درمیان

اس صورت میں  $f(\lambda)$  سمت کے مختلف حصوں میں مختلف  
تحلیلی جملوں سے حاصل ہوتا ہے۔ صرف جدت مکملوں کی قیمتیں معلوم  
کرنے میں ہے۔

$$f(\lambda) = m(\lambda - \lambda_1) \dots \lambda_n \quad \text{جب } \lambda = \lambda_1$$

$$+ m(\lambda - \lambda_1) \dots \lambda_n \quad \text{جب } \lambda = \lambda_2$$

$$= m(\lambda - \lambda_1) \dots \lambda_n + m(\lambda - \lambda_1) \dots \lambda_n \quad \text{جب } \lambda = \lambda_3$$

کام کا باقی حصہ ہم طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔ نتیجہ ہے

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \dots \quad \text{جب } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

طالب علم کو دئے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچی یا ہے اور پھر اسکا  
مقابلہ اس ترسیم سے کرنا چاہئے جو مندرجہ بالا پھیلاؤ کی پہلی رقم کی اور پہلی  
دو رقموں کے مجموعہ کی ہے۔

۱۔ فوریہ کا سلسلہ اسوقت بھی اطلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ  $f(\lambda)$  کی ترسیم دی گئی ہو اور کوئی  
تحلیلی جملہ معلوم نہ ہو بشرطیکہ دفعہ ۱۰۸ کے ضمن میں دی ہوئی شرطیں پوری ہو جائیں۔  
جب کسی تفاعل کی ترسیم دیکھائی ہے تو مکملے حسابی عمل تقریب سے معلوم کئے  
جاتے ہیں یا اس آلہ کے ذریعہ جس کو موسیقی محمل Harmonic Analyser کہتے ہیں۔

۲۔ متعدد ترتیبیں کا سلسلہ کی کتاب Fourier's Series and Integrals کے ساتویں باب میں  
طیس ٹی۔ نیز Phil. Mag. جلد ۴۴ (۱۹۰۵ء) میں بھی برقی عدد ترتیبیں دی گئی ہیں۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفاعلوں کو نیم سخت جیسی سلسلوں میں پھیلاؤ جو لا = اور لا =  $\pi$  کے درمیان درست ہوں :-

$$\begin{array}{llll} (۱) ۱ & (۲) لا & (۳) لا^۳ & (۴) جم لا \\ (۵) نو^۲ & (۶) ف(لا) = لا^۲ & لا^۳ = لا^۲ & لا^۳ = لا^۲ \end{array}$$

$$لا = \frac{\pi^۳}{\pi} تا \pi^۳$$

$$ف(لا) = (لا - لا^۲)(\pi - \pi^۳) = لا^۳ - لا^۲ = لا^۳ - لا^۲$$

(۷) ان میں سے کون سے جملے (۱) لا = کے لیے (ب) لا =  $\pi$  کے لیے

درست ہیں۔

۴۹۔ حدود کی شرطوں کو پورا کرنے میں فوریر کے سلسلہ

کا اطلاق۔

اب ہم دفعہ ۲۶ کے مسئلہ کے حل کی تکمیل کر سکتے ہیں۔  
ہمیں دفعہ ۲۶ میں معلوم ہوا کہ

$$ف_۱ قو جب لا + ف_۲ قو جب لا^۲ + ف_۳ قو جب لا^۳ + \dots$$

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور  $\pi$  کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$ف_۱ جب لا + ف_۲ جب لا^۲ + ف_۳ جب لا^۳ + \dots = لا^۳ - لا^۲$$

دفعہ ۲۸ کی مثال (۱) میں ہمیں معلوم ہوا کہ صفر اور  $\pi$  کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

$$\frac{۵}{\pi} (جب لا + \frac{۱}{۱۲} جب لا^۳ + \frac{۱}{۱۲۵} جب لا^۵ + \dots) = لا^۳ - لا^۲$$

اور  $f(\lambda) = m(\pi - \lambda)$  اور  $\frac{\pi}{2} = \lambda$  کے درمیان

اس صورت میں  $f(\lambda)$  سعت کے مختلف حصوں میں مختلف تجلیلی جملوں سے حاصل ہوتا ہے۔ صرف جدت تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں ہے۔

چنانچہ

$$f(\lambda) = m(\pi - \lambda) \quad \text{جب } \lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$+ f(\lambda) = m(\pi - \lambda) \quad \text{جب } \lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$= m(\pi - \lambda) + m(\pi - \lambda) \quad \text{جب } \lambda = \frac{\pi}{2}$$

کام کا باقی حصہ ہم طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔ نتیجہ ہے

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{4} \text{ جب } \lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} \text{ جب } \lambda = \frac{\pi}{5} + \frac{1}{6} \text{ جب } \lambda = \frac{\pi}{6} + \dots \right)$$

طالب علم کو دئے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچی جائے اور پھر اسکا مقابلہ اس ترسیم سے کرنا چاہئے جو مندرجہ بالا پھیلاؤ کی پہلی رقم کی اور پہلی دو رقموں کے مجموعہ کی ہے۔

یہ فویر کا سلسلہ اسوقت بھی احاطہ پذیر ہوتا ہے جبکہ  $f(\lambda)$  کی ترسیم دی گئی ہو اور کوئی تجلیلی جملہ معلوم نہ ہو بشرطیکہ دفعہ ۴ م کے ضمن میں دی ہوئی شرطیں پوری ہو جائیں۔ جب کسی تفاعل کی ترسیم دیجاتی ہے تو تکلیف حسانی عمل تقرب سے معلوم کئے جاتے ہیں یا اس آلہ کے ذریعہ جس کو کوئی تجلیلی جملہ

Harmonic Analyser کہتے ہیں۔

یہ متعدد ترین کالکولس کی کتاب Fourier's Series and Integrals کے ساتویں باب میں

میں ہے۔ نیز Phil. Mag. جلد ۴۹ (۱۸۹۷ء) میں بھی ٹری موڈ ترسیم دی گئی ہیں۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفاعلوں کو نیم سعت جیبی سلسلوں میں پھیلاؤ جو لا =  
اور لا =  $\pi$  کے درمیان درست ہوں :-

$$(۱) ۱ \quad (۲) لا \quad (۳) لا^۳ \quad (۴) جم لا$$

$$(۵) لا^۵ \quad (۶) ف(۷) = لا^۵ - لا^۴ = لا^۴(لا - ۱) \quad (۸) لا^۴ - لا^۳ = لا^۳(لا - ۱) \quad (۹) لا^۳ - لا^۲ = لا^۲(لا - ۱) \quad (۱۰) لا^۲ - لا = لا(لا - ۱)$$

$$لا^۴ - لا^۳ = لا^۳(لا - ۱)$$

$$ف(۷) = لا^۴(لا - ۱) = لا^۴(لا - ۱) = لا^۴(لا - ۱) = لا^۴(لا - ۱)$$

(۷) ان میں سے کون سے جملے (۱) لا = کے لیے (ب) لا =  $\pi$  کے لیے

درست ہیں -

۲۹ - حدود کی شرطوں کو پورا کرنے میں فوریر کے سلسلہ

کا اطلاق -

اب ہم دفعہ ۲۶ کے مسئلہ کے حل کی تکمیل کر سکتے ہیں -  
ہمیں دفعہ ۲۶ میں معلوم ہوا کہ

$$ف(۱) جب لا = ۱ \quad ف(۲) جب لا = لا \quad ف(۳) جب لا = لا^۲ \quad ف(۴) جب لا = لا^۳ \quad ف(۵) جب لا = لا^۴ \quad ف(۶) جب لا = لا^۵$$

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صغور  $\pi$  کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$ف(۱) جب لا = ۱ \quad ف(۲) جب لا = لا \quad ف(۳) جب لا = لا^۲ \quad ف(۴) جب لا = لا^۳ \quad ف(۵) جب لا = لا^۴ \quad ف(۶) جب لا = لا^۵$$

دفعہ ۲۶ کی مثال (۱) میں ہمیں معلوم ہوا کہ صغور  $\pi$  کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\frac{۱}{\pi} (جب لا = ۱ + \frac{۱}{۱۲۵} جب لا = لا^۵ + \dots) = لا^۵ - لا$$

پس مطلوبہ حل

$$\frac{1}{n} \left( \text{قو جب } \frac{1}{24} + \text{قو جب } \frac{1}{125} + \dots + \text{قو جب } \frac{1}{125} \right)$$

۵۰۔ اُس صورت میں جبکہ حدود کی شرط میں  $n$  کی بجائے  $l$  ہو ہم دیکھ چکے ہیں کہ تفرقی مساوات کا ایک حل  $\text{قو جب } \frac{1}{n}$  ہے اور شرطوں سے یہ معلوم ہوا کہ  $b$  ایک مثبت صحیح عدد نہیں ہے بلکہ اس کی شکل  $\frac{n}{n}$  ہونی چاہئے۔

چنانچہ  $\text{قو جب } \frac{1}{n} + \text{قو جب } \frac{1}{n^2} + \dots + \text{قو جب } \frac{1}{n^r}$  تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور  $l$  کے درمیان  $l$  کی تمام قیمتوں کے لیے

$\text{قو جب } \frac{1}{n} + \text{قو جب } \frac{1}{n^2} + \dots + \text{قو جب } \frac{1}{n^r} = l - l$   
 رکھو  $\frac{1}{n} = y = \text{قو جب } \frac{1}{n} - l = \frac{1}{n} (y - y^2) - (y^2 - y)$ ۔ اس طرح تمام  $y$  پہلے کی نسبت  $\frac{1}{n}$  گنا ہیں۔ اس لیے حل ہے

$$\frac{1}{n} \left( \text{قو جب } \frac{1}{24} + \text{قو جب } \frac{1}{125} + \dots + \text{قو جب } \frac{1}{125} \right) + \dots$$

## چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۱) تصدیق کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{و}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ک}} \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{و}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ت}}$$

کا ایک حل و =  $\frac{1}{\text{ک}}$  تو ہنگت ہے۔

(۲) و = ۱ تو جب (۲ ب ک ت ب لا) سے (۱ اور ب کو ساقط کرو۔

(۳)  $\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{و}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ت}} = \frac{\text{ک}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}$  - و میں و = تو ط رکھ کر اسکو

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ط}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ت}} = \frac{\text{ک}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}}$$

میں تحویل کرو۔

[پہلی مساوات سے ایک موصل سلاخ کی تپش معلوم ہوتی ہے جبکہ سلاخ کی سطح ہوا میں جو صفر تپش پر ہو حرارت کا اشعاع کر رہی ہو۔]

(۴)  $\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{و}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ت}} = \frac{\text{ک}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{و}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ر}} \left( \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{و}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ر}} \right)$  میں ط = ر اور رکھ کر

اُس کو

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ط}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ت}} = \frac{\text{ک}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{لا}} \frac{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ط}}{\text{جف}^{\text{ا}} \text{ر}}$$

میں تحویل کرو۔

[پہلی مساوات سے ایک کرہ کی تپش معلوم ہوتی ہے جبکہ حرارت نصف قطری سمت میں بہ رہی ہو]

$$(۵) \quad \frac{1}{r} = [f(-1, t) + f(1, t)]$$

(۵۸)

سے اختیاری تفاعلوں کو ساقط کرو۔

$$(۶) \quad (A) \text{ ثابت کرو کہ اگر } f \text{ م لا + خن ت ، مساوات}$$

$$\frac{f}{f_t} = \frac{f}{f_t} - \frac{f}{f_t}$$

کا ایک مل ہو تو م کو ملتف ہونا چاہئے جہاں ن اور ل حقیقی ہیں۔

$$(۲) \text{ پس م} = \text{گ۔ خ ف رکھ کر ثابت کرو کہ } f \text{ و } f \text{ جب (ن ت۔ فلا)}$$

ایک مل ہے جو لا =۔ کے لیے و جب ن ت میں تحویل ہوتا ہے بشرطیکہ

$$\text{ک (گ۔ ف)} = \text{م اور ن} = \text{ن ک ف گ۔}$$

$$(۳) \text{ اگر } f = 0 \text{ جبکہ لا} = \infty \text{ تو ثابت کرو کہ اگر ک اور ن مثبت}$$

ہوں تو گ اور ف بھی مثبت ہونگے۔

[انجسٹرام (Angstrom) کے اُس طریقہ میں جو ک (نفوذیت)

کی پیمائش کے لیے ہے ایک بہت ہی لمبی سلاخ کا ایک سیرا پیش

و جب ن ت کی دوری تبدیلی کے تحت ہوتا ہے۔ اس کی وجہ سے حرارت

کی موجیں سلاخ کی سمت میں اس پر سفر کرتی ہیں۔ ان کی رفتار اور شرح

انحراف کی پیمائش کر کے ن اور گ کو معلوم کیا جاتا ہے۔ ک کو پھر

$$\text{ک} = \frac{n}{f} \text{ سے محسوب کیا جاتا ہے۔}$$

$$(۷) \quad \frac{f}{f_t} = \frac{f}{f_t} - \frac{f}{f_t} \text{ کا مل معلوم کرو جو لا} = 0 \text{ کے لیے}$$

و جب ن ت میں اور لا = + ∞ کے لیے صفر میں تحویل ہو۔

[ یہ پچھلے سوال کا مسئلہ ہے جبکہ کوئی اشعاع وقوع پذیر نہ ہو۔  
 سلاح کی بجائے ایک نیم لامتناہی ٹھوس جسم جو ایک مستوی رخ سے  
 محدود ہو رکھا جاسکتا ہے اگر بہاؤ ہمیشہ اس رخ کے عمود وار ہو۔  
 کیلون (Kelvin) نے اس طریقہ پر گ کو زمین کے لیے معلوم کیا تھا۔  
 (۸) ثابت کرو کہ ہزار مساواتیں

$$\begin{aligned} \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} &= \text{سرا ع} + \frac{\text{ل جف ع}}{\text{جف ت}} \\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} &= \text{ک و} + \frac{\text{ج جف و}}{\text{جف ت}} \end{aligned}$$

حلوں

$$\text{و} = \text{و} - (\text{رگ} + \text{خف لا} + \text{خ ن ت})$$

$$\text{ع} = \text{ع} - (\text{رگ} + \text{خف لا} + \text{خ ن ت})$$

سے پوری ہوتی ہیں اگر

$$\begin{aligned} \text{گ} - \text{ف} &= \text{سرا ک} - \text{ن ل ج} \\ \text{ف گ} &= \text{ن (سرا ج + ل ک)} \end{aligned}$$

$$\text{ع} (\text{سرا + خ ل ن}) = \text{و} (\text{رگ} + \text{خ ج ن})$$

اور

[ یہ ٹیلیفون کے تار کے لیے ہیوی سائنڈ کی مساواتیں ہیں جبکہ تار کی  
 مزاحمت سرانجامش ج، لائل، پراوش (Leakance) گ ہو جہاں ان سب  
 فی اکائی طول پیمائش کیا گیا ہے۔ روع ہے اور قوت محرکہ برق و۔  
 (۹) ثابت کرو کہ پچھلی مثال میں گ، ن کے تابع نہیں ہے اگر

$$\text{سرا ج} = \text{ک ل}$$

[ موج کی ترقیق گ پر منحصر ہوتی ہے جو بالعموم ن پر منحصر ہوتا ہے۔



مثلاً اگر آواز مختلف تعدد کی موسیقی موجوں سے ترکیب یافتہ ہو تو یہ موجیں ترقیق کے مختلف درجوں کے ساتھ منتقل ہوں گی۔ اس لیے دوسرے سرے پر آواز بگڑی ہوئی پہنچے گی۔ ل اور ک کو بڑھا کر س ج = ک ل بنانے کی ہیوی سائڈ کی ترکیب اس بگاڑ کو روکتی ہے۔ (۵۹)

(۱۰) اگر مساوات (۸) میں ل = ک = ۰ تو ثابت کرو کہ وادع

دونوں کی رفتار  $\frac{2\pi}{\text{سراج}}$  سے اشاعت ہوتی ہے۔

[ رفتار  $\frac{v}{\omega}$  سے حاصل ہوتی ہے۔ ]

(۱۱) ثابت کرو کہ

ف = ۰ ، ع = ۰ ،  
ق = ۰ ، ب = ۰ ،  
س = ۰ ، جب ب (لا - و ت) ، ج = ۰

سے ہمزاد مساواتیں

ک جف ف = جف ج - جف ب ، م ج جف ع = ج جف ت = جف س - جف ق ،  
ج جف ت = جف ا - جف ی ، ج جف ت = جف ب - جف ف - جف لا ،  
ک جف ق = جف ع - جف ج ، م ج جف ب = ج جف ت = جف ی - جف لا ،  
ج جف ت = جف ا - جف ی ، ج جف ت = جف ب - جف ف - جف لا ،  
ک جف س = جف ب - جف ع ، م ج جف ج = ج جف ت = جف ق - جف ف ،  
ج جف ت = جف لا - جف ا ، ج جف ت = جف ب - جف ف - جف لا ،

پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ  $\omega = \frac{2\pi}{\text{سراج}}$  اور  $\nu = \frac{1}{\text{سراج}}$  (ک | م) س

[ یہ ایک برق گزار کے لیے کئی نوعی مالی گنجائش ک اور نفوذ پذیری مر ہے میکسول کی برق مقناطیسی مساواتیں ہیں۔ برقی حدت کے اجزائے ترکیبی 'ف' 'ق' 'س' اور مقناطیسی حدت کے 'ع' 'ب' 'ج' ہیں۔ برقی مقناطیسی



و  $\infty \neq \infty$  اگر  $t = +\infty$  کی تمام قیمتوں کے لیے  
 و  $\infty = 100$  اگر  $\lambda = 0$  یا  $\pi$ ،  $t$  کی تمام قیمتوں کے لیے  
 و  $\infty = 0$  اگر  $t = 0$ ، صفر اور  $\pi$  کے درمیان  $\lambda$  کی تمام  
 قیمتوں کے لیے۔

[برٹ کی مانند ٹھنڈی سلاخ کی بجائے اس کے سرے  
 جوش کھاتے ہوئے پانی میں ہیں]

(۱۷) سوال (۱۵) کو حل کرو اگر طول  $\pi$  کی بجائے  $\lambda$  ہو۔ اگر  $\lambda$   
 نا انتہا بڑھے تو ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ مکملہ  
 $\frac{200}{\pi}$  کی  $\frac{1}{e}$  قوت جب  $e$  لا فرعہ

ہو جاتا ہے۔  
 [نوٹ - یہ نویری کا ایک مکملہ کہلاتا ہے۔ اس نتیجہ کو حاصل  
 کرنے کے لیے رکھو

$$\frac{\pi(1+1/2)}{\lambda} = e \text{ اور } \frac{\pi^2}{\lambda} = \text{فرعہ}$$

کیبلون نے زیر زمین تپش کے اضافہ کی شرح مشاہدہ کر کے  
 تپش کا اندازہ لگانے میں ایک مکملہ کا استعمال کیا۔ (دیکھو اس  
 کتاب کے ختم پر متفرق مثالوں میں مثال ۱۰۷)۔ لیکن اسٹریٹ (Strutt)  
 کے دالبیہ انکشاف سے کہ حرارت زمین کے اندر تابکاریا نہ علی سے مسلسل  
 پیدا ہو رہی ہے یہ معلوم ہوا کہ کیبلون کا تخمینہ بہت کم تھا۔]

$$(۱۸) \frac{\text{جف } \infty}{\text{جف } t} = \frac{\text{جف } \infty}{\text{جف } \lambda} \text{ کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ}$$

$$\begin{aligned} & \infty = \infty \text{ جبکہ } t = +\infty \\ & \frac{\text{جف } \infty}{\text{جف } \lambda} = 0 \text{ جبکہ } \lambda = 0, \pi, t \text{ کی تمام قیمتوں کے لیے} \\ & 0 = 0 \text{ جبکہ } \lambda = \lambda, t \text{ کی تمام قیمتوں کے لیے} \end{aligned}$$

$\omega = 0$  جبکہ  $t = 0$ ، صفر اور  $l$  کے درمیان لاکھ  
تمام قیمتوں کے لیے۔

[اگر ایک استحقاقی نلی کو جس میں نمک کا محلول ہو پانی کے ایک  
بہت بڑے برتن میں پوری طرح ڈبو دیا جائے تو نمک استحقاقی نلی سے باہر  
بڑے برتن کے پانی میں نفوذ کرے گا۔ اگر نمک کا ابتدائی ارتکاز  $\omega$  ہو  
اور استحقاقی نلی کے طول  $l$  میں وہ بھرا ہوا ہو تو کسی لمحہ پر نلی کی تہ سے  
لا ارتفاع پر نمک کا ارتکاز  $\omega$  سے حاصل ہوگا۔ شرط  $\frac{\omega}{\text{جف}} = 0$  جبکہ  $l = 0$ ۔

کے یہ معنی ہیں کہ بند سرے پر کوئی نفوذ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔  $\omega = 0$  جبکہ  
 $l = 0$  کے یہ معنی ہیں کہ استحقاقی نلی کے سرے پر تقریباً خالص پانی ہے۔]

$$(19) \quad \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 t} = \frac{\omega}{\text{جف}} \frac{1}{l} \text{ کا ایک ایسا حل معلوم کر دو کہ}$$

ما، لا کا مثلثی تفاعل ہو،  
ما = 0۔ جبکہ  $l = 0$  یا  $\pi$ ،  $t$  کی تمام قیمتوں کے لیے،  
 $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2 t} = 0$  جبکہ  $t = 0$ ، لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ما} = m \text{ لا، } l = 0 \text{ اور } \frac{\pi}{2} \text{ کے درمیان، جبکہ } t = 0 \\ \text{ما} = m(\pi - \text{لا}) \text{، } l = \frac{\pi}{2} \text{ اور } \pi \text{ کے درمیان} \end{array} \right.$$

(۶۱) [نوٹ۔ دفعہ ۴۸ کی دوسری حل کردہ مثال دیکھو۔  
ما اس ڈوری کا عرضی ہٹاؤ ہے جو دو نقطوں کے درمیان نہیں  
فاصلہ  $\pi$  ہے تنہا ہوئی ہے۔ ڈوری کو اس کے وسطی نقطہ پر کپڑ کر ایک طرف  
فاصلہ  $\frac{\pi}{2}$  تک کھینچ کر چھوڑ دیا گیا ہے۔]

$$(۲۰) \quad \frac{فریا}{فرلا} = عفا کے حل کو جہاں عفا ایک مستقل ہے$$

شکل

$$ما = نو + لا عفا - لا عفا ب$$

$$\text{میں لکھ کر} \quad \frac{جفا ما}{جفت لا} = \frac{جفا ما}{جفت ت} \text{ کے حل کو شکل}$$

$$ما = ف (ت + لا) + فا (ت - لا)$$

میں، عفا کی بجائے جفا، کی بجائے ف (ت) اور ب کی بجائے فا (ت) درج کر کے اور فیملر کے مسئلہ کو اس کی علامتی شکل ف (ت + لا) = نو عفا ف (ت) میں استعمال کر کے اخذ کرو۔

[ان علامتی طریقوں سے جو نتیجے حاصل ہوں ان کو صرف غالباً صحیح نتیجے سمجھنا چاہیئے۔ جب تک کہ دوسرے ذریعوں سے ان کی تصدیق نہ ہو اس استدلال کا جو نتیجہ سے واپس تفرقی مساوات تک پہنچنے میں کیا جاتا ہے بڑی احتیاط سے ساتھ امتحان کرنے کی ضرورت ہے۔]

(ہیوی سائڈ نے علامتی طریقوں کو بعض ایسے مسئلوں کے حل کرنے میں استعمال کیا ہے جو دوسرے طریقوں سے حل نہیں ہوتے۔ دیکھو اس کی کتاب (Electromagnetic Theory))

$$(۲۱) \quad \frac{فریا}{فرلا} = عفا کے حل سے جہاں عفا ایک مستقل ہے$$

$$\frac{جفا ما}{جفت لا} = \frac{جفا ما}{جفت ت} \text{ کا حل شکل}$$

\* مطالعہ اول میں قابل ترک



## پانچواں باب

وہ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں۔

۵۱۔ اس باب میں ہم پہلے رتبہ اور پہلے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کے بعض خاص نمونوں پر غور کریں گے، ان کا حل بعض اوقات لامتناہی سلسلوں کے استعمال کے بغیر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ فرما کو اختصاراً ع سے تعبیر کیا جائے گا۔

یہ خاص نمونے حسب ذیل ہیں :

- (۱) وہ جو ع کے لیے حل پذیر ہیں،
- (ب) وہ جو ما کے لیے حل پذیر ہیں،
- (ج) وہ جو لا کے لیے حل پذیر ہیں۔

۵۲۔ وہ مساواتیں جو ع کے لیے حل پذیر ہیں۔ اگر ہم

ع کے لیے حل کر سکیں تو ن ویں درجہ کی مساوات پہلے درجہ کی ن مساواتوں میں تبدیل ہوگی جن پر ہم دوسرے باب کے طریقے استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال (۱) مساوات  $ع + ع + لا + ع + ما + لا + ما = ۰$

سے مساواتیں  $ع = - لا$  یا  $ع = - ما$

حاصل ہوتی ہیں اور ان سے حل

$$۲ = ۱ - لا + ج, یا لا = ۱ - لوک + ج$$

حاصل ہوتے ہیں جن کو ایک مساوات

$$(۲ + لا - ج) (لا + لوک - ج) = ۰ \dots \dots (۱)$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے -

یہاں ایک مشکل سے واسطہ پڑتا ہے - کامل ابتدائی میں بظاہر دو اختیاری مستقل شامل ہیں حالانکہ صرف ایک ہونا چاہئے کیونکہ مساوات پہلے رتبہ کی ہے - لیکن حل

$$(۲ + لا - ج) (لا + لوک - ج) = ۰ \dots \dots (۲)$$

پر غور کرو -

اگر ہم متغلوں ج، ج، ج میں سے ہر ایک کی صرف ایک قیمت پر غور کریں تو ان میں سے ہر مساوات شخصوں کے ایک ذوق کو تعبیر کرتی ہے اور بلاشبہ یہ زور ج ایک ہی نہیں ہوا ہے (لا + لوک = ج = ج) - لیکن اگر ہم شخصوں کے ذوقوں کے اس لامتناہی جٹ پر غور کریں جو ان متغلوں کو - سے + تک تمام ممکن قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے تو جس پر ہمیشہ مجموعی ایک ہی لامتناہی جٹ ملے گا اگرچہ یہ ممکن ہے کہ ترتیب مختلف ہو اس لیے (۲) کو کامل ابتدائی سمجھا جاسکتا ہے -

(۲۳)

$$\text{مثال (۲)} \quad ۱ - ج - ۲ = ۰$$

$$\text{بیان} \quad ۱ = ج \quad ۲ = ۱ - ج$$

$$۱ = لا + ج, ۱ = ۱ - ۲ + ج$$

پہلے مثال کے مطابق ہم کامل ابتدائی کو

$$(۱ - لا - ج) (۱ - ۲ + ج) = ۰$$



کی بجائے  $(ج - لا - ما) (ج - لا + ما) = ۰$  لیتے ہیں۔

ان میں سے ہر مساوات ان تمام خطوں کو تعبیر کرتی ہے جو  $ما = لا$  یا  $ما = لا$  کے متوازی ہیں۔

### حل طلب مثالیں

(۱)  $ع^۲ + ع - ۶ = ۰$  (۲)  $ع^۲ + ع + ۲ لا = ۳ لا^۲$   
 (۳)  $ع^۲ = لا^۲$  (۴)  $ع + لا + ما = ع^۲ (۱ + لا + ما)$   
 (۵)  $ع^۳ - ع (لا + لا + ما) + (لا + لا + ما) = ۰$   
 (۶)  $ع^۲ - ع + ۱ = ۰$

۵۳۔ وہ مساواتیں جو  $ما$  کے لیے حل پذیر ہیں۔  
 اگر مساوات  $ما$  کے لیے حل پذیر ہے تو حل شدہ شکل کا تفرق  $لا$  کے لحاظ سے کیا جاتا ہے۔

مثال (۱)  $ع^۲ - ع + ما + لا = ۰$

$ما$  کے لیے حل کرنے پر  $ع + لا = \frac{لا}{ع}$

تفرق کرنے پر  $ع = \frac{ع}{فرع} + \frac{۱}{ع} - \frac{لا}{ع فرع}$

یعنی  $(ع - \frac{۱}{ع}) (\frac{۱}{ع} + \frac{فرع}{ع}) = \frac{لا}{ع}$

یہ پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے جبکہ  $ع$  کو غیر تابع متغیر سمجھا جائے۔  
 پانچ دفعہ ۱۹ کے مطابق عمل کرنے پر حاصل ہوگا

$لا = ع (ج + جمرع - ع) (۱ - ع)$

$$\therefore \quad ۱ = ۱ + \frac{۱}{۲} \quad ، \quad ۱ = ۱ + (ج + ج + ج) (ع - ۱) \frac{۱}{۲}$$

ان دو مساواتوں سے جولا اور ما کے لیے ع کی رقوم میں ہیں تفرقی مساوات کے حل کی تبدیلی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ جب 'ج' کی قیمت معلوم ہو تو ع کی ہر قیمت کے متناظر لا کی ایک عدد قیمت اور ما کی ایک محدود قیمت حاصل ہوگی اور اس طرح ایک نقطہ مقرر ہوگا۔ جب 'ع' متغیر ہوتا ہے تو نقطہ حرکت کرتا ہے اور ایک منحنی مرتسم کرتا ہے۔ اس مثال میں ہم ع کو سا قط کر کے لا اور ما کو مربوط کرنے والی مساوات معلوم کر سکتے ہیں، لیکن منحنی کو مرتسم کرنے کے لیے یہ تبدیلی شکلیں اگر بہتر نہیں تو اتنی ہی اچھی ہیں

$$\text{مثال (۲)} \quad ۳ - ع = ۱ + ۱ = ۱$$

$$\text{ما کے لیے حل کرنے پر} \quad ۳ - ع = ۱ + ۱ = ۱$$

$$\text{تفرق کرنے پر} \quad ۱۲ = ع - \frac{۳}{۲} \text{ فرع} - \frac{۲}{۲} \text{ فرع}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{فرع} = (۱۲ - \frac{۳}{۲} - \frac{۲}{۲}) \text{ فرع}$$

$$\text{تکمل کرنے سے} \quad لا = ۱۲ + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۱۱$$

$$\text{اور اوپر سے} \quad ۳ - ع = ۱ + ۱ = ۱$$

طالب علم ج کی کسی مخصوص قیمت مثلاً ج = ۱ کے لیے اس کی ترتیم معلوم کرے۔

۵۴۔ وہ مساواتیں جولا کے لیے حل پذیر ہیں۔ (۶۴)

اگر مساوات لا کے لیے حل پذیر ہے تو حل شدہ شکل کا تفرق ما کے لحاظ سے کیا جاتا ہے اور فرلا کو شکل  $\frac{۱}{۲}$  میں لکھا جاتا ہے۔

مثال۔  $x^2 - x + 6 = 0$ ۔ اس کو گذشتہ دفعہ میں ماکیلے حل کیا گیا تھا۔  
لا کے لیے حل کرنے پر  $x^2 - x + 6 = 0$

ما کے لحاظ سے تفریق کرنے پر  $\frac{1}{x} = x + 6 - \frac{x}{x^2} = x + 6 - \frac{1}{x}$

یعنی  $(x - \frac{1}{x}) \cdot \frac{x}{x} = x^2 - 1 = 6x - 1$

جو پہلے رتبہ کی ایک خطی مساوات ہے جبکہ  $x$  کو غیر تابع متغیر اور  $\frac{1}{x}$  کو تابع متغیر سمجھا جائے۔ اس کو دفعہ ۱۹ کے مطابق حل کیا جاسکتا ہے۔ طالب علم اس نتیجہ پر پہنچے گا جو گذشتہ دفعہ میں معلوم کیا گیا ہے۔

### حل طلب مثالیں۔

$$(1) \quad x^2 + x^2 = 1 \quad (2) \quad x^2 - x + 6 = 0$$

$$(3) \quad x^2 + 1 = 6 \quad (4) \quad x^2 + 1 = 6$$

$$(5) \quad x^2 + x = 6 \quad (6) \quad x^2 + x + 6 = 2(x + 1)$$

$$(7) \quad x^2 - x + (3 + 6) = 1 \quad (8) \quad x = 6 \text{ جب } x + 6 = 1$$

$$(9) \quad x = 6 \text{ مس } x + 6 \text{ لوک جم } (10) \quad x^2 - 1 = 6 - 1$$

$$(11) \quad x = 6 \text{ مس } (12) \quad x^2 + 1 = 6$$

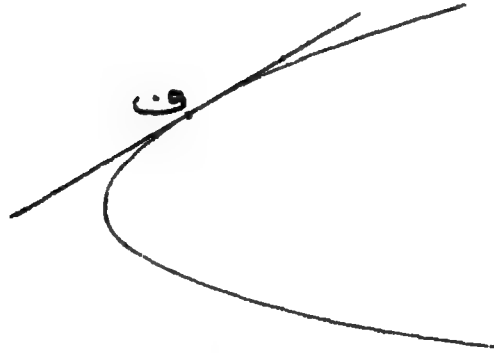
(۱۲) ثابت کرو کہ اس قبیل کے تمام منحنی جو مثال (۱) کے حل سے حاصل ہوتے ہیں  
عورتا کو علی القوام قطع کرتے ہیں۔ ج کی قیمت قبیل کے اس منحنی کے لیے معلوم کرو جو نقطہ  
(۱۰) میں سے گذرتا ہے۔

(۱۳) مثال (۹) کے حل میں  $x = 6$  رکھنے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کو  
مرسم کرو۔ ان نقطوں پر محاسم یعنی جو  $x = 6$ ،  $x = 1$ ،  $x = 2$ ،  $x = 3$  سے حاصل  
ہوتے ہیں اور پیمائش سے اس امر کی تصدیق کرو کہ ان محاسموں کے وصال علی الترتیب  
۱، ۲، ۳ اور ۴ ہیں۔

# چھٹا باب

## نادر حل

۵۵۔ ہم محد دوں کے علم ہندسہ سے جانتے ہیں کہ خط مستقیم  $MA = m + \frac{1}{m}$  مکانی  $MA = m$  لاکوسس کرتا ہے خواہ  $m$  کی قیمت کچھ ہی ہو۔  
 کسی مخصوص  $m$  کے نقطہ تماس  $F$  پر غور کرو۔  $F$  پر تماس اور  
 مکانی کی سمتیں وہی ہیں اور اس لیے اس نقطہ پر  $\frac{1}{m}$  فرما کی قیمت دونوں میں  
 مشترک ہے اور نیز لا اور ما کی قیمتیں بھی۔



شکل (۷)

لے اس باب سے استدلال ہندسی تحلیل پر مبنی ہیں۔ اس لیے نتیجوں کو ثابت شدہ نہیں سمجھا جاسکتا  
 ان کے متعلق صرف یہ خیال کیا جاسکتا ہے کہ وہ بعض صورتوں میں غالباً درست ہیں۔  
 تحلیلی نظریہ میں بڑی شکلیں پیش آتی ہیں { دیکھو ایم۔ جے۔ ایم۔ ہل۔ Proc. Lond. Math. Soc. 1918 }

لیکن ماس کے لیے  $m = \frac{فرما}{فرلا} = ع$  (فرض کرد) اس لیے ماس

تفرقی مساوات  $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$  کو پورا کرتا ہے۔

یہ مساوات نقطہ ف پر مکانی کے لیے بھی درست ہے جہاں لا، ما، اور ع ماس اور مکانی دونوں کے لیے وہی ہیں۔ اب چونکہ ف مکانی پر کوئی نقطہ ہو سکتا ہے اس لیے مکانی کی مساوات  $ما = م لا$  کو تفرقی مساوات  $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$  کا ایک حل ہونا چاہئے جیسا کہ طالب علم آسانی سے اس کی تصدیق کر سکتا ہے۔

(۶۶) عام طور پر اگر منحنیوں کا کوئی اکہر لا متناہی نظام ہو اور یہ سب منحنی ایک ثابت منحنی کو جس کو ہم لفاف کہتے ہیں مس کریں اور اگر یہ قبیل پہلے رتبہ کی کسی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی کو تعبیر کرے تو لفاف سے اس تفرقی مساوات کا ایک حل تعبیر ہوگا۔ کیونکہ لفاف کے ہر نقطہ پر لا، ما، اور ع کی قیمتیں لفاف کے لیے اور قبیل کے اس منحنی کے لیے جو لفاف کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے وہی ہوتی ہیں۔ ایسے حل کو نادر حاصل کہتے ہیں۔ اس میں کوئی اختیاری مستقل شامل نہیں ہوتا اور نہ وہ کامل ابتدائی سے 'الا استثنائی' صورتوں کے اختیاری مستقل کو کوئی مخصوص قیمت دیکر حاصل کیا جاسکتا ہے (دفعہ ۱۶۰)۔

۱۔ سیمپلے صفاری احساء (دوسرا ڈیشن) دفعہ ۱۵۵ میں منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی یہ تعریف لگتی ہے کہ وہ قبیل کے متعلقہ منحنیوں کے انتہائی تقاطع کا طریق ہوتا ہے۔ اس تعریف میں لفاف کے علاوہ یا اس کی بجائے عقدہ طریق اور قرن طریق بھی شامل ہو سکتے ہیں۔ [اس کی ہندسی وجہ ہم دفعہ ۵۶ میں بیان کریں گے۔ تخلیلی ثبوت کے لیے سیمپلے کتاب دیکھو]۔

## حل طلب مثال

ثابت کرو کہ خط مستقیم  $ما = لا$  مکافیوں  $ما = لا + \frac{1}{2} (لا - ج)$  کے قبیل کا لغاف ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس (ج، ج) ہے اور اس نقطہ پر مکافی اور لغاف کے لیے  $ع = ۱$ ۔ مکافیوں کے قبیل کی تفرقی مساوات کو شکل  $ما = لا + (ع - ۱)$  میں حاصل کرو اور اس امر کی تصدیق کرو کہ لغاف کی مساوات اس کو پورا کرتی ہے۔

لغاف اور قبیل کے چند مکافیوں کو  $ج = ۱، ۲$  وغیرہ لیکر مشتم کرو۔  
**۵۶** - اب ہم یہ غور کریں گے کہ نادر طوں کو کس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ بتایا جا چکا ہے کہ ان منحنیوں کا لغاف جو کامل ابتدائی سے تغیر ہوتے ہیں ایک نادر حل ہے، اس لیے ہم لغافوں کو معلوم کر چکے طریقہ سے ابتدا کریں گے۔  
 عام طریقہ یہ ہے کہ منحنیوں کے قبیل کی مساوات  $ف(لا، ما، ج) =$

۱۹۱

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ج}} =$$

سے مبدل ج کو سا فٹ کیا جائے۔ مثلاً اگر  $ف(لا، ما، ج) = ۰$

$$ما - ج - لا - \frac{۱}{۲} = ۰ \text{ ہو تو } \frac{\text{جف}}{\text{جف ج}} = ۰ - لا - \frac{۱}{۲} = ۰ \text{ ہے}$$

۱۵ دیکھو لمپ کا صفاری احصاء (دوسرا ڈیٹیشن) دفعہ ۱۵۶ - اگر  $ف(لا، ما، ج) کی$  شکل  $لا + ج + ما + ن$  ہو تو نتیجہ  $ما = ۲ - ن$  حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

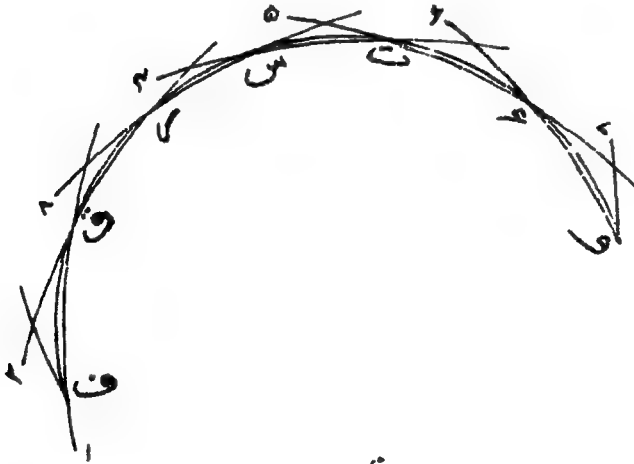
$$ما - ج - لا - \frac{۱}{۲} = ۰ \text{ یعنی } ج - لا - ج + ما = ۰$$

کے لیے نتیجہ  $ما = ۲ - لا$  ہے۔

[دوسرے ڈیٹیشن کے دفعات ۱۵۵ اور ۱۵۶ تیسرے ڈیٹیشن میں دفعات ۱۳۸ اور ۱۳۹ ہیں]

اور اس لیے  $ج - لا = \frac{1}{ج} = ۰$  اور  $لا + \frac{1}{ج} = ۰$  سے  $ج$  کو ساقط  
 کیا جائے تو  $۱ = \pm ۲$  یا  $۱ = ۲$  حاصل ہوتا ہے۔  
 یہ طریقہ  
 ف (لا، ما، ج) = ۰

اور ف (لا، ما، ج + ۱) = ۰ کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کر نیکی  
 مساوی ہے (جو قبیل کے دو ایسے منحنی ہیں جن میں بدلوں کا فرق ایک  
 چھوٹی مقدار ہے جبکہ انتہائی صفحہ کی طرف مائل ہو۔ نتیجہ کو  
 ف (لا، ما، ج) = ۰ کا ج مینر کہتے ہیں۔  
 ۵۷۔ اب نقشوں ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ پر غور کرو۔  
 شکل (۸) میں وہ صورت پیش کی گئی ہے جس میں قبیل کے منحنی  
 کوئی خاص قدرت نہیں رکھتے۔



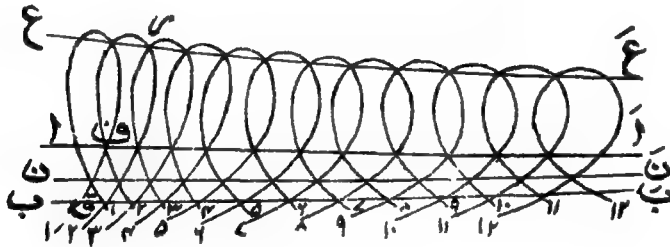
شکل (۸)

انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ایک منحنی ف ق س ت ع و ہے  
 جس میں قبیل کے منحنیوں میں سے ہر ایک کے ساتھ نقطے مشترک ہیں

(مثلاً ق اور س طریقی پر بھی اور اُس منحنی پر بھی ہیں جو ۲ سے نشان زدہ)۔  
اس لیے انتہا میں طریقی ف ق س ت ۶ و قبیل کے ہر منحنی  
کو مس کرتا ہے اور وہی ہے جس کی ہم نے لفاف کے طور پر تعریف  
کی ہے۔

شکل (۹) میں قبیل کے ہر منحنی میں ایک عقدہ ہے۔ دو متصلہ  
منحنی تین نقطوں میں (مثلاً منحنی ۲ اور ۳ نقطوں 'ف' 'ق' 'س' میں) متقاطع  
ہوتے ہیں۔

ایسے نقطوں کا طریقی تین مختلف حصوں ع ع 'ا' اور ب ب  
پر مشتمل ہوتا ہے۔  
جب ہم متصلہ منحنیوں کو قریب اور قریب تر لیکر ان کے انتہائی  
قریب محلوں پر غور کرتے ہیں تو 'ا' اور ب ب 'عقدہ طریقی ن' کے  
قریب آکر اس پر منطبق ہو جاتے ہیں اور ع ع لفاف ہو جاتا ہے۔



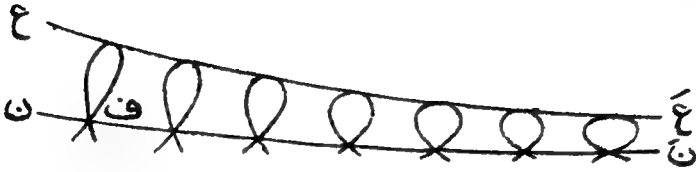
شکل (۹)

اس لیے اس صورت میں ج ممیز میں عقدہ طریقی کی مساوات کا مرئج (۶۸)  
اور نیز لفاف کی مساوات شامل ہیں۔

شکل ۱۰ سے ظاہر ہے کہ عقدہ طریقی ن کی سمت اس کے کسی نقطہ  
ف پر بالعموم وہی نہیں ہوتی جو منحنی کے کسی ایک شاخ کی اس نقطہ پر  
ہے۔ نقطہ ف پر منحنی اور عقدہ طریقی دونوں میں لا اور ما مشترک ہیں  
لیکن ع مشترک نہیں ہے، اس لیے عقدہ طریقی قبیل کے منحنیوں کی



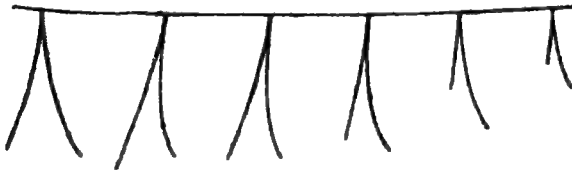
تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔



شکل (۱۰)

اگر عقدہ سُکڑ کر قرن بن جائے تو شکل ۱۰ کے طریق ن ن اور ع ع ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور ان کے انطباق سے قرن طریق (شکل ۱۱) ج ج بنتا ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ ن ن، شکل (۹) کے دو طریقوں (Loc) اور ب ب کے انطباق سے حاصل ہوا تھا اس لیے ج ج فی الحقیقت تین طریقوں (Loc) کے انطباق سے حاصل ہوتا ہے اور اس لیے ج ممیز میں اس کی مساوات کا کعب شامل ہوگا۔

شکل ۱۱ سے ظاہر ہے کہ قرن طریق عقدہ طریق کی طرح (بالعموم) تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔



شکل (۱۱)

خلاصہ یہ ہے کہ ج ممیز میں

(۱) لفاف

(۲) عقدہ طریق دوسری قوت میں

(۳) قرن طریق تیسری قوت میں

اور

کے شامل ہونے کی توقع کیجا سکتی ہے۔

لغاف ایک نادر حل ہے لیکن عقدہ طریق اور قرن طریق (بالعموم) <sup>۱۵</sup> حل ہی نہیں ہوتے۔

۵۸۔ سب ذیل مثالوں سے پچھلے نتیجوں کی وضاحت ہوگی۔

مثال (۱)  $x^2 = 4$

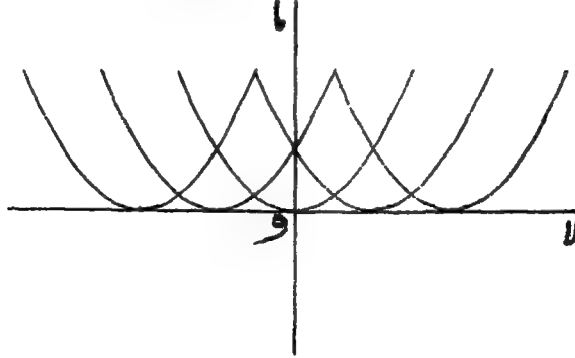
کامل ابتدائی باسانی  $x^2 = 4$  (لا۔ ج) حاصل ہوتا ہے

یعنی  $x^2 - 4 = 0$

یہ چونکہ ج میں دو درجہ مساوات ہے اس لیے مینز کو فوراً لکھ لیا جاسکتا ہے چنانچہ وہ

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

ہے یعنی  $x = 2$  یا  $x = -2$  یہ کامل ابتدائی سے حاصل شدہ مساوی مکافیوں کے قبیل کے لغاف کو تعبیر کرتا ہے اور صرف پہلے درجہ میں ہے جیسا کہ لغاف کو ہونا چاہئے۔



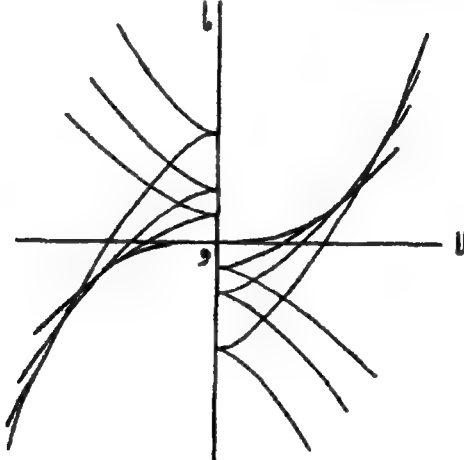
شکل (۱۲)

۱۵ ہم نے "بالعموم" لکھا ہے کیونکہ ممکن ہے کہ کسی خاص مثال میں عقدہ یا قرن طریق لغاف پر یا قبیل کے ایک نغنی پر منطبق ہو جائے۔



$$\begin{aligned} 0 &= 2 - \epsilon^2 \\ \text{تو تفرقی مساوات میں } \epsilon &\text{ کی بجائے اندراج کرنے سے} \\ \epsilon^2 &= 2 \end{aligned}$$

حاصل ہو گا لیکن لغات  
اس سے نادر حلول کو معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ ملتا ہے۔



شکل (۱۳)

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے کابل ابتدائی اور نادر حل (اگر موجود

ہوں) معلوم کرو۔ مثالوں ا تا م کی صورت میں ترسیں کھینچو۔

$$(1) \quad \epsilon^2 - 9\epsilon = 0 \quad (2) \quad \epsilon^2 - (2 - \epsilon) = 1$$

$$(3) \quad \epsilon^2 - 2\epsilon + 4 = 0 \quad (4) \quad \epsilon^2 + 1 = 0$$

$$(5) \quad \epsilon^2 + 2\epsilon - 6 = 0 \quad (6) \quad \epsilon^2 - 2\epsilon + 1 = 0$$

$$(7) \quad \epsilon^2 + 4\epsilon - 1 = 0$$

۵۹۔ ع ممیز۔ اب ہم یہ غور کریں گے کہ کسی تفرقی مساوات کے (۷۱)

نادرل کامل ابتدائی کو معلوم کئے بغیر خود مساوات سے راست کس طرح حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ مساوات

$$لا^۱ع - ما^۱ع + ۱ = ۰$$

پر غور کرو۔ اگر ہم لا اور ما کو کوئی محدود عددی قیمتیں دیں تو ع میں ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے مثلاً اگر لا = ۲، ما = ۳ تو

$$ع^۲ - ۳ع + ۱ = ۰$$

$$ع = \frac{۱}{۲} \text{ یا } ۱$$

اس طرح ہر نقطہ میں سے قبیل کے دو منحنی ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ ان دو منحنیوں کے تماس ان سب نقطوں پر جہاں مساوات کی اصلیں ع میں مساوی ہیں ایک ہی ہوں گے یعنی جہاں میزما^۲ = لا^۲ = ۰۔

یہ امور دو درجی لا^۱ع + ما^۱ع + ن = ۰ کی صورت میں بھی درست ہیں جہاں لا، ما، ن متغیروں لا اور ما کے کوئی تفاعل ہیں۔ مستوی کے ہر نقطہ میں سے دو منحنی گزرتے ہیں اور یہ منحنی طریقی ما^۲ - لا^۲ = ۰ کے تمام نقطوں پر ایک ہی سمت رکھتے ہیں۔ عام صورت میں تفرقی مساوات

$$ف(لا، ما، ع) = لا^۱ع + لا^۰ع + لا^۰ع + \dots + لا^۰ع = ۰$$

سے جہاں تمام لا، ما اور ع کے تفاعل ہیں لا اور ما کی قیمتوں کے کسی معلومہ زوج کے لیے ع کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ان کے متناظر کسی نقطہ میں سے دو منحنی گزرتے ہیں۔ ان دو منحنیوں میں سے دو کے تماس اس طریق کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتے ہیں جو ع کو

$$\left\{ \begin{array}{l} ف(لا، ما، ع) = ۰ \\ جف = ۰ \end{array} \right.$$

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے کیونکہ یہی وہ شرط ہے جو مساوی اصولوں کی موجودگی کے لیے مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں دی جاتی ہے۔  
 اس طرح ہم  $E$  مینز پر پہنچتے ہیں اور اب ہم ان طریقوں (Loc) کے خواص کی تحقیق کریں گے جو  $E$  مینز سے تعبیر ہوتے ہیں۔

## ۶۰۔ لفاف - مساوات

$$M = E + \frac{1}{E}$$

$$E^2 - E - 1 = 0$$

کام  $E$  مینز چکے ہیں کہ کامل ابتدائی مکانی کے مساویوں پر مشتمل ہم دیکھ چکے ہیں کہ کامل ابتدائی مکانی کے مساویوں پر مشتمل ہوتا ہے اور وہ نادرسل ہے۔ ان میں سے دو ماس 'مستوی' کے ہر نقطہ ف میں سے گزرتے ہیں اور یہ ماس لفاف کے نقطوں کے لیے ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

یہ  $E$  مینز بھی وہ مثال ہے جو لفاف کو تعبیر کرتی ہے۔ اسکی (۷۲) زیادہ عام صورت شکل ۱۵ میں دکھلائی گئی ہے۔



شکل (۱۳)

خیال کرو کہ منحنی  $س ق ف$ ، منحنی  $ف ر ت$  پر منطبق ہونے کے لیے اوپر حرکت کرتا ہے لیکن ہمیشہ لفاف  $ق ر$  کے ساتھ تماس میں رہتا ہے۔ نقطہ  $ف$ ،  $س$  کی جانب اوپر حرکت کرے گا اور نقطہ  $ف$  میں سے گزرنے والے ان دو منحنیوں کے تماس بالآخر ایک دوسرے پر اور اس تماس پر جو لفاف کا  $س$  پر سے منطبق ہونگے اس طرح  $س$  ایک ایسا نقطہ ہے جس کے لیے نظام کے ان دو منحنیوں کے  $ع$  منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے  $ع$  میز معدوم ہوتا ہے۔



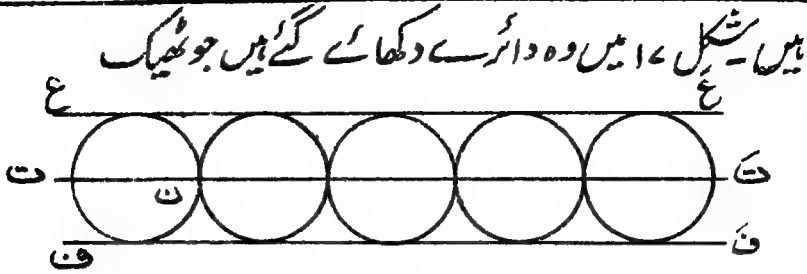
شکل (۱۵)

پس  $ع$  میز منحنیوں کے نظام کا لفاف ہو سکتا ہے اور اگر ایسا ہے تو وہ نادر محل ہے جیسا کہ دفعہ ۵۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے۔

۶۱۔ طریق۔ پس لفاف ان نقطوں کا طریق ہوتا ہے

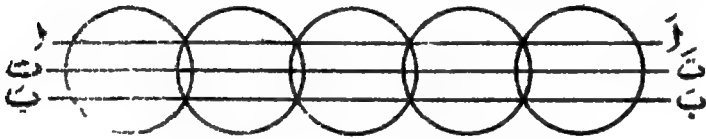
جہاں قبل کے دو متصلہ منحنی  $ع$  کی ایک ہی قیمت رکھتے ہیں۔ لیکن دو غیر متصلہ منحنیوں کا ایک دوسرے کو مس کرنا ممکن ہے۔ دائروں کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوی نصف قطر کے ہیں اور جن کے مرکز ایک خط مستقیم میں واقع ہیں۔ شکل ۱۶ سے واضح ہے کہ مرکوز کا خط دائروں کے زوجوں کے نقطہ تماس کا طریق ہے۔ اس کو (lac-locus) طریق کہتے

(۷۳)



شکل (۱۲)

طور پر مس تو نہیں کرتے لیکن متصلہ نقطوں کے زوجوں میں متقاطع ہوتے ہیں جو دو متصلہ طریقوں (Loci) ۱) 'ب' پر واقع ہیں۔ جب ہم تاس کی انتہائی صورت پر پہنچتے ہیں تو یہ طریق (tac-locus) طریق 'ت' پر آکر اس کے ساتھ منطبق ہو جاتے ہیں۔ اس طرح 'ع' میز میں طریق (tac-locus) کی مساوات کا مربع شامل ہوتا ہے۔



شکل (۱۳)

یہ واضح ہے کہ شکل ۱۲ میں نقطہ 'ن' پر (tac-locus) طریق 'ب' کی سمت ان دو دائروں کی سمت نہیں ہے جو اس نقطہ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ اس لیے 'لا' 'ما' 'ع' کے درمیان وہ رشتہ جس کو دائرے پورا کرتے ہیں (tac-locus) طریق سے پورا نہیں ہوگا جس میں 'لا' اور 'ما' تو وہی ہیں لیکن 'ن' پر 'ع' مختلف ہے۔ عام طور پر (tac-locus) طریق تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوگا۔

۶۲۔ پچھلے دفعہ کے دائرے مساوات

$$ر = ا + ج$$

سے تعبیر ہوتے ہیں اگر مرکزوں کا خط و لا ہو۔ اس سے حاصل ہوتا ہے



$$\sqrt{2-2} = 0 + 0$$

$$\sqrt{2-2} = 0 + 0$$

$$0 = 0 + 0 - 2 = 0$$

$$\text{اس کا } \sqrt{2-2} = 0 \text{ ہے۔}$$

خط ۰ = (جو دوسری قوس میں بیٹے کے ذریعہ ملتا ہے) (tac-locus) طریق ہے اور  $\pm = 0$  (شکل ۱۶ کے ع اور ف اور ف) لغات ہیں۔  $\pm = 0$  جس سے ع = حاصل ہوتا ہے تفرقی مساوات کے نادر حل ہیں لیکن  $\pm = 0$  اس کو پورا نہیں کرتا اور اس لیے وہ حل نہیں ہے۔

۶۳۔ قرن طریق۔ یہ ممکن ہے کہ وہ تماس جس سے ع

میں مساوی اصلیں حاصل ہوتی ہیں ایک ہی منحنی کی دو شاخوں کا تماس ہو اور دو مختلف منحنیوں کا تماس نہ ہو یعنی ع ممیز قرن پر معدوم ہو جائے۔ (۶۴) قرن طریق کے کسی نقطہ ف پر اس کی سمت بالعموم وہی نہیں ملتی جو قرن پر کے تماس کی ہے (جیسا کہ شکل ۱۸ میں دکھایا گیا ہے) اس لیے قرن طریق تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔



یہ دریافت کرنا فطری امر ہے کہ آیا قرن طریق کی مساوات ع ممیز ہیں

تیسری قوت کے ساتھ شامل ہوگی بیسا کہ وہ جہیز میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔  
اس کا تصفیہ کرنے کے لیے ایسے نقطوں کے طریق پر غور کرو جن کے لیے  
دو مع 'تقریباً مساوی ہیں اور بالکل مساوی نہیں ہیں۔ یہ شکل (۱۹) کا طریق ن ن ہوگا۔



شکل (۱۹)

انتہا میں جبکہ عقدے قروں میں سکڑ جاتے ہیں تو قرن طریق حاصل ہوتا  
ہے اور چونکہ اس صورت میں دو یا تین طسریوں (Locci) کے  
منطبق ہونے کا سوال نہیں ہے اس لیے جہیز میں قرن طریق کی  
مساوات صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے۔

۶۴۔ نتیجوں کا خلاصہ - جہیز میں حسب ذیل طریق شامل  
ہو سکتے ہیں:

(۱) لفاف،

(۲) (tac-locus) طریق دوسری قوت میں،

(۳) قرن طسری

اور جہیز میں حسب ذیل طریق شامل ہو سکتے ہیں:

(۱) لفاف،

(۲) عقدہ طریق دوسری قوت میں،

(۳) قرن طریق تیسری قوت میں،

ان میں سے صرف لفاف ہی تفرقی مساوات کا حل ہوتا ہے۔ (۵۵)

## ۶۵۔ مثالیں

مثال (۱)  $e^2(2-3m) = m^2(1-m)$

اس کو شکل  $\frac{2-3m}{1-m} \pm = \frac{e^2}{e^2}$  فرلا

میں لکھ لینے سے کابل ابتدائی شکل

$(1-m)^2 = e^2(2-3m)$

میں فوراً حاصل ہوتا ہے

ج ممیز اور ع ممیز علی الترتیب

$0 = (1-m)^2$  اور  $0 = (2-3m)(1-m)^2$

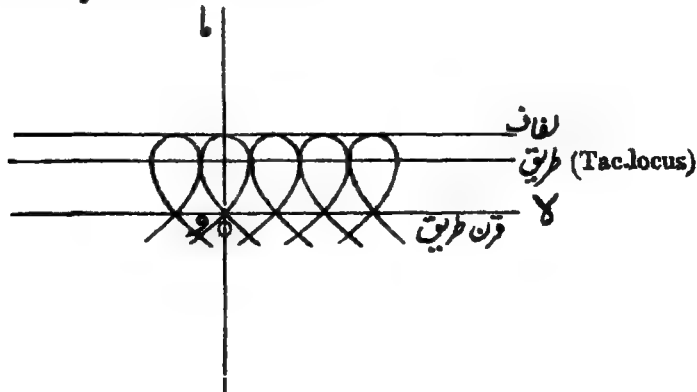
ہیں۔

۱۔  $m=0$ ۔ جو دونوں ممیزوں میں پہلی قوت کے ساتھ شریک ہے لغاف ہے۔

۲۔  $m=0$ ۔ جو ج ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے لیکن ع ممیز میں موجود ہی نہیں ہے عقدہ طریق ہے۔  $2-3m=0$ ۔ جو ع ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے اور ج ممیز میں موجود ہی نہیں ہے (tac-locus) طریق ہے۔

اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ ان تین طریقوں (Loci)

میں صرف لغاف کی مساوات ہی تفرقی مساوات کو پورا کرتی ہے۔



شکل (۲۰)

مثال (۲) دائروں کے قبیل

$$لا + ما + ج۲ + لا۲ = ۱ - ج۲$$

پر غور کرو۔

ج کو (پہلے باب کے طریقوں سے) ساقط کرنے پر تفرقی مساوات

$$۲ ما۲ + ۲ لا۲ + ما + لا = ۱ - ما۲$$

حاصل ہوتی ہے۔

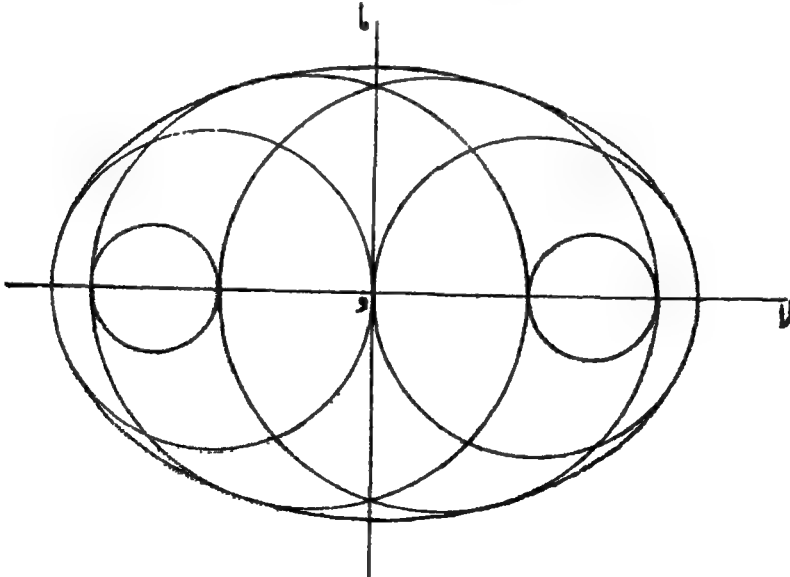
(۷۶) ج اور ع ممیز علی الترتیب حسب ذیل ہیں:

$$لا - ۲(لا + ما - ۱) = ۰ \text{ اور } ۲(لا + ما - ۱) - ۲(لا + ما - ۱) = ۰$$

$$\text{یعنی } لا + ۲ ما - ۲ = ۰ \text{ اور } ما(لا + ۲ ما - ۲) = ۰$$

لا + ۲ ما - ۲ = ۰ سے جو دونوں ممیزوں میں پہلے درجہ میں ہے

لفاف حاصل ہوتا ہے۔ (tac-locus) طریق حاصل ہوتا ہے کیونکہ وہ ع ممیزوں میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے اور ج ممیزوں میں موجود ہی نہیں ہے۔



شکل (۲۱)

وہ دائرہ جو ابتدائی مساوات سے حاصل ہوتا ہے لفاف کو نقطوں

$$(-2, \pm \sqrt{2-1})$$

پر مس کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج عدد  $\frac{1}{2}$  سے بڑا ہو۔

### حل طلب مثالیں۔

حسب ذیل مثالوں میں کامل ابتدائی معلوم کرو اگر تفرقی مساوات دی گئی ہے یا تفرقی مساوات معلوم کرو اگر کامل ابتدائی دیا گیا ہے۔ نیز نادر حل (اگر موجود ہوں) معلوم کرو۔ ترکیبیں کھینچو۔

$$(1) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(2) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(3) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(4) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(5) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(6) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(7) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

$$(8) \quad 3x - 2y = 1, \quad 2x - 3y = 2 \quad \text{ج} \quad 0 = (2-3) - (2-3)$$

۶۶۔ کلیرو کی شکل۔ ہم نے یہ باب مساوات

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

الکلیز کلاؤ کلیرو (Alexis Claude Clairaut) (پیرس کا، ۱۷۱۳ء - ۱۷۶۵ء)  
اگرچہ تفرقی مساواتوں کے سلسلہ میں بہت مشہور ہے لیکن خصوصاً علم ہئیت پر اس کی بہت کچھ لکھا

(۴۴)

سے شروع کیا تھا جو کلیرو کی شکل

(۱) ..... (ع) = ۱ = ۱ + لا + ف (ع) ..... (۱)  
 کی ایک مخصوص صورت ہے۔ کلیرو کی اس عام مساوات کو حل  
 کرنے کے لیے اس کو لائے لحاظ سے تفریق کرو تو

$$ع = ع + \{ لا + ف (ع) \} \frac{فرع}{فر لا}$$

$$(۲) \dots\dots\dots 'ع = ع' = \frac{فرع}{فر لا}$$

$$(۳) \dots\dots\dots 'ع = لا + ف (ع) \dots\dots\dots (۳)$$

(۱) اور (۲) سے کامل ابتدائی

$$(۴) \dots\dots\dots 'ع = ۱ + لا + ف (ع) \dots\dots\dots (۴)$$

حاصل ہوتا ہے جو خطوط مستقیم کا ایک قبیل ہے۔

اگر ہم (۱) اور (۳) سے ع کو ساقط کریں تو صرف بع ممیز ملیگا۔  
 ج ممیز کو معلوم کرنے کے لیے ہم ج کو (۴) اور اس نتیجہ سے ساقط  
 کرتے ہیں جو (۴) کو ج کے لحاظ سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

$$(۵) \dots\dots\dots 'ع = لا + ف (ع) \dots\dots\dots (۵)$$

مساواتیں (۴) اور (۵) مساواتوں (۱) اور (۳) سے صرف  
 اس امر میں مختلف ہیں کہ ع کی بجائے ج ہے۔ اس لیے حاصل استقامت  
 وہی ہیں۔ اس لیے دونوں ممیز لفاظ کو تعبیر کرنے پر باہنیں لے۔

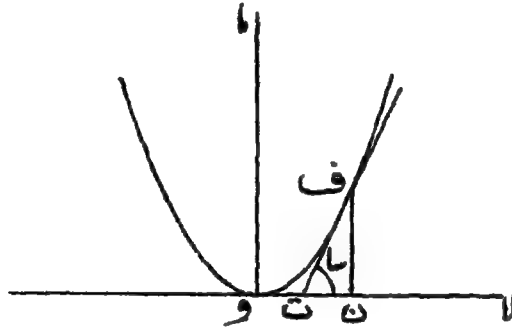
ظاہر ہے کہ خطوط مستقیم کا کوئی قبیل عقدہ طریق یا قرن طریق یا  
 (tac-locus) طریق نہیں رکھ سکتا۔

مساوات (۴) سے یہ اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ کلیرو کی شکل کی

لیکن بعض صورتوں میں ممیز صرف لفاظ ہی کو نہیں بلکہ اس کے  
 انعطافی ماسوں کو بھی تعبیر کرتے ہیں (دفعہ ۶۱)۔

کسی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی کو ع کی بجائے  $\frac{1}{E}$  لکھ کر فوراً لکھ لیا جاسکتا ہے۔

۶۷۔ مثال۔ وہ منحنی معلوم کرو کہ وقت ایسا بدلے جیسے مس سا جہاں ت وہ نقطہ ہے جس پر منحنی کے کسی نقطہ کا مس محور لا کو قطع کرتا ہے اور محور لا کے ساتھ اس کا میلان سا ہے اور و مبداء ہے۔



شکل (۲۲)

شکل سے  $وت = ون - ت ن$

$$= لا - ا مم سا$$

$$= لا - \frac{ا}{ع} ، \text{ کیونکہ مس سا} = ع$$

$$\text{اس لیے } لا - \frac{ا}{ع} = ک ع$$

$$\text{یعنی } ا = ع لا - ک ع^۲$$

اس کی شکل کلیروی ہے، اس لیے کامل ابتدائی

$$ا = ع لا - ک ع^۲$$

(۷۸)

ہے اور نادرجل اس کا مینر ہے یعنی

$$لا = ۴ ک ما$$

مطلوبہ منحنی وہ مکانی ہے جو اس نادرجل سے تعبیر ہوتا ہے۔ کامل ابتدائی خطوط مستقیم کے اس قبیل کو تعبیر کرتا ہے جو اس مکانی کے مماس ہیں۔

### حل طلب مثالیں

حب ذیل تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائی اور نادرجل معلوم کرو۔

مثالوں (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) اور (۶) میں نرسیمات کھینچو۔

$$(۱) ما = ع + لا + ع^۲ \quad (۲) ما = ع + لا + ع^۳$$

$$(۳) ما = ع + لا + جم + ع \quad (۴) ما = ع + لا + ا + ع + ب$$

$$(۵) ع = لوک (ع - لا - ما) \quad (۶) جب ع لا جم = جم ع لا جب ما + ع$$

(۷) اس منحنی کی تفرقی مساوات معلوم کرو کہ مماس محدودوں کے محوروں کے ساتھ مستقل رقبہ ک کا مثلث بنائے، اور اس لیے منحنی کی مساوات صحیح شکل میں معلوم کرو۔

(۸) وہ منحنی معلوم کرو کہ مماس محوروں پر جو مقطوع قطع کرے اُن کا مجموعہ مستقل ہو۔

(۹) وہ منحنی معلوم کرو کہ مماس کا وہ حصہ جو محوروں کے درمیان منقطع ہو مستقل طول کا ہو۔

• (۱۰) تفرقی مساواتوں کی ایسی مثالیں دینا مشکل نہیں ہے جن میں کامل ابتدائی حقیقت میں کامل نہیں ہوتے اور تکمیلی حل لفاف کے مفہوم میں نادرجل نہیں ہوتے۔ فرض کرو کہ ایک تفرقی مساوات

$$ف (لا، ما) فرلا + ق (لا، ما) فرما =$$

دی گئی ہے جس میں مساوات کی دائیں طرف کا جملہ متماثلًا  $و (لا، ما) x$  فرع (لا، ما) کے مساوی ہے۔ تب کامل ابتدائی  $ء (لا، ما) = ج$  کے



علاوہ و (لا، ما) =۔ بھی اس تفرقی مساوات کا حل ہے۔ اب ہم اس ربط پر جو کامل ابتدائی اور تکمیلی حل کے درمیان ہے مثالوں کی مدد سے بحث کریں گے اور پھر ایک عام مسئلہ بیان کریں گے۔  
فرض کرو کہ پہلی مثال کے طور پر ہم تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 1 - \text{ما}$$

کو لیتے ہیں۔ تکمل کا معنی بی طریقہ یہ ہے کہ متغیروں کو جدا کیا جائے چنانچہ اس طرح

$$\text{فرلا} = \frac{\text{فرما}}{1 - \text{ما}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{فرما}} + \frac{1}{1 - \text{ما}}} \text{ فرما}$$

حاصل ہوتا ہے اور اس لیے

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{فرما}} + \frac{1}{1 - \text{ما}}} = \frac{1}{\text{لوک}}$$

اور  $\text{ما} = \text{مسٹر (لا، ج)}$  کا حل ابتدائی لیکن متغیروں کو جدا کرنے میں جزو ضربی  $(1 - \text{ما})$  سے تقسیم کرنا پڑتا ہے جو جائز نہیں ہے اگر یہ جزو ضربی صفر ہو۔ پس آخری نتیجہ میں  $\text{ما} = \pm 1$  کا امکان نہیں ہے جس سے دو ایسے حل حاصل ہوتے ہیں جو کامل ابتدائی میں شریک نہیں ہیں۔ ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ یہ حل نادر حل ہیں لیکن اگر نادر حل کی یہ تعریف کی گئی ہو کہ وہ ایسا حل ہے جو ممیزوں (یہ اصطلاح مخنیوں کے اس قبیل کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جائیگی جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں) کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے تو یہ دو زائد حل نادر حل نہیں ہیں۔ وہ ممیزوں کے مشترک متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں اور ان کا کوئی لفاف نہیں ہے۔ یہ یاد ہو گا کہ لفاف کی یہ تعریف کیجاتی ہے کہ وہ ایک ایسا منحنی ہے جو مخنیوں کے ایک قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے ایک رکن سے مس ہوتا ہے۔

اس تعریف کے دوسرے حصہ کی رو سے مشترک متقارب خارج از بحث ہو جاتا ہے کیونکہ وہ قبیل کے ہر رکن سے صرف ایک نقطہ پر مس ہوتا ہے یعنی اس نقطہ پر چولا تنہا ہی پر ہے۔ پس یہ دو زائد حل اسی نوعیت کے ہیں جو کامل ابتدائی میں شامل رہتے ہیں، اس لئے اگر ہم خالص منطقی نقطہ نظر سے دیکھیں تو اس کو بجا طور پر غیر کامل کہہ سکتے ہیں۔ لیکن اگر ما = مس (لا + ج) دیا گیا ہو تو ہم ج =  $\infty$  لیکر ما =  $\pm$  ۱ ما خود ذکر کرتے ہیں۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ جب ج بہت بڑا ہوتا ہے تو اوپر کا متقارب ما = مس (لا + ج) کے اس حصہ کے بہت قریب ہوتا ہے جو مبداء کے نزدیک ہے۔ متناظر نتیجہ نیچے کے متقارب کے لئے درست ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں مثال میں بقیہ ابتدائی (Residual Primitive) کامل ابتدائی کی دو انتہائی شکلوں سے بنا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اختیاری مستقل کی شکل میں بظاہر خفیف تبدیلی اس امر کا باعث ہو سکتی ہے کہ کامل ابتدائی میں ایک انتہائی شکل شامل کی جائے مثلاً اگر اوپر کے مثل شکل میں ہم ج کی بجائے ۱/۲ لوگ کر رکھیں تو  $\frac{1}{1-1} = ک$  کو حاصل ہوتا ہے اور ک = ۰ سے حل ما = ۱ ملتا ہے۔ لیکن ک = ۰ ج =  $\infty$  کے معادل ہے، پس دوسری شکل میں بھی وہی منطقی شکل پیش ہوتی ہے جو پہلی شکل میں تھی۔ وہ رفع نہیں ہوئی، صرف پوشیدہ ہے۔ ذرا کم واضح مثال ما = مس (لا + ج) ہے جو تفرقی مساوات

$$\frac{فر}{لا} = ۱ + ما$$

سے حاصل ہوئی ہے۔ بقیہ ابتدائی ۱ + ما = ۰ ہے۔ پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ میزوں کے کوئی مشترک متقارب نہیں ہیں لیکن ایسا نہیں ہے۔ متقارب حسب سابق موجود ہیں، صرف وہ خیالی ہیں اور خیالی میزوں سے ماخوذ ہوتے ہیں۔ ما =  $\pm$  خر کو ما = مس (لا + ج) کی

انتہائی شکل کے طور پر حاصل کرنے کے لیے ج کی بجائے خ رکھو  
یہاں ک حقیقی ہے اور پھر  $\pm \infty$  لو۔ یہ عمل بالکل جائز ہے۔  
تفرقی مساواتوں کے ابتدائی اپنی عمومیت کھودیتے ہیں اگر اختیاری  
مستقلوں کو تمام قیمتیں اختیار کرنے نہ دیا جائے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں  
یا خیالی یا ملطف۔

ایک دوسری مثالی تفرقی مساوات

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{y}{x}$$

سے پیدا ہوتی ہے جس کا کائل ابتدائی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + j)$  اور  
بقیہ ابتدائی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ہے۔ بقیہ ابتدائی اب ایک حقیقی خط ہے جو خیالی  
میزوں کا ایک مشترک متقارب ہے۔ اس کو ج کی بجائے خ رکھ  
رکھ کر اور پھر  $\pm \infty$  لیکر اندک کیا جاسکتا ہے۔ ایک نادر حل  
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ابھی ہے جو لفات کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ مثال کچھ مبہم کا موضوع  
رہی ہے۔ غ مینر  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ہے اور اگر ہم نادر حل کی یہ تعریف کریں  
جیسا کہ بعض مصنفوں کا خیال ہے کہ وہ ایسا حل ہے جو ع مینہ کو معدوم  
کرتا ہے تو  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  کو نادر حل کے طور پر خیال کیا جاسکتا ہے۔ پہلی دو تفرقی  
مساواتوں میں جو پہلے رتبہ کی ہیں کوئی ش مینر موجود نہیں ہے۔ اس لیے  
بقیہ ابتدائی کو ان سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ چونکہ ان تمام تین مثالوں  
میں بقیہ ابتدائی ایک ہی نوعیت کے ہیں کیونکہ وہ مشترک متقاربوں  
کو تعبیر کرتے ہیں اس لیے نادر حل کی وہ تعریف جو لفات سے متعلق ہے قابل ترجیح  
معلوم ہوتی ہے۔ دوسری تعریف میں بلاشبہ بیان کا اختصار اور سادگی موجود  
ہے لیکن اس میں بعض لازمی ہندسی اختلافوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

حسب ذیل مثال سے ایک دوسرے ہم راہ کا اظہار ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات کو شکل

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔ جزو ضربی (ما-ا) سے نادرجل حاصل ہوتا ہے  
 لیکن یہ جزو ضربی ایک ایسے قوت نما میں وقوع پذیر ہوا ہے جو صفر اور  
 ا کے درمیان ہے۔ جزو ضربی ما جس سے بقیہ ابتدائی حاصل ہوتا ہے ایسے  
 قوت نما کے ساتھ واقع ہے جو ا ہے۔ اس سے سادہ مثال  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{\text{ن}}$   
 میں (جہاں ن < ۰)

$$(ا-ن)(ن+ج) = \text{ما}^{\text{ن}}, \text{ اگر } ن = ۱$$

اور لا+ج = لوک ما، اگر ن = ۱  
 حاصل ہوتے ہیں۔ ما =۔ ہمیشہ ایک تکملہ ہے لیکن وہ ایک بقیہ ابتدائی  
 ہے جو ج =۔۔۔ یعنی سے جبکہ ن < ۱ ما خود کیا گیا ہے لیکن اگر ن > ۱  
 تو ما =۔ ایک نادرجل ہے (لفاف کے مفہوم میں) اس سے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{گ}(ما)$   
 کے لیے ایک متناظر مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر گ (ما) میں جزو ضربی  
 (ما-ا) کی موجودگی کی وجہ سے گ (ا) معدوم ہو تو ما = ا ایک  
 بقیہ ابتدائی ہوگا اگر ن <۔ لیکن وہ ایک نادرجل ہوگا اگر ن > ۱-  
 ۰۔ (ب)۔ بقیہ ابتدائیوں سے جو متقارب تعبیر ہوتے ہیں ان کا خطی  
 ہونا ضروری نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلی مثال  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ا-ما$  میں  
 ما کی بجائے ما-لا رکھ کر اس کو تحلیل کرتے ہیں۔ اس سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱ + لا - لا۲ + لا۳ - لا۴ + ما$$

حاصل ہوتا ہے اور کمال ابتدائی

$$ما = لا + مسر(لا+ج)$$

ہے۔ بقیہ ابتدائی ما = لا ± ا، میزوں کے مشترک مکافی متقاربوں کو

تعبیر کرتا ہے۔  
عام طور پر ہم ماکے بجائے م۔ ف (لا) رکھ سکتے ہیں اور وہ شرطیں  
بیان کر سکتے ہیں کہ اس سے تفرقی مساوات  $\frac{\text{فرما}}{\text{و}} = \text{گ (لا، م)}$  کا بقیہ

ابتدائی حاصل ہو یا نادرصل۔ لیکن زیادہ عام مساوات  
ف (لا، م) فرلا + ق (لا، م) فرما = و (لا، م) × فرع (لا، م) = ۰۔  
پر بحث کرنا زیادہ مناسب ہے۔ حل و (لا، م) = ۰۔ مختلف قسموں کا  
ہو سکتا ہے۔ اولاً فرض کرو کہ جزئی مشتق  $\frac{\partial}{\partial \text{ع}}$  میں سے ایک یا  
دونوں لامتناہی ہو جاتے ہیں جبکہ و = ۰۔ اگرچہ خود  $\frac{\partial}{\partial \text{ع}}$  اور  $\frac{\partial}{\partial \text{ع}}$  (= ف)  
اور  $\frac{\partial}{\partial \text{ع}}$  (= ق) سب محدود رہتے ہیں۔ تب و = ۰۔ ایک نادرصل  
ہو گا جو ایک لفاف کو تعبیر کریگا۔ مثلاً

$$\begin{aligned} & \text{فرلا} + \{1 + (لا + م)\} = \text{فرما} = ۰ \\ & \text{کوشل} \quad (لا + م) \times \text{فر} + \{2 + (لا + م)\} = ۰ \\ & \text{میں لکھا جاسکتا ہے اور اس سے کامل ابتدائی} \\ & م + 2 + (لا + م) = ۰ \end{aligned}$$

اور نادرصل

لا + م = ۰۔  
حاصل ہوتے ہیں۔ میزنا مکمل مکانی ہیں جن میں سے ہر ایک اس نقطہ  
پر اچانک ختم ہو جاتا ہے جہاں وہ لفاف کو مس کرتا ہے کیونکہ (لا + م)  
منفی نہیں ہو سکتا اگر (لا + م) حقیقی ہے۔ غائب حصے  $1 - 2 + (لا + م) = ۰$   
سے حاصل ہوتے ہیں۔ لیکن اس کے بہت ہی مشابہ تفرقی مساوات

$$\text{فرلا} + \{1 + (لا + ما)^{\frac{1}{2}}\} \text{ فرما} =$$

کے ممیز اوپر کی طرح اچانک ختم نہیں ہو جاتے۔ اس کا کابل ابتدائی

$$ج = \frac{3}{2} + ما - \frac{1}{2}(لا + ما)^{\frac{1}{2}}$$

اور نادرصل  $لا + ما = ۰$

ہے۔

$$\text{لا فرلا} + \{ما + (لا + ما)^{\frac{1}{2}}\} \text{ فرما} =$$

کی صورت میں نادرصل  $لا + ما = ۰$  ہے، اس کو صرف تنہا نقطہ (۰،۰) کی بجائے یہ سمجھنا چاہئے کہ وہ نامکمل مکافوں

$$ما + (لا + ما)^{\frac{1}{2}} = ۰$$

کے دو خیالی لفافوں  $ما = \pm$  خرلا کو تعبیر کرتا ہے۔

ثانیاً فرض کر دو کہ  $و = ۰$  سے خود  $ع$  بھی لامتناہی ہو جاتا ہے اور  $ع$  اور  $ع$  میں سے ایک یا دونوں بھی لامتناہی ہو جاتے ہیں لیکن

$ع$  اور  $ع$  محدود رہتے ہیں۔ تب  $و = ۰$  سے کابل ابتدائی کی ایک انتہائی شکل حاصل ہوگی جو اختیاری منتقل کی لامتناہی قیمت کے متناظر ہوگی۔

مثلاً

$$\text{فرلا} + \{1 + (لا + ما)^{\frac{1}{2}}\} \text{ فرما} = (لا + ما)^{\frac{1}{2}} \times \{2 - ما - (لا + ما)^{\frac{1}{2}}\} =$$

سے کابل ابتدائی

$$ج = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(لا + ما)$$

حاصل ہوتا ہے اور  $لا + ما = ۰$ ، ممیزوں کے مشترک متقارب کو تعبیر

کرتا ہے۔ ثالثاً  $ع' ا' ع''$ ،  $ع' ا' ع''$  سب محدود ہو سکتے ہیں جبکہ  $و = ۰$ ۔

اس صورت میں  $ع' ا' ع''$  سے  $ف$  اور  $ق$  دونوں معدوم ہوتے ہیں اور اس کامیابیوں کے ساتھ کسی قسم کا ہندسی تعلق رکھنا ضروری نہیں ہے۔  
ایسے حل کو حقیر (Trivial) کہا جاسکتا ہے۔ مثلاً

$$(لا + ما) \frac{1}{2} ق + ۲(لا + ما) \frac{1}{2} ما = ۰$$

سے قابل ابتدائی  $لا - ما = ج$

اور حقیر حل  $لا + ما = ۰$

ما حاصل ہو رہے ہیں۔ اس تفرقی مساوات کے متعلق یہ سمجھنا مناسب ہے کہ وہ سادہ تفرقی مساوات  $ف - ۲ ما = ۰$  اور جبری مساوات  $(لا + ما) = ۰$  کے اتحاد سے پیدا ہوئی ہے۔ حقیر حل مخالف شرکاء کے ایسے اتحادوں کا ناخواستہ نتیجہ ہوتے ہیں۔ اب ہم وہ شرطیں بیان کریں گے جن سے ایسے حل خارج ہو جائیں گے اور ہم نادر حلوں اور انتہائی شکلوں میں

تمیز کر سکیں گے۔ مساوات  $و (لا + ما) = ۰$  کی بنیادے اس سے زیادہ سادہ مساوات  $ما = ف (لا)$  پر غور کرنا موجب سہولت ہوگا، یہ مساوات  $و = ۰$  کے نتیجوں میں سے ایک ہے۔ دوسرے نتیجوں پر جداگانہ بحث کیا جاسکتی ہے۔ ذیل میں ہم صرف اُس صورت پر غور کریں گے جس میں  $ف (لا)$  حقیقی ہے کیونکہ مسئلہ ایک ایسی شکل میں ہے جو صرف اُس وقت اطلاق پذیر ہو سکتا ہے جبکہ تمام خیالی اعداد خارج ہوں۔ فرض کرو کہ زیر بحث علاقہ میں  $ف (لا + ما)$  اور  $ق (لا + ما)$  وحید القیمین محدود اور مسلسل (ممكن ہے ایک ہی جانب جیسا کہ جذر المربعوں اور دوسرے تغاقلوں کی صورت میں ہوتا ہے جو دلیل کی منفی قیمتوں کے لیے خیالی ہو جاتے ہیں) تفاعل ہیں اور

ط = ۱ - ف (لا) =  
 کے عین قریب (ممكن ہے ایک ہی جانب) ان کی علامت مستقل ہے۔  
 ف اور ق دونوں کو صفر نہیں ہونا چاہئے جبکہ ط = ۰۔ (اگر ابتداً  
 یہ شرط پوری نہ ہو تو ایک مناسب جزو ضربی سے تقسیم کر کے ہمیشہ  
 ان کو ایسا بنایا جاسکتا ہے)۔ تب اگر ف + ق ف (لا) میں  
 م کی بجائے ط + ف (لا) رکھنے سے نتیجہ ع (لا ط) حاصل  
 ہو تو وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ ط = ۰ ایک نادر حل ہو یہ  
 ہیں کہ ع (لا) = ۰۔ اور م ع (لا ط) اپنی زیرین حد پر زیر بحث  
 علاقہ میں لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہو۔ اگر صرف  
 یہی شرط پوری ہو تو تکملہ ط = ۰ ایک خاص تکملہ ہو گا جو کامل  
 ابتدائی سے مستقل کو ایک خاص قیمت (ممكن ہے لاتنا ہی)

دیکر حاصل کیا جاسکیگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلہ پوائسن کے زمانہ  
 سے ہے کیونکہ اس نے اس کی ایک مخصوص صورت ثابت کی تھی۔ بول  
 (۱) نے اس کی تقسیم کی لیکن اس کے ثبوت میں وہ نزاکتیں موجود نہیں ہیں  
 جن کی موجودہ علم التحیل میں ضرورت ہے۔

اس مسئلہ کو اس دفعہ کی دوسری مثال پر استعمال کرنے سے

$$ف + ق ن (لا) = ۱ - \{ ۱ + (لا + م) \} = - (لا + م)$$

$$= ط = ع (لا ط) = ع (لا) = ۰$$



$$\text{اور } \frac{\text{ط}}{\text{ع (لا ط)}} = \frac{\text{فرط}}{\text{ط}} = \frac{1}{2} \text{ ط}$$

یہ مستحق ہے، اس لیے ط = . سے ایک نادر حل حاصل ہوتا ہے۔  
 اسی طرح تیسری مثال میں ع (لا ط) = ط جس سے ایک  
 مستحق تکملہ حاصل ہوتا ہے اور ایک نادر حل ملتا ہے۔ لیکن پانچویں  
 مثال میں ع (لا ط) = ط اور تکملہ متسع ہے، اس لیے ط = .  
 ایک خاص تکملہ ہے۔ چونکہ یہ مسئلہ صیغہ حقیقی متغیروں کی صورت میں  
 ہی اطلاق پذیر ہے اس لیے اس کو جو بھی مثال پر استعمال نہیں کیا جاسکتا  
 اس طریقہ کی اہمیت کو واضح کرنے کے لیے ہم اس کو مثال

$$\frac{\text{فرما}}{\text{ص}} = \frac{1}{2} \text{ ص}$$

پر استعمال کریں گے جہاں ص، لا اور ما کا ایک ایسا تفاعل ہے جو  
 کے لیے یہ تو صفر ہے نہ لا متناہی۔ بل نے یہ بیان کیا تھا کہ وہ کوئی  
 ایسے طریقہ سے واقف نہیں جس سے اس سوال کا نصفیہ ہو سکے کہ آیا = . نادر حل

ہے یا نہیں۔ لیکن اگر ہم ما = کے لیے قیو کی قیمت صفر لیں (جو حقیقت میں  
 غیر متعین ہے، صفر کے طور پر) تاکہ تفاعل ایک جانب مسلسل (یا کی پشت  
 قیمتوں کے لیے) ہو جائے اور اگر ص پر ایسی شرطیں عائد کی جائیں جن  
 اوراق کی شرطوں کے مشابہ ہوں تو ہم اپنے مسئلہ کو اس مثال پر استعمال  
 کر سکتے ہیں۔ تکملہ ط = فرما / ص (لا ما) متسع ہے، اس لیے ما = . ایک

خاص تکملہ ہے اور نادر حل نہیں ہے۔  
 یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نادر حل کی شرطوں سے یہ ضروری ہے  
 (لیکن کافی نہیں) کہ سروں ع اور قیو میں سے کم از کم ایک میں ایسا  
 تفاعل شریک رہنا چاہئے کہ ایک ندرت ہو مثلاً (لا + ما) = 1/2 -

## حصے باب پر متفرق مثالیں

طلوں کو جہاں ممکن ہو ترسیموں سے واضح کرو۔

(۱)  $ع + ۲ لا = ۳ لا$  کا امتحان نادر طلوں کے لیے کرو۔

(۲)  $لا + ۲ ع = (لا + ۲ ع) + لا = لا + لا = ۲ لا$

ما =  $۲ ع$  کے ذریعہ کلیرو کی شکل میں تحویل کرو۔

پس ثابت کرو کہ یہ مساوات مخروطیوں کے ایک ایسے قبیل کو تعبیر کرتی ہے جو ایک مربع کے چار ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ  $لا + ۲ ع = (لا + ۲ ع) + لا = لا + لا = ۲ لا$

ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتے ہیں جن کے ماسکے (۱۰) پر ہیں اور جو ان چار خیالی خطوں کو مس کرتے ہیں جو ماسکوں کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں سے ملاتے ہیں۔

(۴) ہندسی استدلال یا اور طرح سے ثابت کرو کہ اندراج

$لا = لا + ب ما = لا + ۲ ع + ب ما$

سے کلیرو کی شکل کی کوئی تفرقی مساوات کلیرو کی شکل کی دوسری مساوات میں تبدیل ہوتی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ  $ع + ۲ لا = لا + ۲ ع = ۲ ع + لا$

کابل ابتدائی  $(لا + ۲ ع) = ۲ ع + لا$

ع مینر  $ما (لا + ۲ ع) = ۲ ع + لا$

ج مینر  $ما (لا + ۲ ع) = ۲ ع + لا$

اور ہے۔ ان مینروں کی تعبیر بیان کرو۔

(۶) تفرقی مساوات

$لا + ۲ ع + ما = لا + ۲ ع + ما + لا = لا + لا + ۲ ع = ۲ لا + ۲ ع$

کو اندراج ضا =  $ما + لا = لا + لا$  سے کلیرو کی شکل میں تحویل کرو۔

پس اس سے یا اور طرح مساوات کو حل کرو۔  
ثابت کرو کہ  $ما + لا = ۰$  ایک نادر حل ہے، اور  $ما = ۰$  لاف کا  
ایک حصہ اور معمولی حل کا ایک حصہ دونوں ہے۔ [لندن]

$$(۷) \quad ما (ما - لا) = لا \left( \frac{فر}{فر - لا} \right) \text{ کو حل کرو، یہ مساوات}$$

مناسب اندراجوں سے کلیرونگی شکل میں مستحیل ہو سکتی ہے۔ [لندن]  
(۸) تفرقی مساواتوں

$$(۱) \quad ۳(ع + لا) = (ع - لا)^۲$$

$$(۲) \quad ما^۲ (۱ + ع) - ۲ع لا ما - ۱ = ۰$$

کو تکمل کرو۔

(۲) میں نادر حل معلوم کرو اور ان اجزائے ضربی کی اہمیت بتاؤ  
جو واقع ہوتے ہیں۔ [لندن]

(۹) ثابت کرو کہ قبیل

$$ما^۲ - ۲ج لا ما + ج^۲ (لا - لا^۲) = ۰$$

کے تمام منحنی مبدا پر قرن رکھتے ہیں اور وہ محور لا کو مس کرتے ہیں۔  
ج کو ساقط کر کے قبیل کی تفرقی مساوات کو شکل

$$۴ج^۲ لا (لا - ۱) - ۴ع لا ما (۳ - لا) + (۱۶ - لا - ۹) ما^۲ = ۰$$

میں حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ دونوں ممیز شکل لا ما^۲ = ۰ اختیار کرتے ہیں لیکن یہ کہ  
لا = ۰ حل نہیں ہے اور ما = ۰ ایک خاص تکملہ ہے۔

[اس مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہمارا نظریہ ترمیم کے بغیر  
منحنیوں کے ایسے قبیلوں پر اطلاق پذیر نہیں ہوتا جن کا ایک قرن ایک  
ثابت نقطہ پر ہو۔]

$$(۱۰) \quad ثابت کرو کہ \quad ۲ + ۲ \left( \frac{فر}{فر - طه} \right)^۲ = ۱$$

کا کامل ابتدائی برنولی کے مساوی دو چیمبی منحینوں کے قبیل  
 $r^2 = r^2 \text{ جم } 2 (ط - ع)$   
 کو تعبیر کرتا ہے جو دائرہ  $r = 1$  میں کھینچے گئے ہیں، یہ نادر مل ہے اور نقطہ  
 $r = 1$  عقدہ طریق ہے۔

(۸۰)  $(11) \quad \left( \frac{فر}{فرطه} \right) + r^2 - r^2 = 0$

کا کامل ابتدائی اور نادر مل معلوم کرو اور ان کی تعبیر بیان کرو۔

(۱۲) ثابت کرو کہ  $r = ط - \frac{فر}{فرطه} - \left( \frac{فر}{فرطه} \right)^2$

کا کامل ابتدائی  $r = ج - ط - ج^2$  اور نادر مل  $r = ط$  ہے۔  
 اس امر کی تصدیق کرو کہ نادر مل کا مل ابتدائی کو نقطہ (ج، ج)  
 پر مس کرتا ہے جہاں مشترک مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ زاویہ مس آج  
 بناتا ہے۔

[نادر ملوں پر مزید بحث دفعات ۱۶۰ اور ۱۶۱ میں ملے گی جن میں  
 ان شکلوں کا ذکر کیا گیا ہے جو ان کی تعریف اور لفاف کی تعریف  
 میں پیش آتی ہیں، نیز ممیزوں میں خاص ملوں کا واقع ہونا، حدود کا  
 تصور، اور ممیزوں کو محسوب کرنے کے طریقے بیان کئے گئے ہیں۔  
 ان سے اوپر کی مثالوں (۷) اور (۹) پر مزید روشنی پڑے گی۔]



# ساواتوں کا باب

دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی مساواتوں کیلئے متفرق طریقے

۶۸۔ اس باب میں ہم بالخصوص دو سرے رتبہ کی مساواتوں کو پہلے رتبہ کی مساواتوں میں تخیل کرنے کے طریقوں پر غور کریں گے۔ ہم ثابت کریں گے کہ رتبہ کی ایسی تخیل ہمیشہ عمل میں آ سکتی ہے اگر

(۱) مساوات میں با صریحی طور پر شامل نہ ہو،

یا (۲) مساوات میں لا صریحی طور پر شامل نہ ہو،

یا (۳) مساوات متجانس ہو۔

مساوات کی ایک خاص شکل جس کی کچھ اہمیت حرکیات میں ایک متکمل جزو ضربی کے استعمال سے نچلے رتبہ میں تخیل کی جاسکتی ہے۔ باب کا بقیہ حصہ خطی مساوات کے لیے وقف ہو گا لیکن اس سے وہ سادہ صورت جس میں یہ صرف مستقل ہوتے ہیں خارج کر دی گئی ہے کیونکہ اس پر تفصیلی بحث تیسرے باب میں کی جا چکی ہے۔ یہ معلوم ہو گا کہ دوسرے رتبہ کی خطی مساوات پہلے رتبہ کی مساوات میں تخیل ہو سکتی ہے اگر

(۱) عامل کے اجزاء ضربی ضربی نکل سکیں،

یا (۲) کوئی ایک تکملہ جو متمم تفاعل سے متعلق ہو معلوم ہو۔

اگر کامل متمم تفاعل معلوم ہو تو مساوات کو مبدلوں کے تغیر کے

طریقہ سے حل کیا جاسکتا ہے۔ یہ عمدہ طریقہ (جو لگرائج سے منسوب ہے) ہر رتبہ کی خطی مساوات پر اطلاق پذیر ہے۔

خطی مساوات پر مزید معلومات مثلاً ٹیک مساواتوں کے لیے شرط، 'معادلیت کی شرط غیر متغیرہ والی' سٹارز میں شوق وغیرہ مسئلوں کی شکل میں اس باب کے ختم پر متفرق مثالوں کے درمیان ملیں گی اور ساتھ ہی ایسے اشارے دیئے جائیں گے کہ طالب علم خود ان کو حل کر سکے۔

لا کے لحاظ سے تفرقوں کو ظاہر کرنے کے لیے لاحق استعمال (۸۲) کئے جائیں گے مثلاً  $\frac{1}{x}$  کے لیے ما استعمال کیا جائیگا لیکن جب متبوع متغیر لا کے سوا کوئی اور ہو تو تفرقی سروں کو پوری طرح لکھا جائے گا۔

۶۹۔ ما غائب۔ اگر ماصری طور پر دوسرے رتبہ کی مساوات

میں واقع نہ ہو تو ما کی بجائے ع اور ما کی بجائے  $\frac{فرع}{فرع}$  لکھو۔

اس طرح ایک مساوات حاصل ہوگی جس میں صرف  $\frac{فرع}{فرع}$ ، ع، اور لا شامل ہوں گے اور اس لیے وہ پہلے رتبہ کی مساوات ہوگی۔ مثلاً لا ما + ما = م لا پر غور کرو۔

یہ مساوات لا  $\frac{فرع}{فرع}$  + ع = م لا میں تحویل ہوتی ہے۔ اور اس کو فوراً مکمل کیا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} لا ع &= ۱ + لا^۲ \\ ع &= ۱ + لا^۲ \end{aligned}$$

پہنچنے  
یعنی

مکمل کرنے پر  $ما = لا + ۱$  لوک لا + ب

جہاں ۱ اور ب اختیاری مستقل ہیں۔  
اس طریقہ کو اُس وقت بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جبکہ ن ویں  
رتبہ کی مساوات کو جس میں ماصریحی طور پر موجود نہ ہو (ن-۱) ویں  
رتبہ کی مساوات میں تحویل کرنا ہو۔

۷۰۔ لا غائب۔ اگر لاصریحی طور پر موجود نہ ہو تو تب بھی

ما کی بجائے ع لکھا جاسکتا ہے لیکن با کی بجائے ع  $\frac{فرع}{فرما}$  لکھنا ہوگا

کیونکہ ع  $\frac{فرع}{فرما} = \frac{فرما}{فرلا} = \frac{فرع}{فرلا} = \frac{فرع}{فرلا}$ ۔ اس عمل سے

دوسرے رتبہ کی مساوات (جس میں لا نہ ہو) پہلے رتبہ کی مساوات میں

(جس میں متغیر ع اور ما ہوں) تحویل ہوتی ہے۔

مثلاً مساوات  $ما = با$

مساوات  $ما ع = \frac{فرع}{فرما}$

میں ستھیل ہوتی ہے اور اس سے

$ما = با$  اور  $ما = لا + ۱$

بآسانی حاصل ہوتے ہیں۔

حل طلب مثالیں

(۱)  $ما = لا + ۱$

(۲)  $ما = با + ۱$

(۳)  $ما = ۱ + با$

(۴)  $ما = ۲ + با$

کو پچھلی مثال

میں تحویل کر کے حل کرو۔

$$\frac{U}{\rho} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U \, r \, dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U \, r \, dr \quad (5)$$

$$k = \frac{r^2(1 + \frac{r^2}{4})}{4} \quad (4)$$

مفہوم بیان کرو۔

(۸) ایک خاص منحنی کا نصف قطر انحناء عماد کے اس طول کے مساوی ہے جو منحنی اور محور لا کے درمیان قطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ منحنی ایک زنجیرہ ہے یا ایک دائرہ بموجب اس کے کہ وہ محور لا کی جانب محذب ہو یا مقعر۔

(۹) اُس منحنی کی تفرقی مساوات معلوم کرو اور حل کرو جس کی قوس کا طول ایک ثابت نقطہ ۱ سے ایک متغیر نقطہ  $\phi$  تک اُس زاویہ کے مماس کے متناسب ہے جو  $\phi$  پر کے مماس اور محور لاکے درمیان ہے۔

۱۷۔ متجانش مساواتیں۔ اگر لا اور ماکو بعد اکا سمجھا جائے تو

ماہ کا بعد صفر ہے  
ماہ کا بعد - ۱ ہے  
ماہ کا بعد - ۲ ہے

وغیرہ۔ ہم متجانش مساوات کی یہ تعریف کرتے ہیں کہ وہ ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں تمام رتعیں ایک ہی بعد کی ہوتی ہیں۔ دوسرے باب میں پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانش مساواتیں زیر بحث آچکی ہیں اور تیسرے باب میں متجانش خطی مساوات

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$



(جہاں 'ب'... 'گ' صرف مستقل عدد ہیں) پر بحث کی جا چکی ہے جس میں ہم نے اندراج لا = قویات = لوک لا استعمال کیا تھا۔ فرض کرو کہ ہم یہی اندراج متجانس مساوات

$$لا مام + لا مام = ۳ مام \dots \dots (۱)$$

میں کرتے ہیں۔

$$اب \quad \frac{لا}{قوت} = \frac{فرما}{قوت} = \frac{۱}{لا} = \frac{فرما}{قوت}$$

$$۱ = \frac{فرما}{قوت} = \frac{فرما}{قوت} + \frac{فرما}{قوت} = \frac{فرما}{قوت} + \frac{فرما}{قوت}$$

$$= \frac{فرما}{قوت} + \frac{فرما}{قوت} = \frac{فرما}{قوت} + \frac{فرما}{قوت}$$

$$= \frac{فرما}{قوت} + \frac{فرما}{قوت} = \frac{فرما}{قوت} + \frac{فرما}{قوت}$$

(۱) میں درج کرو اور لا سے ضرب دو تو

$$ما = \left( \frac{فرما}{قوت} \right) + \left( \frac{فرما}{قوت} \right) = ۳ \frac{ما}{قوت}$$

$$یعنی \quad ما = \left( \frac{فرما}{قوت} \right) + \left( \frac{فرما}{قوت} \right) = ۲ \frac{ما}{قوت}$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جس میں ت غائب ہے اور اس لئے وہ ان مساواتوں کے مشابہ ہے جو پچھلے دفعہ میں حل کی گئی تھیں اور جن میں لا غائب تھا۔

$$\frac{فرما}{قوت} = ق رکھ کر غالب علم آسانی سے$$

$$ما ق = ۲ (ما + ب)$$

حاصل کر سکتا ہے اور اس سے

$$ت + ج = \frac{1}{م} \text{ لوک } (ما + ب)$$

$$پس \quad ما + ب = نو (ت + ج)$$

$$= (لا + نو) کی بجائے دوسرا اختیاری$$

مستقل رکھنے سے۔

۷۲۔ دفعہ ۱ء کی مثال بہت آسانی سے حل ہوئی جس کی وجہ یہ ہے کہ لا کو ما کے ساتھ اور لا کو ما کے ساتھ وابستہ کرنے کے بعد کوئی زائد لا نہیں بچا۔ واقعہ یہ ہے کہ اس کو شکل

$$ما (لا + ما) + (لا + ما) = ۳ ما (لا + ما)$$

میں لکھا جاسکتا تھا۔

$$\text{لیکن } (لا + ما) (ما - لا + ما) + لا ما = \dots (۲)$$

کیونکہ اس طرح نہیں لکھا جاسکتا۔ اس کو پھیلی مثال کے مشابہ شکل میں تحویل کرنے کے لیے رکھو ما = ولا یہ وہی اندراج ہے جس کو دوسرے باب کی مثالیں مساواتوں کے لیے استعمال کیا گیا تھا۔

مساوات (۲) ہو جاتی ہے

$$(لا + لا) (ولا - ولا - ولا) + ولا (لا + لا + لا) = ۰$$

$$یعنی \quad - (۱ + ولا) + ولا (لا + لا + لا) = ۰$$

اور اس کو لکھا جاسکتا ہے

$$ولا (لا + لا) = (۱ - ولا) لا \dots (۳)$$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۶۴ اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کیلئے متفرق طریقے

اب ہم حسب سابق عمل کرتے ہیں اور لا = فو رکتے ہیں تو

$$\frac{فرو}{فرت} = لا$$

$$لا^۲ = \frac{فرو^۲}{فرت^۲} - \frac{فرو}{فرت} \quad اور$$

پس مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$وا^۲ = \left( \frac{فرو^۲}{فرت^۲} - \frac{فرو}{فرت} \right) = (۱ - ۱^۲) \frac{فرو}{فرت}$$

یعنی  $وا^۲ = \frac{فرو^۲}{فرت^۲} - \frac{فرو}{فرت}$  ..... (۴)  
جس میں ت غائب ہے۔

$$حسب سابق رکھو  $\frac{فرو}{فرت} = ق$ ،  $\frac{فرو^۲}{فرت^۲} = ق^۲$  فرق$$

تو مساوات (۴) ہو جاتی ہے  $وا^۲ = ق^۲ - ق$

یعنی  $\frac{فرو}{فرت} = ق = (۱ - ق) (۱ + ق)$  جس سے ماہج لا حاصل ہوگا

$$\frac{فرو}{فرت} = ق = ۱ - \frac{۱}{۱ + ق}$$

$$فرت = \frac{۱ + ق}{۱ - ق} = (۱ + \frac{۱}{۱ + ق}) (۱ + ق)$$

$$ت = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۱ + ق} (۱ - ق) = ۱ + ۱ + \frac{۱ - ق}{۱ + ق}$$

اور بالآخر  $لا = \frac{۱ + ق}{۱ - ق} + \frac{۱}{۱ + ق} (۱ - ق) = ۱ + ۱ + \frac{۱ - ق}{۱ + ق}$

۳۷۔ پچھلے دفعہ کے مطابق عمل کر کے ہم دوسرے رتبہ کی کسی متجانس (۸۵)

تفرقی مساوات کو پہلے رتبہ میں تحويل کر سکتے ہیں۔  
کسی ایسی مساوات کو شکل

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

میں تحويل کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً دفعہ ۱ کی مساوات جب اس کو اسے تقسیم کیا جاتا ہے تو

$$\left(\frac{y}{x}\right) \text{ لا } y + y^2 = 3\left(\frac{y}{x}\right) \text{ لا } y$$

ہو جاتی ہے اور دفعہ ۲ کی مساوات 'لا' سے تقسیم کرنے پر

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(\frac{y}{x} - 1\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \text{ لا } y = 0$$

ہو جاتی ہے۔

اندر اجازت:  $y = 1$  اور  $x = 0$  سے

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \text{ اول } f\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \text{ لا } y + y^2 = 3\left(\frac{y}{x}\right) \text{ لا } y = 0$$

میں اور پھر  $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$  اور  $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$  اور  $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$  میں متجمل ہوتی ہے جس میں غائب ہے اور اس لیے وہ پہلے رتبہ میں تحويل پذیر ہے۔

حل طلب مثالیں

$$(1) \text{ لا } y - \text{لا } y + y = 0 \quad (2) \text{ لا } y - \text{لا } y + y = 0$$

$$(3) 2 \text{ لا } y + y = \text{لا } y \quad (4) y = 0 \text{ کے اندراج سے}$$

$$2 \text{ لا } y + y = \text{لا } y + y = 0$$

کو متجانس بناؤ اور حل کرو۔

۴۔ ایک مساوات جو حرکیات میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔

شکل ۲ = ف (ما) اکثر حرکیات میں واقع ہوتی ہے خاص کر حرکت کے مسئلوں میں جبکہ حرکت ایک ثابت کے تحت ہو جس کی سمت ایک ثابت نقطہ کی جانب اور جس کی مقدار کلاً اس ثابت نقطہ سے فاصلہ پر منحصر ہو۔

مساوات کی طرفین کو ۲ ما سے ضرب دو تو

$$۲ ما ۲ = ۲ ف (ما) ما$$

تکمل کرنے پر  $۲ = ۲ ف (ما) \frac{فر لا}{فر لا} = ۲ ف (ما) فر لا$

یہ حقیقت میں تو انائی کی مساوات ہے۔

یہ طریقہ مساوات  $\frac{فر لا}{فر لا} = -$  د لا پر (جو سادہ موسیقی حرکت

کی مساوات ہے) استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ \frac{فر لا}{فر لا} = - ۲ د لا \frac{فر لا}{فر لا}$$

اورت کے لحاظ سے تکمل کرنے سے

$$\left( \frac{فر لا}{فر لا} \right) = - د لا + مستقل = د (لا - لا) \text{ فرض کرو}$$

اس لیے (۸۶)

$$\frac{1}{د} = \frac{فر لا}{د (لا - لا)}$$

$$ت = \frac{1}{د} \text{ جب } \frac{لا}{د} + \text{مستقل}$$

## لا = ا جب (د + ص) حل طلب مثالیں

- (۱)  $۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$  اگر یہ دیا گیا ہو کہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$  جبکہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$   
 (۲)  $۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$  اگر یہ دیا گیا ہو کہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$  اور  $۱۰۰ = ۱۰۰$  جبکہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$   
 (۳)  $۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$  اگر یہ دیا گیا ہو کہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$  اور  $۱۰۰ = ۱۰۰$  جبکہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$   
 (۴)  $۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$  اگر یہ دیا گیا ہو کہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$  اور  $۱۰۰ = ۱۰۰$  جبکہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$

جبکہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$   
 [۱۰۰ - ۱۰۰ فاصلہ ہے جس میں سے ایک ذرہ سکون سے جاذبہ کے تحت گرتا ہے جہاں جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے، ہوا کی فراخمت وغیرہ کو نظر انداز کیا گیا ہے]

(۵) دو صورتوں (۱)  $۱۰۰ = ۱۰۰$  اور (۲)  $۱۰۰ = ۱۰۰$  میں مساوات  $۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$  کو حل کر دیا گیا ہو کہ  $۱۰۰ = ۱۰۰ - ۱۰۰$  جبکہ  $۱۰۰ = ۱۰۰$  اور  $۱۰۰ = ۱۰۰$  مستقل ہیں۔

[ان سے دور استہ معلوم ہوتا ہے جس کو ایک ذرہ ایک ایسی قوت کشش کے تحت طے کرتا ہے جو ایک ثابت نقطہ کی جانب ہے اور علی الترتیب اس نقطہ سے فاصلہ کے مربع اور مکعب کے بالعکس متناسب ہے۔ 'ع' کا متکافی ہے اور طہ قطبی محدودوں میں وہی معمولی معنی رکھتا ہے، 'ع' کا متکافی فاصلہ پراسراع ہے، اور 'ع' رقبی رفتار کا ڈگن ہے۔]

۷۵۔ عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا خطی مساوات

$$(۲+لا) م = (۵+لا۲) م + ۲ (۱+لا) و$$

$$\text{کو } \{(۲+لا) ع - (۵+لا۲) ع + ۲\} م = (۱+لا) و$$

کے طور پر لکھا جاسکتا ہے جہاں ع (حسب باب سوم) فرقا کی بجائے

لکھا گیا ہے۔ اب اس مخصوص مثال میں عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\{(۲+لا) ع - ۱\} \{(ع - ۲) م\} = (۱+لا) و$$

$$\text{رکھو } (ع - ۲) م = و$$

$$\text{تو } \{(۲+لا) ع - ۱\} و = (۱+لا) و$$

یہ پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ دفعہ ۲۰ کے مطابق حل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$و = ج (۲+لا) + و$$

$$\text{یعنی } (ع - ۲) م = ج (۲+لا) + و$$

یہ بھی ایک خطی مساوات ہے اور اس لیے بالآخر حاصل ہوتا ہے

$$م = ۱ (۵+لا۲) + ب و - و - \frac{۱}{۴} ج کی بجائے ۱ درج$$

کرنے سے۔

ظاہر ہے کہ صرف خاص صورتوں میں ہی عامل کے اجزائے ضربی نکل سکتے ہیں۔ ان اجزائے ضربی کو صحیح ترتیب میں لکھنا چاہئے کیونکہ وہ تبادلہ پذیر نہیں ہیں۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ترتیب کو الٹنے سے حاصل ہوگا

$$(ع - ۲) \{(۲+لا) ع - ۱\} م = (۲+لا) ع - ۱ (۵+لا۲) ع + ۲ م$$

## حل طلب مثالیں۔

$$(۱) (۱+۱)۱ + (۱-۱)۱ + ۱ = ۱$$

$$(۲) ۱ + (۱-۱)۱ + ۱ = ۱$$

$$(۳) ۱ + (۱-۱)۱ + ۱ = ۱$$

$$(۴) ۱ + (۱+۱)۱ + ۱ = ۱$$

اور  $۱ = ۱$  جبکہ  $۱ = ۱$

$$(۵) (۱-۱)۱ - (۱-۱)۱ + (۱-۱)۱ = ۱$$

فول، اگر یہ دیا گیا ہو کہ  $۱ = ۱$  اور  $۱ = ۱$  جبکہ  $۱ = ۱$

## ۶۔ متمم تفاعل سے متعلق ایک مکملہ کا معلوم ہونا۔

جب مساوات

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

کا ایک مکملہ معلوم ہو (فرض کرو کہ  $۱ = ۱$  معلوم ہے) تو دوسرے رتبہ کی زیادہ عام مساوات

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱$$

کو جس میں 'ف'، 'ق'، 'س' سب کے سب لاکے تفاعل میں اندراج

$$۱ = ۱$$

کے ذریعہ پہلے رتبہ کی مساوات میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

$$تفریق کرنے پر \quad ۱ = ۱ + ۱ + ۱$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$۱ + ۱ + (۱ + ۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱) = ۱$$

لہذا دفعہ ۲۹ کا ثبوت کہ ایک تفریق مساوات کا عام حل ایک خاص مکملہ اور متمم تفاعل کا حاصل جمع ہوتا ہے اسوقت اخلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ اس کے سر لاکے تفاعل ہوں اور نیز اسوقت جبکہ وہ نقل ہوں۔



یعنی  $y = \frac{f}{x} + (y_1 + f_1) + \dots + (y_n + f_n) \dots (3)$   
 کیونکہ بموجب فرض  $y_1 + f_1 + y_2 + f_2 + \dots + y_n + f_n = 0$

مساوات (۳)  $f$  میں پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔  
 اسی طرح  $n$  ویں رتبہ کی کسی خطی مساوات کو  $(n-1)$  ویں  
 رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تحويل کیا جاسکتا ہے اگر متعمد تفاعل سے  
 متعلق ایک تکملہ معلوم ہو۔

۷۷ - مثال - مساوات

$(2) \dots \dots \dots f = (1 + l) \dots \dots \dots$   
 پر پھر غور کرو۔  
 اگر یہ معلوم ہو کہ  $l = f$  سے مساوات کی دائیں جانب کا جملہ  
 صفر ہوتا ہے تو ہم

(۸۸)

$l = f$   
 رکھ سکتے ہیں۔ اس سے حاصل ہوگا

$$l = f = (2 + l) \dots \dots \dots$$

اور  
 $l = f = (2 + l) \dots \dots \dots$   
 (۴) میں درج کرنے پر

$$l = f = (2 + l) \dots \dots \dots$$

$$l = f = (2 + l) \dots \dots \dots$$

یعنی  $(2 + l) \dots \dots \dots$

اس کو معمولی طریقہ پر (مکمل جزو ضربی معلوم کر کے) حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و = قو + ج (۲ + لا) - قو$$

$$\text{مکمل کرنے سے } و = قو - \frac{۱}{۲} ج (۲ + لا) + قو$$

$$\text{اس لیے } ۱ = و - قو = -\frac{۱}{۲} ج (۲ + لا) + قو$$

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مساوات  $۱ = قو + ج + ف + با + ق = ۱$  سے

پوری ہوتی ہے اگر  $۱ = قو + ج + ف + با + ق$  اور  $۱ = لا$  سے پوری ہوتی ہے اگر  $۱ = قو + ج + ف + با + ق$ ۔

$$(۲) لا + با + لا = ۱ - لا$$

$$(۳) لا + با - (لا + لا) = ۱ - لا$$

$$(۴) لا + با - لا = ۱ - لا$$

$$(۵) لا + با + لا - ۱ = ۱ - لا$$

$$(۶) لا + با - لا = ۱ - لا$$

جم لا = ۱، اگر یہ دیا گیا ہو کہ  $۱ = لا$  ایک حل ہے۔

۸۔ مبدلوں کا تغیر۔ اب ہم ایک خطی مساوات کا جس کا

متمم تفاعل معلوم ہو کا حل ابتدائی معلوم کرنے کے لیے ایک نفیس لیکن قدرے مصنوعی طریقہ بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ اس طریقہ کی وساحت کے لیے ہم وہی مثال لیتے ہیں جو قبل ازیں دو مختلف طریقوں سے حل کی جا چکی ہے یعنی

$$(۱) \dots\dots\dots (۱+۱۱) = ۱۲ + ۱ (۵+۱۱) = ۱۲ + ۱۲ = ۲۴$$

جس کا متمم تفاعل  $۱۲ = ۱ (۵+۱۱) + ۱۲$  ہو ہے۔

$$(۲) \dots\dots\dots (۵+۱۱) = ۱۲ + ۱۲ = ۲۴$$

جہاں ۱ اور ۱۲ کے تفاعل ہیں۔  
یہ مفروضہ دفعہ ۱ کے مفروضہ  $۱۲ = ۱۲$  کے مشابہ ہے لیکن  
اس سے زیادہ متشاکل ہے۔  
(۲) کو تفرق کرنے سے

$$(۳) \dots\dots\dots (۵+۱۱) = ۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۳۶$$

اب تک یہ دو تفاعل (یا مبدل) ۱ اور ۱۲ صرف ایک  
رشتہ میں منسلک ہیں۔ اس لیے ہم ان سے ایک زائد مساوات

$$(۴) \dots\dots\dots (۵+۱۱) = ۱۲ + ۱۲ = ۲۴$$

پوری کراتے ہیں۔

اب مساوات (۳)

(۸۹)

$$(۵) \dots\dots\dots ۱۲ + ۱۲ = ۲۴$$

میں تحویل ہوگی۔ اس کو تفرق کرنے سے

$$(۶) \dots\dots\dots ۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۳۶$$

مساواتوں (۲)، (۵) اور (۶) سے علی الترتیب  $۱۲$ ،  $۱۲$  اور  $۱۲$  کی

تفریق مساواتیں۔ باب ۱۷۳ اعلیٰ ترتیب کی مساواتوں کیلئے متفرق طریقے

قیمتیں لیکر (۱) میں درج کرو۔ ا اور ب کے ساتھ جو اجزائے ضربی ہیں وہ صفر ہو جاتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$۲(۲+۱) + ۱(۲+۱) = ۱(۱+۱) + ۱(۱+۱) + \dots + ۱(۱+۱)$$

(۴) اور (۵) دو ہمزاد مساواتیں ہیں جن کو ہم ا اور ب کیلئے حل کر سکتے ہیں چنانچہ

$$\frac{۱(۱+۱)}{۲(۲+۱)} = \frac{۱(۱+۱)}{(۵-۱)(۲+۱)} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

اس لیے  $\left\{ \frac{۱}{۲(۲+۱)} - \frac{۱}{۲+۱} \right\} \frac{۱}{۱} = \frac{۱(۱+۱)}{۲(۲+۱)} = ۱$

اور مکمل سے  $۱ = ۱ + \frac{۱}{(۲+۱)} - ۱$  جہاں ۱ مستقل ہے۔

اسی طرح  $\left\{ \frac{۱}{۲(۲+۱)} - \frac{۱}{۲+۱} \right\} \frac{۱}{۱} = \frac{۱(۱+۱)(۵+۱)}{۲(۲+۱)} = ۱$

اور  $۱ = ۱ + \left\{ ۲ - \frac{۱}{۲+۱} \right\} \frac{۱}{۱} = ۱$

(۲) میں درج کرنے پر

$$۱(۵+۱) = ۱ + \left\{ ۱ + \frac{۱}{(۲+۱)} - ۱ \right\} + \left\{ ۲ - \frac{۱}{۲+۱} \right\} \frac{۱}{۱} + ۱$$

$$۱(۵+۱) = ۱ + ۱ - ۱ + ۱ + ۱ - ۱ + ۱$$

۹۔ فرض کرو کہ ہم ان اعمال کو دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات

(۱) .....  $ما + ف + با + ق = ما$  سر  
پر استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس کا متمم تفاعل  $ا + ع + ب$  و معلوم ہے جہاں  $ا$  اور  $ب$  اختیاری مستقل ہیں اور  $ع$  اور  $و$ ، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ مان لو کہ

(۲) .....  $ما = ا + و + ب$

(۳) .....  $با = ا + و + ب$

(۴) .....  $ع = ا + و + ب$

تو بشرطیکہ

(۳) کو تفریق کرنے سے

(۵) .....  $ما = ع + ا + و + ب + ا + و + ب$

(۱) میں  $با$ ،  $ما$  اور  $ما$  کی بجائے اندراج کرو۔

وہ رقیں جن میں  $ا$  شامل ہوگا  $(ا + ع + ف + ق + و)$  ہوگی  
یعنی صفر کیونکہ بموجب فرض

$ع + ف + ا + ق = و$

اسی طرح وہ رقیں جن میں  $ب$  آتا ہے معدوم ہوتی ہیں،

اور مساوات (۱)

(۶) .....  $ع + ا + و + ب = ما$

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۴) اور (۶) کو حل کرنے سے

(۹۰)

$$\frac{ا}{و} = \frac{ب}{ع} = \frac{ما}{ع + و}$$

اب  $ا$  اور  $ب$  کو عمل تکمیل سے معلوم کیا جاسکتا ہے، فرض کرو

$ا = ف (لا) + ا$

$ب = فا (لا) + ب$

جہاں  $ف (لا)$  اور  $فا (لا)$ ، لا کے معلومہ تفاعل ہیں اور  $ا$  اور  $ب$

اختیاری مستقل ہیں۔

(۲) میں درج کرنے پر بالا آخر حاصل ہوتا ہے

\* ۸۰۔ کسی رتبہ کی خطی مساواتوں پر اس طریقہ کی توسیع عمل میں آسکتی ہے۔ مثلاً تیسرے رتبہ کی خطی مساوات

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۱)$$

لو۔ فرض کرو کہ اس کا مستم تفاعل  $۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰$  معلوم ہے۔

حسب ذیل مساواتیں آسانی سے حاصل ہونگی:

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۲)$$

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۳)$$

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۴)$$

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۵)$$

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۶)$$

بشرطیکہ  
اس لیے  
بشرطیکہ

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰$$

اب

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۷)$$

(۱) میں درج کرنے سے

$$۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰ (۸)$$

پھر 'ب'، 'ج' کو تین مساواتوں (۲)، (۳) اور (۸) سے معلوم کرو۔

حل طلب مثالیں۔

$$(۱) ۱۰۰ + ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰۰$$

$$(۲) \quad ۲م + ۱م = ۳م \quad ۲م = ۱م$$

$$(۳) \quad \frac{۲}{۱+۲} = ۱ - ۲$$

$$(۴) \quad ۱م + ۱م - ۱م = ۱م \quad ۱م = ۱م \quad ۱م = ۱م \quad ۱م = ۱م$$

دیا گیا ہو۔

$$(۵) \quad ۲م - ۱م + ۱م - ۱م = ۱م \quad ۲م = ۱م$$

## ۸۱۔ خطی مساواتوں کو حل کرنے کے مختلف

طریقوں کا مقابلہ۔ اگر دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات حل کرنے کے لیے دی گئی ہو اور کسی خاص طریقہ کا اظہار نہ کیا گیا ہو تو بالعموم بہترین راہ عمل یہ ہے کہ متمم تفاعل سے متعلق ایک خاص مسئلہ معلوم کرنے کی کوشش کی جائے اور پھر دفعہ ۷۶ کے مطابق عمل کیا جائے۔ یہ طریقہ ان ویں درجہ کی ایک خطی مساوات کو (ن-۱) ویں درجہ کی خطی مساوات میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے طریقہ سے چند صورتوں میں اچھا حل حاصل ہوتا ہے لیکن یہ صورتیں ایسی ہیں کہ ان میں مثالیں خاص طور پر اس مقصد کے لیے تیار کی جاتی ہیں۔ عام طور پر عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں کیا جاسکتا۔

مبدلوں کے تغیر کا طریقہ عملی حیثیت سے دفعہ ۷۶ کے طریقہ کے مقابلہ میں ادنیٰ ہے کیونکہ اس میں متمم تفاعل کو پوری طرح معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے نہ کہ صرف اس کے ایک حصہ کو۔ اسکے علاوہ اگر اس کو تیسرے یا اس سے اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں میں استعمال کیا جائے تو (ا، ب، ج، وغیرہ کے لیے ہمزاد مساواتوں کے

(۹۱)

حل کرنے میں اور تکمیلوں کی تکمیل میں بڑی محنت صرف ہوتی ہے۔  
اب ہم دوسرے رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات کے بقیہ ابتدائی  
پر غور کریں گے۔ دوسرے رتبہ کی ایسی مساوات کے کامل ابتدائی میں  
دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔ اس کے بقیہ ابتدائی کو جس میں  
ایک اختیاری مستقل شامل ہو حاصل کرنے کے لیے صرف اس امر کی  
ضرورت ہے کہ ایک مستقل کو لامتناہی ہو جانے دیا جائے۔ مثلاً تفرقی  
مساوات

$$ما \frac{فرما}{فرلا} = \left( \frac{فرما}{فرلا} \right) + \frac{فرما}{فرلا}$$

سے کامل ابتدائی

$$لا = 1 + ما + ب لوک (ما - ب)$$

حاصل ہوتا ہے اور  $\frac{1}{\infty} = 0$  سے بقیہ ابتدائی  $ما = ب$  ملتا ہے

جو ب کی ہر قیمت کیلئے اس تحت قبیل (Sub-family) کے ایک شریک متعارف کو  
تعبیر کرتا ہے جس کے لیے ب کی قیمت مستقل ہوتی ہے اور لا بدلتا ہے۔  
بعض اوقات ہم دونوں مستقلوں کو لامتناہی ہو جانے دیتے ہیں  
جبکہ ان میں ایک خاص ربط موجود ہو۔ مثلاً تفرقی مساوات

$$ا \frac{فرما}{فرلا} + ۹ \left( \frac{فرما}{فرلا} \right) = ۰$$

سے کامل ابتدائی  $(ما + ب) = ۳(۱ + لا)$   
حاصل ہوتا ہے جو نیم کجی مکافیوں کے ایک دوسرے لامتناہی جُٹ کو  
جن کے قرون پر کے ماس محور ما کے متوازی ہیں تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم  
ب کی بجائے  $(ا - ک)$  رکھیں تو

$$(ما - ک) + ۳(ا - ک) + ۳(ا - ک) = لا + ۲لا + ۱$$



حاصل ہوتا ہے۔  $\frac{1}{2}$  سے تقسیم کرنے اور پھر  $\frac{1}{2}$  کو لا متناہی بنانے سے  $\frac{1}{2}$  ک حاصل ہوتا ہے۔ ک کی قیمت کے لیے وہ نیم کبھی مکافوں کے ایک تحت قبیل کا قرن طریق ہے لیکن یہ قرن صرف اتفاقاً ہی طریق میں آگئے ہیں۔ یہ طریق ایک انتہائی شکل کے طور پر پیدا ہوتا ہے جس کی طرف ایک خاص تحت قبیل کے (وہ بکے راس)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (ہیں) بہت دور کے ارکان اپنے ان حصوں کی جانب مائل ہوتے ہیں جو لا متناہی سے دور ہیں۔ یہ طریق نہ تو لٹھی لفاف (جو دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات کے نا درجہ کی ہندسی تعبیر ہے) ہے نہ مشترک متقارب (اس اصطلاح کے معمولی مفہوم میں)۔ اسی طرح اگر  $m$  اور  $n$  کوئی دو مثبت صحیح عدد ہوں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں اور  $n < m$  تو تفرقی مساوات

$$\frac{1}{2} \left( \frac{m}{n} \right) - \frac{1}{2} (m-n) = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{n} \right) - \frac{1}{2} (m-n) = 0$$

کا کامل ابتدائی  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (a+b)$

ہے اور بقیہ ابتدائی  $\frac{1}{2}$  ک ہے جو ب کی بجائے  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  رکھنے  $\frac{1}{2}$  سے تقسیم کرنے اور  $\frac{1}{2}$  کو لا متناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کی ہند تعبیر حسب سابق ہے، صرف یہ فرق ہے کہ  $\frac{1}{2}$  ک پر واقع شدہ راسوں کا قرن ہونا ضروری نہیں ہے۔ وہ انعطاف کے نقطے یا موج (undulation) کے نقطے یا معمولی نقطے  $(n = \frac{1}{2} m = 1)$  کے لیے بھی ہو سکتے ہیں۔ موج کی صورت میں ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ طریق ایک لٹھی لفاف ہے لیکن یقیناً ایسا نہیں ہے کیونکہ طریق مخنیوں کو مس کرنے کی بجائے ان کو علی القوام قطع کرتا ہے۔

## ساتویں باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) \text{ ماہ} - \text{با} + \text{ما} = ۰ \quad (۲) \text{ لا ماہ} + \text{لا ما} - \text{ما} = ۰$$

$$(۳) \text{ ما} = \text{ما} - \text{ما} \quad (۴) \text{ ما} + \text{ما} - \text{ما} = ۸ \text{ جم } ۳ \text{ لا}$$

$$(۵) (\text{لا لوک لا} - \text{لا}) \text{ ماہ} - \text{لا ما} + \text{ما} = ۰$$

$$(۶) (\text{لا} + \text{لا} - \text{لا}) \text{ ماہ} - (\text{لا} + \text{لا} - \text{لا}) \text{ ماہ} + (\text{لا} + \text{لا} - \text{لا}) \text{ ماہ} = ۰$$

(۷) تصدیق کرو کہ جم ن لا اور جب ن لا مساوات

$$\text{ما} + \text{ن} = \text{ما} = \text{ف} (\text{لا})$$

کے متکمل اجزائے ضربی ہیں۔ اس لیے

$$\text{ما} + \text{ن} = \text{ما} = \text{ق} \text{ظ ن لا}$$

کے پہلے دو تکملے معلوم کرو اور ما کے اسقاط سے کامل اجتہادی کو اخذ کرو۔

(۸) ثابت کرو کہ خطی مساوات

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \dots + \text{س} = \text{ت}$$

جس میں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'س' تمام لا کے تفاعل میں ٹھیک ہے یعنی وہ نیچے رتبہ کی مساوات سے تفرق کے ذریعہ فوراً اخذ کی جا سکتی ہے اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے متواتر تفرقی سررشتہ

$$\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} + \dots + (-۱)^{n-1} \text{س} = ۰$$

کو پورا کریں۔

[نوٹ - متواتر تکمل بالحصص سے

$$س \text{ سے } مان \text{ فرلا} = س \text{ مان}_1 - س \text{ مان}_2 + س \text{ مان}_3 - \dots$$

$$+ \dots (1) - س \text{ مان}_1 + س \text{ مان}_2 - س \text{ مان}_3 + \dots$$

تصدیق کرو کہ یہ شرط حسب ذیل مساوات سے پوری ہوتی ہے،  
اس لیے اس مساوات کو حل کرو:

$$(2) 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) = 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$$

(۹) تصدیق کرو کہ حسب ذیل غیر خطی مساواتیں ٹھیک ہیں اور نیز  
ان کو حل کرو:

$$(1) 0 = 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$(2) 0 = 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندراج  $ما = 2 + 3 + 4 + \dots$  سے مساوات

$$ما + ف + ق = 2 + 3 + 4 + \dots$$

طبعی (Normal) شکل  $و + ۲ = ۳$  سے

میں مستعمل ہوتی ہے جہاں 'ف'، 'ق'، 'س' سب لا کے تفاعل ہیں اور

$$۴ = ۳ - ۲ - ۱ - ۰$$

(۹۲)

اور  $س = 2 + 3 + 4 + \dots$  سے

حسب ذیل مساوات کو طبعی شکل میں رکھو اور حل کرو:

$$ما - ۲ - ۳ - ۴ - \dots = 2 + 3 + 4 + \dots$$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر دو مساواتیں

$$M + F + Q = 0$$

$$M + F + Q = 0$$

اور ایک ہی طبعی شکل میں کوئی ہوں تو وہ رشتہ

$$M + F + Q = 0$$

سے ایک دوسرے میں مستحیل کی جاسکتی ہیں یعنی معادل ہونے کی شرط یہ ہے کہ غیر متغیرہ (Invariant) ع وہی ہو۔

(۱۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$M + F + Q = 0$$

$$M + F + Q = 0$$

کا غیر متغیرہ وہی ہے۔ وہ رشتہ معلوم کرو جس سے یہ ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکیں۔ احتمالہ کو عمل میں لا کر تصدیق کرو۔

$$(13) \text{ اگر } M + F + Q = 0 \dots \dots \dots (1)$$

کے کوئی دو عمل ع اور س ع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(2) \dots \dots \dots \frac{M}{S} = 2 - \frac{F}{E}$$

$$(3) \dots \dots \dots \frac{M}{S} = 2 - \left( \frac{F}{S} \right)^2 = E^2$$

(۲) سے ثابت کرو کہ اگر س (۲) کا کوئی حل ہو تو س اور س کے

(۱) کے حل ہیں۔

(۲) کے دائیں جانب س کے تفرقی سروں کا جو تفاعل ہے اس کو شوارتسین (Schwarzian) مشتق کہتے ہیں کیونکہ اس کو برلن کے

ایچ۔ اے شوارتس نے دریافت کیا تھا اور اس کو اختصاراً {س، لا} سے تعبیر کرتے ہیں۔ وہ (Hypergeometric) نذراند ہندی سلسلوں میں اہمیت رکھتا ہے

$$(۱۳) مساوات لا پ + (لا + لا) پ + (۲ + لا) پ = ۰$$

کے غیر متغیرہ ع کو محسوب کرو۔  
دو طول لا و اور لا کے خارج قسمت کو س لیکر تصدیق کرو کہ  
{س، لا} = ۲ = ع

اور یہ کہ س، اور س، ۱/۲ ابتدائی مساوات کی طبعی شکل کے حل ہیں۔

$$(۱۵) اگر پ + ف + ق = ۰$$

کے دو حل ع اور و ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ع - و + ف = (ع - و - ع) = ۰$$

اور اس سے ثابت کرو کہ ع - و = ۱ - و

اس کی تصدیق پچھلی مثال کی آخری مساوات کے لیے کرو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ ما، مستقل، اس مساوات کا پہلا تکرار ہے جو

(۹۳)

$$۰ = ما + ۱/۲ + پ$$

کی آخری رقم کو ترک کرنے سے بنتی ہے۔

ما = ج رکھ کر جہاں ج اب لا کا ایک تفاعل ہے (یعنی مبدل ج کو متغیر کرنے سے) ثابت کرو کہ اگر پوری مساوات کامل ہو تو

$$ج = ۱ - ما$$

$$ج = ۱ - مستقل - ۱/۲$$

اور اس لیے

$$ما = ۱ - جب (لا + ۲/۳ + ب)$$

اور بالآخر

[یہ طریقہ شکل

$$۱۶ + ۱۷ + ۱۸ = (۱۹) + (۲۰) + (۲۱) =$$

کی کسی مساوات پر اطلاق پذیر ہے [ (۱۷) متبوع متغیر کو تبدیل کر کے حسب ذیل مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱) \quad ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} - \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} - \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} - \frac{۱۷}{۱۹}$$

$$(۲) \quad (۱۹ + ۱) + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹}$$

(۱۸) تفرقی مساوات

$$\frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} - \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} - \frac{۱۷}{۱۹}$$

کو ایسی مساوات میں مستعمل کرو جس میں ی متبوع متغیر ہو جہاں  
[لندن] ی = جب لا

اور مساوات کو حل کرو۔

(۱۹) اگر متبوع متغیر کو لا سے ی میں تبدیل کیا جائے اور ی مساوات

$$۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹}$$

کو پورا کرے تو مساوات

$$\frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹}$$

مساوات

$$\frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹} = ۱۹ + \frac{۱۷^۲}{۱۹} + \frac{۱۷}{۱۹}$$

میں مستعمل ہوگی۔ پس مساوات

$$\frac{فر۲}{فر۱} + \frac{فر۱}{فر۲} (1 - \frac{۱}{فر۱}) = \frac{فر۲}{فر۱} - \frac{فر۱}{فر۲}$$

$$= \frac{فر۲}{فر۱} - \frac{فر۱}{فر۲}$$

کو حل کرو۔

————— (۱۰) —————

## آٹھواں باب

### تفرقی مساواتوں کے حلوں کے عددی تقرب

۸۲۔ طالب علم کو یہ معلوم ہو چکا ہو گا کہ وہ طریقے جو پچھلے بابوں میں حلوں کو محدود شکل میں حاصل کرنے کے لیے بیان کئے گئے ہیں صرف خاص نمونوں کی تفرقی مساواتوں پر اطلاق پذیر ہیں۔ اگر کوئی مساوات ان میں سے کسی خاص نمونہ سے متعلق نہ ہو تو ہمیں تقریبی طریقے استعمال کرنا ہوں گے۔ ڈاکٹر برادشسکی کے تریسیمی طریقہ سے جس کو پہلے باب میں بیان کیا گیا ہے حل کی نوعیت کا ایک اچھا اندازہ حاصل ہوتا ہے لیکن عددی قیمتوں کے لیے اس پر بھروسہ نہیں کیا جاسکتا۔

اس باب میں ہم پہلے پیکرڈ (Picard) کا وہ طریقہ بیان کریں گے جس سے متواتر جبری تقرب حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں اعداد رکھنے سے بالعموم عمدہ عددی نتیجے حاصل ہوں گے۔ مگر بد قسمتی سے یہ طریقہ مساواتوں کی صرف ایک محدود جماعت پر جن میں متواتر مکملوں کی تکمیل آسانی سے ہو سکتی ہے استعمال

لے الٹی۔ پیکرڈ فرو فیئر جامعہ پیرس اس زمانہ کے بہت ممتاز اور مشہور ریاضی دان ہیں۔ تفاعلوں کے نظریہ میں ان کی تحقیقات بہت مشہور ہیں اور ان کی کتاب (Traite d'analyse) نصاب کی ایک معیاری کتاب ہے۔



کیا جاسکتا ہے۔  
 دوسرا طریقہ جو کلاً عددی ہے اور اس کا استعمال بھی بہت زیادہ  
 عام ہے رُنْجے (Runge) سے منسوب ہے۔ اگر کافی احتیاط ملحوظ  
 رکھی جائے تو اس سے بہت سی صورتوں میں اچھے نتیجے حاصل ہوتے  
 ہیں اگرچہ بعض اوقات عمل حساب بہت طویل ہو جاتا ہے۔  
 رُنْجے کے طریقہ کو کچھ تغیرات کے ساتھ میوں، کوٹا، اور اس کتاب کے  
 مصنف نے بیان کیا ہے۔

۸۳۔ متواتر تقریبات کو تکمل کرنے کا پیکرڈ کا طریقہ۔

تفرقی مساوات

$$\frac{f}{f'} = \frac{f}{f'}$$

(۹۵) کو جہاں  $a = b$  جبکہ  $a = 1$

$$a = b + \frac{f}{f'}$$

لکھا جاسکتا ہے۔  
 پہلے تقریب کے لیے ہم  $f$  (لا، ا) میں  $a$  کی بجائے  $b$  رکھتے  
 ہیں، دوسرے تقریب کے لیے  $a$  کی بجائے پہلا تقریب، تیسرے  
 تقریب کے لیے  $a$  کی بجائے دوسرا تقریب اور علیٰ ہذا۔

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f'}$$

$$a = b + \frac{f}{f'}$$

۱۸۶ سی۔ رُنْجے پروفیسر جامعہ گٹینگن (Gottingen) تریسی طریقوں کے لیے مستند مانے جاتے ہیں۔

پہلا تقرب: رکھو لا + ما میں ما = ۰۔ تو

$$ما = مکی لا فرلا = \frac{1}{4} لا^2$$

دوسرا تقرب: رکھو لا + ما میں ما =  $\frac{1}{4} لا^2$  تو

$$ما = مکی (لا + لا) = \frac{1}{4} لا^2 + \frac{1}{4} لا + \frac{1}{4} لا = \frac{1}{2} لا + \frac{1}{4} لا^2$$

تیسرا تقرب: رکھو لا + ما میں ما =  $\frac{1}{4} لا^2 + \frac{1}{4} لا$  تو

$$ما = مکی (لا + لا + لا) = \frac{1}{4} لا^2 + \frac{1}{4} لا + \frac{1}{4} لا + \frac{1}{4} لا = \frac{3}{4} لا + \frac{1}{4} لا^2$$

$$= \frac{1}{4} لا^2 + \frac{1}{4} لا + \frac{1}{4} لا + \frac{1}{4} لا + \frac{1}{4} لا = \frac{3}{4} لا + \frac{1}{4} لا^2$$

اور علی بن داود -

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مثال (۲)} \quad \frac{فرما}{فرلا} = ی \\ \frac{فری}{فرلا} = لا^2 (ما + ی) \end{array} \right.$$

جہاں ما = ۱ اور ی =  $\frac{1}{4}$  جبکہ لا = ۰۔

یہاں ما = ۱ + مکی ی فرلا اور ی =  $\frac{1}{4}$  + مکی لا (ما + ی) فرلا  
پہلا تقرب:

$$ما = ۱ + مکی \frac{1}{4} فرلا = ۱ + \frac{1}{4} لا$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (1) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

دوسرا تقرب:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (2) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (3) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^4}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (4) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^5}$$

تیسرا تقرب:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (5) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} = \frac{1}{x^6}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (6) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} = \frac{1}{x^7}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (7) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} = \frac{1}{x^8}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (8) \quad \text{فرلا} \quad \frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} = \frac{1}{x^9}$$

اور علیٰ ہذا۔

مثال (۳)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$  فرلا  $\frac{3}{8} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$  جہاں  $y = \frac{1}{x}$  اور  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$  جبکہ  $y = \frac{1}{x}$ ۔

$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}$  سے یہ مساوات مثال (۲) کی مساوات

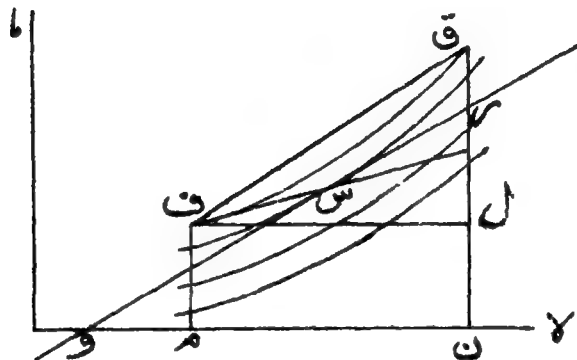
میں تحویل ہوتی ہے۔ یہ قابل ذکر ہے کہ پکڑ کے طریقہ سے تفرقی مساوات ایسی مساوات





$$\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا، ما)$$

سے منحینوں ("مینز") کے ایک قبیل کی تعین ہوتی ہے جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے اور ان میں سے



شکل (۲۳)

ایک منحنی مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ اگر ایک نقطہ  $ف (لا، ب)$  دیا گیا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ نقطہ  $ف$  میں سے گذرنے والے مینز کا ڈھال  $ف (لا، ب)$  ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اسی مینز پر کسی دوسرے نقطہ کا معین  $ما = ن$  یا معلوم کریں جبکہ  $لا = و$   $ن = 1 + و$  (فرض کرو) (۹۸) دیا گیا ہو۔ پہلا تقرب اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم مینز  $ف$  کو لینے کی بجائے  $ماس$  کو لیں یعنی

$$ما = ن + ل + ل = ن + ل + ف + ل = ف + ل + ل$$

۱۰۔ اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ مستوی کے ہر نقطہ پر  $ف (لا، ب)$  کی قیمت بالکل معین ہوتی ہے۔ لیکن اگر  $ف (لا، ما)$  ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر غیر معین ہو جائے تو ان نقطوں کو مساوات کے نادر نقطے کہا جاتا ہے اور ایسے نقطوں پر مینزوں کا سلوک خاص تحقیقات کا محتاج ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰۔

حاصل ہوگا۔

دوسرے تقرب کے لیے  $\frac{1}{4} = (0.25) = 0.0001215$  جمع کرنا ہوگا۔

تیسرے تقرب کے لیے  $\frac{1}{16} = (0.0625) + \frac{1}{32} = (0.03125) = 0.00000041$  جمع کرنا ہوگا۔

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ متواتر تقرب بڑی سرعت سے گھٹ رہے ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جو تھے تقرب میں پہلے سات مقاموں تک کوئی اثر نہیں پڑے گا، اس لیے مطلب قیمت  $0.00000041$  ہے۔ بلاشبہ لاکھ بڑی قیمتوں کے لیے تین سے زیادہ تقرب لینے ہوں گے تاکہ نتیجہ مطلوبہ درجہ تک صحیح حاصل ہو سکے۔

دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ حاصل شدہ تقرب بعض شرطوں کے تحت ایک انتہائی جانب بدل ہوتے ہیں اور اس انتہا سے مل حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مسئلہ بر جو دگی کہتے ہیں۔

## حل طلب مثال -

(۱) ثابت کرو کہ دفعہ ۸۳ مثال (۲) میں لا = ۰.۵ سے  $1.1252 \dots$

اور  $1.526 \dots$  حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰.۲ سے  $1.00025 \dots$

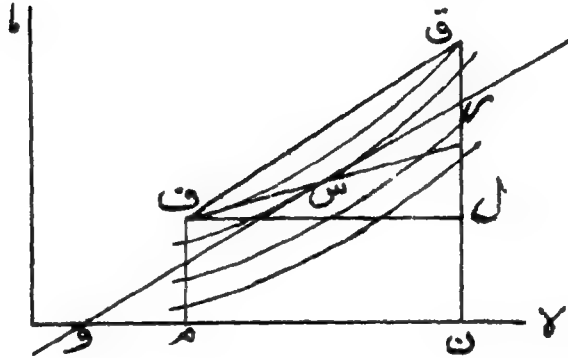
اور  $1.50032 \dots$  حاصل ہوتے ہیں۔

## ۸۵ - عددی تقرب راست تفرقی مساوات سے۔

متواتر تقریبات کو تکمیل کرنے کا طریقہ ناکام ہوتا ہے اگر اعمال تکمیل ناقابل استعمال ہوں، یہ اکثر ہوتا ہے۔ لیکن دوسرے طریقے ہیں جو ہمیشہ استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ اس مسئلہ پر ہندسی طور پر غور کرو۔ تفرقی مساوات

$$\frac{فر}{لا} = ف (لا، ما)$$

سے منحیوں ("مینز") کے ایک قبیل کی تعین ہوتی ہے جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے اور ان میں سے



شکل (۲۳)

ایک منحنی مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ اگر ایک نقطہ ف (ا، ب) دیا گیا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ نقطہ ف میں سے گذرنے والے مینز کا ڈھال ف (ا، ب) ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اسی مینز پر کسی دوسرے نقطہ کا معین ما = ن ق معلوم کریں جبکہ لا = ق ن = ۱ + ما (فرض کرو) (۹۸) دیا گیا ہو۔ پہلا تقرب اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم مینز ف ق کو لینے کی بجائے ماس ف س کو لیں یعنی

$$ما = ن ل + ل س = ن ل + ف ل س د م ف ل$$

۱۰۔ یہ اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ مستوی کے ہر نقطہ پر ف (لا، ما) کی قیمت بالکل معین ہوتی ہے۔ لیکن اگر ف (لا، ما) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر معین ہو جائے تو ان نقطوں کو مساوات کے نادر نقطے کہا جاتا ہے اور ایسے نقطوں پر مینز کا سلوک خاص تحقیقات کا محتاج ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰۔



$$= ب + ھ ف (ا' ب) = ب + ھ ف (فرض کرو)$$

لیں۔  
لیکن جب تک ھ فی الواقع بہت چھوٹا ہو، سماق نظر انداز نہیں کیا جاسکتا۔  
اس سے زیادہ مناسب تقرب وتر ف ق کو اس تماس کے متوازی لینے  
سے حاصل ہوتا ہے جو ف س کے وسطی نقطہ میں اس سے گزرنیوالے نمبر کا کھینچا گیا ہو۔  
چونکہ میں نقطہ (ا' + ھ ۱/۴ ب + ھ ۱/۴ ف) ہے ایسے

$$= ن ل + ل ق = ن ل + ف ل س > ق ف ل$$

$$= ب + ھ ف (ا' + ھ ۱/۴ ب + ھ ۱/۴ ف)$$

اس سادہ ضابطے سے بعض صورتوں میں اچھے نتیجے حاصل ہوتے  
ہیں جیسا کہ حسب ذیل مثالوں سے معلوم ہوگا۔

مثال (۱)  $\frac{فر۱}{فر۲} = لا + ما'، اگر ما' = جبکہ لا = تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۰.۳$

یہاں  $ا' = ب = ۰$  اور  $۰.۳ = ھ ف (لا' ما) = لا + ما'$

اس لیے  $ف = ب = ھ ف (ا' ب) = ۰$ ،  $ا' + ھ ۱/۴ = ۰.۱۵$ ،  $ب + ھ ۱/۴ ف = ۰$

اس لیے  $ب + ھ ف (ا' + ھ ۱/۴ ب + ھ ۱/۴ ف) = ۰ + ۰.۳$

ب ف (۰.۱۵، ۰) = ۰.۴۵

دفعہ ۸۴ میں حاصل شدہ قیمت ۰.۴۵۱۲۱۹، تھی، اس لیے خطا

۰.۰۰۱۲... یعنی تقریباً ۱/۴ فیصدی ہے۔

مثال (۲)  $\frac{فر۱}{فر۲} = ۲ - ۱/۲، اگر ما' = ۲ جبکہ لا = تو ما معلوم کرو جبکہ$

$لا = ۱.۲$

یہاں  $ا' = ب = ۲$ ،  $۰.۲ = ھ ف (ا' ب) = ۲ - ۲ = ۰$

اس لیے  $b + c = (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})b = (2 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})b$  (۱۵۱) (۲)

$$26.37 \dots = (\frac{2}{1.51} - 2) \cdot 52 + 2 =$$

یہ تفرقی مساوات آسانی سے مکمل کی جاسکتی ہے چنانچہ  $a = 1 + \frac{1}{p}$

حاصل ہوتا ہے اور اس لیے جب  $a = 1.52$  تو  $a = 26.33 \dots$  پس

خطا  $0.04 \dots$  ہے جو  $a$  کے اضافہ کے مقابلہ میں یعنی  $0.037$  کے مقابلہ میں قدرے بڑی ہے۔

مثال (۳)  $\frac{فری}{فرلا} = ی = ف (لا، ما، ی)$  فرض کرو۔

$$\frac{فری}{فرلا} = لا (ما + ی) = گ (لا، ما، ی) \text{ فرض کرو}$$

اگر  $a = 1$  اور  $ی = 0.5$  جبکہ  $لا = 0$  تو  $a$  اور  $ی$  معلوم کرو جبکہ  $لا = 0.5$

یہاں  $1 = 0.5$ ،  $ب = 1$ ،  $ج = 0.5$  (ی کی ابتدائی قیمت)  $0.5 = 0.5$

اس لیے  $ف = 0.5$ ،  $ف = 0.5$ ،  $گ = 0.5$ ،  $گ = 0.5$ ،  $0.5 = 0.5$

(۹۹) اوپر کے طریقہ کو دو متغیروں کے لیے وسیع کیا جائے تو صریحاً

$$a = b + c = (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})b = (2 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})b$$

$$اور ی = ج + گ = (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})b = (2 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})b$$

اس لیے حاصل شدہ قیمتیں درج کرنے پر

$$a = 1 + 0.5 \times (0.5 + 0.5 + 0.5) = 1.75$$

$$اور ی = 0.5 + 0.5 \times (0.5 + 0.5 + 0.5) = 1.75$$

صحیح قیمتیں حسب دفعہ ۸۴

$$a = 1.752 \dots اور ی = 0.522 \dots$$

ہیں۔ اس طرح ہمیں  $a$  کے لیے تو بہت اچھا نتیجہ حاصل ہوا لیکن  $ی$  کیلئے

بہت ہی خراب۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اس طریقہ میں نتیجہ کی صحت کا درجہ فیصد کتنا رہتا ہے اور اس لیے اس طریقہ کی بہت کچھ قدر گھٹ جاتی ہے۔ لیکن یہ ضرور اس طریقہ کی تمہید ہے جو بہت ہی سنجیدہ اور رُنجے (Runge) سے منسوب ہے۔ اس کو ہم آئندہ باب میں سمجھائیں گے۔

## حل طلب مثالیں

(۱)  $\frac{f}{x} = (a - \frac{1}{x})$ ، اگر  $a = 4$  جبکہ  $\frac{1}{x} = 3$  تو قیمت

$\frac{f}{x} = 4$  حاصل کرو جبکہ  $\frac{1}{x} = 4$ ۔ [رُنجے کے طریقہ سے قیمت  $4.118$  حاصل ہوگی]

(۲)  $\frac{f}{x} = \frac{1}{10} \{ a - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \}$ ، اگر  $a = 2$  جبکہ

$\frac{1}{x} = 1$ ۔ تو قیمت  $\frac{f}{x} = 4.94$  حاصل کرو جبکہ  $\frac{1}{x} = 1$ ۔ [رُنجے کے طریقہ سے قیمت  $4.1192$  حاصل ہوگی]

(۳)  $\frac{f}{x} = \frac{1}{x} - 72$ ، اگر  $a = 2$  جبکہ  $\frac{1}{x} = 2$  تو قیمت  $\frac{f}{x} = 4.44$

حاصل کرو جبکہ  $\frac{1}{x} = 2$ ۔ نیز ثابت کرو کہ  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$ ، اس لیے

جب  $\frac{1}{x} = 2$  تو  $\frac{1}{x} = 2.0001 \dots$

۸۶۔ رُنجے کا طریقہ۔ فرض کرو کہ  $a$  کے تفاعل کو جس کی تعریف

لے وہ شرطیں جن کے تحت تفرقی مساوات اور ابتدائی شرط ایک تفاعل کی فی الواقع تعین کرتے ہیں دسویں باب میں بیان کی گئی ہیں۔ پچھلے دفعہ کی ترسیبی بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ یہ شرطیں پوری ہوتی ہیں۔

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف (لا، ما)} ، \text{ما} = \text{ب جبکہ لا} = 1$$

سے کی گئی ہے ما = فا (لا) سے تعبیر کیا گیا ہے۔  
اگر اس کو ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلا یا جائے تو

$$\text{فا} (1+1) = \text{فا} (1) + \text{فا} (1) + \frac{\text{فا}^2}{2!} (1) + \frac{\text{فا}^3}{3!} (1) + \dots$$

$$\text{اب فا (لا)} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف (لا، ما)} = \text{ف فرض کرو}$$

اب ہم لا کے لحاظ سے کل تفرقی سرسریں گے (یعنی سمجھیں گے کہ لا کے تغیر کے ساتھ ما متغیر ہوتا ہے)۔ فرض کرو کہ ہم جزئی تفرقی سرسریں کو

$$\text{پ} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} ، \text{ق} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} ، \text{ر} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا جف ما}} ، \text{ت} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$$

سے تعبیر کرتے ہیں اور ان کی قیمتوں کو جبکہ لا = 1 اور ما = ب، پ، ق، ر، سے بیان کرتے ہیں۔

$$\text{تب فا (لا)} = \frac{\text{ف ف}}{\text{فر لا}} = \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{فر ما جف}}{\text{فر لا جف ما}} \right) \text{ف} = \text{پ} + \text{ق} \quad (۱۰۰)$$

$$\text{اسی طرح فا (لا)} = \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا جف ما}} \right) (\text{پ} + \text{ق})$$

$$= \text{ر} + \text{پ ق} + \text{ق س} + \text{ن (س + ق + ف ت)}$$

اس طرح

$$\text{فا} (1+1) - \text{فا} (1)$$

$$= \text{ب} + \frac{1}{1!} (\text{پ} + \text{ق}) + \frac{1}{2!} (\text{ر} + \text{پ ق} + \text{ق س}) + \dots$$

پہلی رقم سے پہلا تقریب تغیر ہوتا ہے، یہ تقریب دفعہ ۸۵ میں زیر بحث آچکا تھا اور اس کو رد کر دیا گیا تھا۔  
دفعہ ۸۵ کے دوسرے تقریب

۱۔  $b = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}b' + \frac{1}{4}b'' = k$  فرض کرو  
کو پھیلا کر اب (۱) کے ساتھ مقابلہ کیا جاسکتا ہے۔  
ٹیلر کے مسئلہ (جو دو متبوع متغیروں کے لیے ہے) سے  
$$f = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}b' + \frac{1}{4}b''$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}b' + \frac{1}{4}b'' + \frac{1}{4}b''' + \dots$$

جس سے  $k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}b' + \frac{1}{4}b'' + \frac{1}{4}b''' + \dots$   
(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ  $k = \frac{1}{4}$  کے سر میں ناقص ہے۔  
اس کے بعد کا عمل اُن معمولی طریقوں سے حاصل ہوتا ہے جو  
سادہ تفرقی مساوات

$$f = \frac{f''}{f'''} \quad (۱۱)$$

کے عددی تکمیل کے لیے دئے جاتے ہیں۔  
اس صورت میں دوسرا تقریب مندرجہ قاعدہ

۱۔ دیکھو گین یا لیمب کی نصابی کتابیں احصاء پر۔

$$۱۔ ب = ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۱۰۰})$$

میں تبدیل ہوتا ہے۔  
اس کے بعد کا تقریب بالعموم سمپسن کے قاعدے سے معلوم کیا جاتا ہے جس کو شکل

$$۲۔ ب = \frac{۱}{۴} ۱۰۰ ف (۱) + ۲۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۴}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

اگر ہم دو متغیروں والے متناظر ضابطے

$$\frac{۱}{۴} ۱۰۰ ف (۱) + ۲۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۴}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

$$+ ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

کو پھیلائیں تو آسانی سے

$$۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۴}) + ۲۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

$$+ ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) + \dots + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

حاصل ہوگا جو کم سے بہتر تقریب ہے لیکن اب بھی ۱۰۰ کا سر (۱) کے

مطابق نہیں ہے ۱۰۰ کی زائد رقمیں حاصل کرنے کے لیے ریجیٹل

$$۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۴}) + ۲۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

$$(۱۰۱) \quad ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۴}) + ۲۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

$$+ ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲})$$

اس ترمیم شدہ ضابطہ کو اختصاراً  $\frac{۱}{۴} \{ ۱۰۰ ف (۱) + ۲۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۴}) + ۱۰۰ ف (۱ + \frac{۱}{۲}) \}$  لکھا جاسکتا ہے

جہاں ک = ھ ف یا  $\frac{2}{3}$  ک +  $\frac{1}{3}$  ک = ک +  $\frac{1}{3}$  (ک - ک) لکھا

جاسکتا ہے یہاں  $k = \frac{1}{p}(k + k^2)$ ۔

اب اس امر کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ رُنج کے

ضابطہ کا پھیلاؤ، (۱) کے ساتھ وہاں تک مطابق ہے جہاں تک

رقموں ۱، ۲، ۳ اور ۴ کا تعلق ہے۔

بلاشبہ اس طریقہ سے خراب نتیجے حاصل ہوں گے اگر سلسلہ

(۱) بہت نفیسی سے مستحق ہو۔

اگر عدد آف  $\leq$  تو مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{ف (لا، ما)}} = \text{ف (لا، ما)} \text{ فرض کرو}$$

میں لکھا جاتا ہے اور اب فائدہ دار اور ہم ماکو متبعو غنی مغیر لیتے ہیں۔

۸۷۔ رُنجے کے طریقہ سے مثالوں کو حل کرنا طریقہ۔

اعمال حساب کو صاف طور پر ذہن میں رکھنے کے لیے ان کو

کسی خاص ترتیب میں مرتب کرنا چاہئے مثلاً ترتیب ذیل میں:

ترتیب وار محسوب کرو

ک = خف

ک = ف (۱ + ص + ب + ک)

ک = ف (1 + ہ) ب + ک

$$k = f \left( 1 + \frac{1}{p} + b + \frac{1}{q} \right)$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k}}$$

اور بالآخر  $k = k + \frac{1}{2}(k-k)$

چونکہ کم خود مطلوبہ قیمت کا ایک تقرب ہے اس لیے یہ واضح ہے کہ اگر کم کے درمیان فرق یعنی  $\frac{1}{2}(k - k')$ ، کم اور کم کے مقابلہ میں ضعیف ہو تو کم کی خطا کا خفیف تر ہونا ممکن ہے۔

مثال (۱)  $\frac{فرما}{فرز}$  =  $لا + ما$ ، اگر  $ما =$  جبکہ  $لا =$  تو ما معلوم کرو

جیکہ لا = ۵۳۰

یہاں ۱ = 'ب'، ۲ = 'ب'، ۳ = 'ف' (لا'ما) = لا'ما'ت =  
اس لیے ک = ف =

$$ک = ف(۱ + ب' + ک) \times ۰.۳ = ف(۱.۳)$$
$$.5 \cdot 9 \dots = .5^2 \times .5^2 =$$

کے = م ف (1 + م ب + ک) = ۱۳ × ف (۱ + ۳ ب + ۳) = ۱۳ × ف (۱ + ۹ ب) = ۱۳ × ۱۰۹ = ۱۴۱۷

$$.5 \cdot 92\% = (.5 \cdot .81 + .5 \cdot .93) \times .92 =$$
$$k = f(1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}k) = f(1.5) = 0.6$$

..p.d.=

$$\therefore 924 \times \frac{1}{4} = (ک + ک^3) \frac{1}{4} = ک$$
$$-5.5492 =$$
$$0.0004 + 0.005 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4}k = k$$
$$-5.252 =$$

چونکہ  $k = ۰.۴۵۴$  اور  $k = ۰.۴۵۰$  کے درمیان فرق  
ان میں سے کسی کے مقابلہ میں خاصا کم ہے اس لیے کہ کی خطا کا اس  
فرق  $۰.۰۰۴$  سے بھی کم ہونے کا بہت امکان ہے۔ اس کا یہ مطلب  
ہے کہ ہم قیمت کو اعشاریہ کے تین صحیح مقامات تک  $۰.۴۵$  لے سکتے ہیں  
ہم اس نتیجہ کی جانچ دفعہ ۸۴ کے محصلہ نتیجہ  $۰.۴۵۱۲۱۹$  کے ساتھ



مقابلہ کر کے کر سکتے ہیں۔

مثال (۲)  $\frac{م - لا}{لا + م} = \frac{فر م}{فر لا}$  اگر  $م = ۱$  جبکہ  $لا = ۰$  تو ما معلوم کرو

جبکہ  $لا = ۱$

یہ مثال رُبنجے کے اصلی مقالہ سے لی گئی ہے۔ سعت کو تین حصوں ۰.۵۲، ۰.۵۲، ۰.۵۶ تا ۰.۵۶ میں تقسیم کرو۔ ہم نے اول چھوٹا اضافہ لیا ہے کیونکہ ف (لا، م) ابتداء میں بڑے سے بڑا ہے۔

پہلا عمل:  $۱ = ۰.۵۲ = ۰.۵۲$ ،  $۱ = ۰.۵۲ = ۰.۵۲$

$۰.۵۲۰۰ =$   
 $ک = ۰.۵۲$   
 $ک = ۰.۵۲ = (۱ + ۰.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲ = (۱.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲$

$۰.۵۱۴۳ =$   
 $ک = ۰.۵۲ = (۱ + ۰.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲ = (۱.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲$

$۰.۵۱۳۰ =$   
 $ک = ۰.۵۲ = (۱ + ۰.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲ = (۱.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲$

$۰.۵۱۶۴ =$   
 $ک = ۰.۵۲ = (۱ + ۰.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲ = (۱.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲$

اور  $ک = ۰.۵۲ = (۱ + ۰.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲ = (۱.۵۲ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲$   
 جس سے  $۱.۵۱۶۸ = ۱$  جبکہ  $لا = ۰.۵۲$

دوسرا عمل:  $۱ = ۰.۵۲ = ۰.۵۲$ ،  $۱ = ۰.۵۲ = ۰.۵۲$

$۰.۵۱۶۸ = (۱.۵۱۶۸ + ۰.۵۲) \times ۰.۵۲$   
 حسب سابق عمل کرنے سے  $ک = ۰.۵۱۶۰$ ،  $ک = ۰.۵۱۶۳$  اور اس سے  
 $ک = ۰.۵۱۶۱$

جس سے  $۱۵۱۶۸ + ۰.۵۱۷۱ = ۱۵۳۳۹$  جبکہ  $۱۵ = ۰.۵$

تیسرا عمل:  $۱ = ۰.۵$ ،  $۱۵۳۳۹ = ۰.۵$ ،  $۱۵ = ۰.۵$

معلوم ہوگا  $۰.۵۱۶۰ = ۰.۵$

جس سے  $۱۵۳۹۹ = ۱$  جبکہ  $۱ = ۰.۵$

ک اور ک پر غور کرو تو معلوم ہوگا کہ پہلے اور دوسرے عمل میں  
خطا  $۰.۰۰۱$  سے بھی کم ہے اور تیسرے میں (اعشاریہ کے تین مقامات  
تک) ناقابل قدر یعنی چھٹیت مجموعی  $۰.۰۰۲$  سے بھی کم۔  
واقعہ یہ ہے کہ ماکلی قیمت  $۱۵۳۹۸$  اور  $۱۵۳۹۹$  کے درمیان  
ہے اور اس لیے خطا  $۰.۰۰۱$  سے کم ہے۔ ماکلی قیمت اس مساوات  
کے مکمل سے معلوم ہوئی ہے جس سے

$$۲ - ۱۱ \text{ مس } \frac{۱}{۱۱} = \text{لوک پو (لا + ما)}$$

حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں کے عددی نتیجے حاصل کرو جن میں اعشاریہ کے  
اتنے مقامات لو جن کا صحیح ہونا ممکن ہو۔

(۱)  $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰} \left\{ \text{ما} - ۱ + \text{لوک پو (لا + ما)} \right\}$ ، اگر  $۲ = ۱$  جبکہ

لا = ۰۔ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱، ۱ کو ۲ کے مساوی لو (کیونکہ ف بہت  
چھوٹا ہے)۔

(۲) پچھلے سوال میں قریب تر تقریب، عمل کو دو حصوں میں تقسیم  
کر کے حاصل کرو۔

(۳)  $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰} \left\{ \text{لا} - \text{ما} \right\}$ ، اگر  $۴ = ۱$  جبکہ لا = ۲، ۳ تو ما معلوم

کرو جبکہ لا = ۲۵۷ (د) صرف ایک حصہ عمل سے (ب) عمل کو دو حصوں میں تقسیم کر کے -

(۴) ثابت کرو کہ اگر  $\frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$  اور  $m = 2$  جبکہ لا = ۱ تو

$$m = 1 + \frac{1}{n}$$

پس رُنجے کے طریقہ سے حاصل شدہ نتیجے کی خطائیں (۱)  $0.04 = 0.02$  (ب)  $0.02 = 0$  (ج)  $0.01 = 0$  لیکر (بہر صورت میں ایک حصہ عمل سے) معلوم کرو اور ان خطاؤں کا مقابلہ ان کی محسوبہ بالائی انتہاؤں کے ساتھ کرو۔

(۵) اگر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات کو رُنجے کے طریقہ سے حل کیا جائے اور نتیجہ میں  $e$  (۶) کی خطا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{n} = \frac{e}{e(n)} = \frac{e}{n}$$

پس ثابت کرو کہ عمل کو دو حصوں میں تقسیم کرنے سے جو خطا حاصل ہوتی ہے وہ ایک حصہ عمل سے حاصل شدہ خطا کا تقریباً  $\frac{1}{n}$  ہے، یعنی عمل کے حصوں کو دو گنا کرنے سے اعشاریہ کے ایک زائد مقام تک صحیح نتیجہ (تقریباً) حاصل ہوتا ہے۔

۸۸ - ہمزا مساواتوں پر توسیع\* - اس طریقہ کی توسیع

ہمزا مساواتوں پر بہ آسانی عمل میں آ سکتی ہے۔ ثبوت چونکہ دفعہ ۸۶ کے مشابہ ہے اور ذرا طویل ہے اس لیے ہم صرف ایک مثال سے اس کی توضیح کرتے ہیں۔ یہ مثال اور حل طلب مثالوں میں دی ہوئی مثالیں قدرے ترتیم کے ساتھ رُنجے کے مقالہ سے لی گئی ہیں۔

مثال -  $\frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$  فرض کرو

\* اس باب کا باقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کیا جاسکتا ہے۔

تفرقی مساواتیں باب ۲۰۳ تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی تقریب

$$\begin{aligned} \text{فری} &= \frac{ما}{\frac{1}{4}(ما-۱)} = \text{گ (لا، ما، ی) فرض کرو} \\ \text{اگر } ما &= ۰.۰۲۰۲۰۲ \text{ اور ی} = ۰.۰۲۰۲۰۲ \text{ جبکہ لا} = ۰.۰۲ \text{ تو ما اور ی معلوم} \\ \text{کرو جبکہ لا} &= ۰.۰۴ \\ \text{یہاں } ۱ &= ۰.۰۲، ب = ۰.۰۲۰۲۰۲، ج = ۰.۰۲۰۲۰۲، ف = ۰.۰۲ \\ ۰.۰۲۰۲۰۲ &= (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲، گ = ۰.۰۲۰۲۰۲، ۰.۰۲ = ۰.۰۲ \\ ک &= ۰.۰۲ = ۰.۰۲ \times ۰.۰۲۰۲۰۲ = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ل &= ۰.۰۲ = ۰.۰۲ \times ۰.۰۲۰۲۰۲ = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ک &= ۰.۰۲ = (۱ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲ \\ ۰.۰۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ۰.۰۲۰۲۰۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ل &= ۰.۰۲ = (۱ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲ \\ ۰.۰۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ۰.۰۰۸۹۴ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ک &= ۰.۰۲ = (۱ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲ \\ ۰.۰۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ۰.۰۲۳۲۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ل &= ۰.۰۲ = (۱ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲ \\ ۰.۰۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ۰.۰۰۹۳۴ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ک &= ۰.۰۲ = (۱ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲ \\ ۰.۰۲ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ۰.۰۲۱۲۸ &= ۰.۰۲ \times (۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲ + ۰.۰۲۰۲۰۲) = ۰.۰۰۰۴۰۴ \\ ل &= ۰.۰۲ = (۱ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲ + ۰.۰۲) = ۰.۰۲۰۲۰۲ \end{aligned}$$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۲۰۴ تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی تقریب

$$= 0.52 \times \text{گ} (0.53, 0.53', 0.53, 0.94, 1.5)$$

$$= 0.6 - 0.071 =$$

$$= 0.52188 =$$

$$= 0.6 - 0.074 =$$

$$\text{ک} = \frac{1}{4} (\text{ک} + \text{ک}')$$

$$\text{ل} = \frac{1}{4} (\text{ل} + \text{ل}')$$

$$\text{ک} = \text{ک} + \frac{1}{4} (\text{ک} - \text{ک}') = 0.52188 + 0.0020 = 0.52388$$

$$\text{ل} = \text{ل} + \frac{1}{4} (\text{ل} - \text{ل}') = 0.52188 + 0.0011 = 0.52298$$

$$\text{پس م} = 0.52024 + 0.52188 = 0.52145$$

$$\text{اور ی} = 0.52024 + 0.52298 = 0.52161$$

غالباً اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح۔

## حل طلب مثالیں

(۱۰۴)

(۱) دفعہ ۸۸ کی مثال میں ثابت کرو کہ اگر  $\text{م} = 0.52145$  اور

$\text{ی} = 0.52161$  جبکہ  $\text{لا} = 0.52$  تو  $\text{ما} = 0.52188$  اور  $\text{ی} = 0.52161$  (غالباً اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح) جبکہ  $\text{لا} = 0.52$

$$(2) \text{فرط} = \frac{2 - \text{ی}}{\text{فری}} + \frac{(1 - \text{ط})}{\text{فری}}, \text{ فری} = \frac{\text{ط}}{(1 - \text{ط})}$$

اگر  $\text{ط} = 0.5500$  اور  $\text{ر} = 0.56$  جبکہ  $\text{ی} = 0.52161$  تو قیمتیں

$\text{ط} = 0.5163$  اور  $\text{ر} = 0.5438$  حاصل کرو جبکہ  $\text{ی}$  (جسکو متبوع

متغیر لینا ہوگا)  $= 0.52161$ ۔ ثابت کرو کہ  $\text{ر}$  کی قیمت اعشاریہ کے

چار مقاموں تک غالباً صحیح ہے لیکن  $\text{ط}$  کی قیمت میں اعشاریہ کا

تیسرا مقام غلط ہو سکتا ہے۔

(۳) پچھلی مثال میں  $\text{ط} = \text{جم فہ}$  اور دفعہ ۸۸ کی مثال میں  $\text{لا} = \text{جب فہ}$

لا = ر رکھ کر ثابت کرو کہ ہر صورت میں مساواتیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \text{مس فہ} = ۲۱ = \frac{\text{جب فہ}}{\text{جم فہ}} + \frac{\text{فری}}{\text{فری}}$$

حاصل ہوتی ہیں ان سے پانی کے ایک قطرہ کی شکل جو ایک افقی مستوی ساکن ہو حاصل ہوتی ہے۔

۸۹۔ ہیون اور کٹا کے طریقے۔ یہ طریقے رُنجے کے طریقہ

کے بہت مشابہ ہیں، اس لیے ہم ان کو اختصاراً بیان کریں گے۔

مسئلہ یہ ہے کہ اگر  $\frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \text{ف (لا نا)}$  اور  $\text{ما} = \text{ب جبکہ لا} = ۱$

تو ما کا اضافہ ک معلوم کرنا جبکہ لا کا اضافہ معلوم ہو۔

ہیون نے ترتیب ذیل میں محسوب کیا ہے:

$$\text{ک} = \text{ف (۱، ب)}$$

$$\text{ک} = \text{ف (۱ + \frac{۱}{۳}، ب + \frac{۱}{۳} ک)}$$

$$\text{ک} = \text{ف (۱ + \frac{۲}{۳}، ب + \frac{۲}{۳} ک)}$$

اس کے بعد وہ  $\frac{۱}{۳}$  (ک + ۳ ک) کو ک کی تقریبی قیمت کے

طور پر لیتا ہے۔

کٹا نے ترتیب ذیل میں محسوب کیا ہے:

$$\text{ک} = \text{ف (۱، ب)}$$

$$\text{ک} = \text{ف (۱ + \frac{۱}{۳}، ب + \frac{۱}{۳} ک)}$$

ک = ص (1 +  $\frac{2}{3}$  'ب + ک -  $\frac{1}{3}$  ک)  
 ک = ص (1 + 'ب + ک - ک + ک)  
 اس کے بعد وہ  $\frac{1}{8}$  (ک + ک + ک + ک + ک) کو ک کی تقریبی  
 قیمت کے طور پر لیتا ہے۔  
 ان تقریبات کی تصدیق ٹیبلر کے سلسلہ میں پھیلانے سے ہو سکتی  
 ہے جیسا کہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔  
**حل طلب مثالیں**

اگر  $\frac{م - لا}{م + لا} = ۱$  اور  $م = ۱$  جبکہ  $لا = ۰$  تو م کی قیمت  
 رُنجے، ہیمن، اور کٹا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم  
 کرو جبکہ  $لا = ۱۶۲$  اور ان کا مقابلہ صحیح قیمت ۱۶۲، ۸۲، ۱۶۲ کے ساتھ  
 کرو۔ [کٹا کے مقالہ سے]

۹۰۔ دوسرا طریقہ اور خطا کے حدود۔ اس کتاب کے

مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں جن سے چار عدد حاصل ہوتے  
 ہیں، ان میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے  
 درمیان ماکا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہئے۔ جب اس کو رُنجے  
 کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اس نئے ضابطہ سے بمقابلہ کسی  
 پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔ یہ  
 طریقہ محدود مکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہور نتیجوں کی توسیع ہے۔

۹۱۔ حدود جن کے درمیان ایک محدود تکرار کی قیمت واقع ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ فار (لا) ایک تفاعل

ہے جو لا = ۱ اور لا = ۱ + ۱ کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے

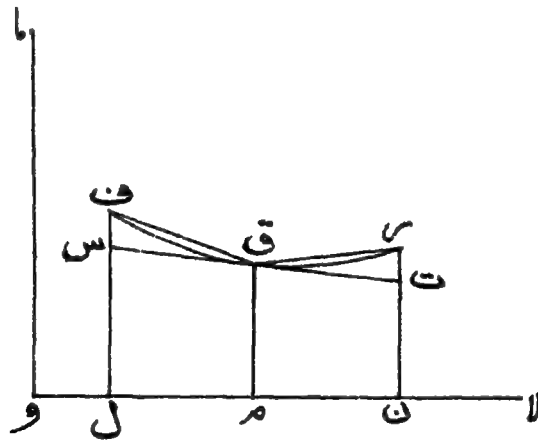
تفرقی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس

وقفہ میں تبا (لا) کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت

ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل ' ف ' م ق ' اور ن ' م

مورما کے متوازی ہیں اور ل ' ن کا وسطی نقطہ م ہے اور ق پر

کا محاسن ق ق ت ہے۔ ول = ۱، لن = ۱



شکل (۲۴)

تب رقبہ ف ل ن م منحرف س ل ن ت کے  
رقبہ اور منحرفوں ف ل م ق ' ق م ن م کے رقبوں کے  
مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنی مکملہ

فار (لا) فرلا



$$ک = ۱ + \frac{۲}{۳} ب + ک - \frac{۱}{۳} ک$$

$$ک = ۱ + ب + ک - ک + ک$$

اس کے بعد وہ  $\frac{۱}{۳}$  (ک + ۳ک + ۳ک + ک) کو ک کی تقریبی

قیمت کے طور پر لیتا ہے۔  
ان تقریبوں کی تصدیق ٹیڈر کے سلسلہ میں پھیلائے سے ہو سکتی  
ہے جیسا کہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔

### حل طلب مثالیں

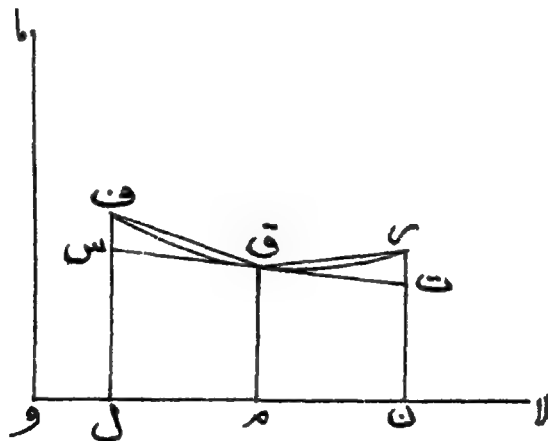
اگر فرما  $\frac{۱۱-۱۱}{۱۱+۱۱}$  اور  $۱ = ۱$  جبکہ  $۱ = ۱$  تو ماک کی قیمت

رُنجے، ہیمن، اور کٹا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم  
کرو جبکہ  $۱ = ۱$  اور ان کا مقابلہ صحیح قیمت ۱۱۶۷۸۳۱ کے ساتھ  
کرو۔ [کٹا کے مقالہ سے]

۹۰۔ (۱۰۵) دوسرا طریقہ اور خطا کے حدود۔ اس کتاب کے

مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں جن سے چار عدد حاصل ہوئے  
ہیں، ان میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے  
درمیان ماکا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہئے۔ جب اس کو رُنجے  
کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اس نئے ضابطہ سے بمقابلہ کسی  
پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔ یہ  
یہ طریقہ محدود مکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہور نتیجوں کی توسیع ہے۔

۹۱۔۔۔ حدود جن کے درمیان ایک محدود تکملہ کی  
قیمت واقع ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ فادلا ایک تفاعل  
ہے جو لا = ا اور لا = ا + ح کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے  
تقریبی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس  
وقفہ میں فادلا کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت  
ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل'ف' مدق' اور ن' س'  
محور ما کے متوازی ہیں اور ل'ن کا وسطی نقطہ م ہے اور ق پر  
کا محاسس قات ہے۔ ول = ا، لن = ح



شکل (۲۴)

تب رقبہ فیل ن مارا منحرف س ل ن ت کے  
 رقبہ اور منحرفوں فیل م ق ق م ن مارا کے رقبوں کے  
 مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنی تسکله  
 ک ف (لا) فلا

$$ک = ھف (1 + \frac{2}{3} ھ' ب + ک - \frac{1}{3} ک)$$

$$ک = ھف (1 + ھ' ب + ک - ک + ک)$$

اس کے بعد وہ  $\frac{1}{3}$  (ک + ۳ ک + ۳ ک + ک) کو ک کی تقرری قیمت کے طور پر لیتا ہے۔  
ان تقرریوں کی تصدیق ٹیبل کے سلسلہ میں پھیلانے سے ہو سکتی ہے جیسا کہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔

### حل طلب مثالیں

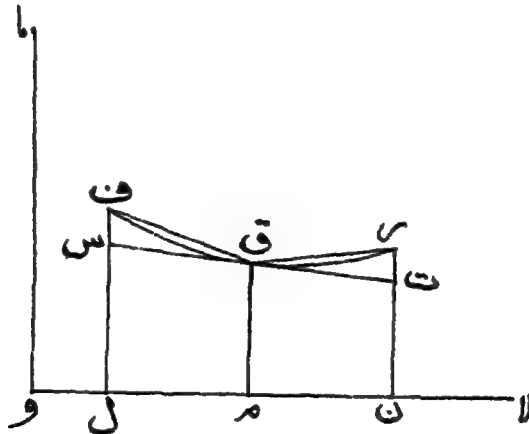
اگر  $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما - لا}{ما + لا}$  اور  $ما = ۱$  جبکہ  $لا = ۰$  تو ما کی قیمت رُنجے، ہیمن، اور کٹا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم کرو جبکہ  $لا = ۱۶۲$  اور ان کا مقابلہ صحیح قیمت ۱۶۲۸۳۱ کے ساتھ کرو۔ [کٹا کے مقالہ سے]

۹۰۔ دوسرے طریقہ اور خطا کے حدود۔ اس کتاب کے (۱۰۵)

مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں جن سے چار عدد حاصل ہوتے ہیں، ان میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان ما کا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہئے۔ جب اس کو رُنجے کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اس نئے ضابطہ سے مقابلہ کسی پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔ یہ طریقہ محدود مکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہوریتوں کی توسیع ہے۔

۹۱۔ حدود جن کے درمیان ایک محدود تکملہ کی قیمت واقع ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ فادر (لا) ایک تفاعل

ہے جو لا = ۱ اور لا = ۱ + ۷ کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے تفرقی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس وقفہ میں فادر (لا) کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل' ف' م' ق' اور ن' س' محور نامائے متوازی ہیں اور ل' ن' کا وسطی نقطہ م' ہے اور ق' پر کاماس سے ق' تا ہے۔ ول = ۱، ل' ن' = ۷



شکل (۲۳)

تب رقبہ ف' ل' ن' س' منحنی ف' ل' ن' کے رقبہ اور منحنی ف' ل' م' ق' م' ن' کے رقبوں کے مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنی تکملہ  
 ک' فادر (لا) فرلا

قیمتوں  $۱۰۰$  فا  $(۱ + \frac{۱}{۱۰۰}) = ۱$  (فرض کرو)

اور  $\frac{۱}{۱۰۰}$   $\{$  فا  $(۱) + ۲$  فا  $(۱ + \frac{۱}{۱۰۰}) +$  فا  $(۱ + \frac{۱}{۱۰۰}) =$  ب  $($  فرض کرو  $)$  کے درمیان واقع ہے۔

شکل میں فا (لا) مثبت ہے اور ۱ زیرین حد اور ب بالائی حد۔ اگر فا (لا) منفی ہوتا تو ۱ بالائی حد اور ب زیرین حد ہوتی۔

(۱۰۶) مکملہ کی تقریبی قیمت کو ۱ اور ب کا اوسط حسابی نہیں بلکہ  $\frac{۲}{۳}$  ب  $+$   $\frac{۱}{۳}$  ۱ لینا مناسب ترین ہے۔ یہ قیمت ٹھیک ہوتی ہے جبکہ ف ق م ایک مکانی کی قوس ہو جس کا محور محور م کے متوازی ہو۔ یہ اس عام تر صورت میں بھی ٹھیک ہے جبکہ

فا (لا)  $= ۱ + ب + لا + ج + لا + ع + لا$

جیسا کہ احصاء کی اکثر کتابوں میں سمپسن کے قاعدہ پر بحث کرتے وقت ثابت کیا جاتا ہے۔

۹۲۔ پچھلے نتیجوں کی توسیع ان تفاعلوں پر جن کی

تعریف تفرقی مساواتوں سے کی گئی ہو۔ اس تفاعل غور کرو جس کی تعریف

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف (لا، ما)} = \text{ما} = \text{ب جبکہ لا} = ۱$$

سے کی گئی ہے جہاں ف (لا، ما) لا کی قیمتوں ۱ تا ۱۰۰ اور ما کی قیمتوں ب۔ تا ب + ۱ کی سعت میں حسب ذیل قیود کے تحت ہے۔ یہ معلوم ہو گا کہ ما کا اضافہ عدد آ ۱۰۰ سے کم ہوتا ہے اور اسلئے

تفرقی مساواتیں۔ باب ۲۰۹ تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی اہل

ما کی تمام قیمتیں اوپر کی سمت میں واقع ہوتی ہیں۔ قیود حسب ذیل ہیں:

(۱) ف (لا، ما) محدود اور مسلسل۔ ہو، نیز اس کے پہلے اور دوسرے جزئی تفرقی سر بھی محدود اور مسلسل ہوں۔

(۲) وہ کبھی اکائی سے متجاوز نہ ہو۔ اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو ہم بالعموم ایک نئی مساوات حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی بجائے ما کو متبوع متغیر لینے سے یہ شرط پوری ہوتی ہے۔

(۳)  $\frac{فر}{فر لا}$  اور  $\frac{جفت}{جفت ما}$  علامت نہ بدلیں۔

فرض کرو کہ م اور ہ کوئی دوایسے عدد ہیں کہ

-  $1 \geq م > ف > م \geq 1$ ۔  
تب اگر ما کی قیمتوں کو جبکہ لا،  $\frac{1}{م} + \frac{1}{ف}$  اور  $\frac{1}{م} + \frac{1}{ف}$  ہو علی الشر  
ب + ز اور ب + ک سے تعبیر کیا جائے تو

-  $\frac{1}{م} \geq \frac{1}{م} > \frac{1}{ف} > \frac{1}{م} \geq \frac{1}{ف}$ ۔ (۱)  
اور -  $\frac{1}{م} \geq \frac{1}{م} > \frac{1}{ف} > \frac{1}{م} \geq \frac{1}{ف}$ ۔ (۲)  
اب ہم پچھلے دفعہ کے ضابطے استعمال کریں گے اور ما کو وہی

تفاعل سمجھیں گے جس کی تعریف

$$ما = ب + م^{+1} فا (لا) فر لا$$

سے ہوتی ہے اس لیے

لہٰذا نچلی نامساواتیں صرف ہ کے مثبت ہونے کی صورت میں درست ہیں اگر وہ مثبت ہو تو ان میں ترمیم کرنی ہوگی لیکن اس دفعہ کا آخری نتیجہ پھر بھی درست رہتا ہے۔

$$ک = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \text{ فا (لا) فر لا}$$

ہیں ان ضابطوں کو فا کی بجائے ف کی رقوم میں بیان کرنا ہے۔

$$اب \text{ فا (1)} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} \text{ کی قیمت جبکہ لا = 1}$$

اس لیے فا (1) = ف (1) ب

$$\text{اسی طرح فا (1 + \frac{1}{n}) = ف (1 + \frac{1}{n}) ب + ز} \quad (104)$$

$$\text{اور فا (1 + \frac{1}{n}) = ف (1 + \frac{1}{n}) ب + ک}$$

اب اگر  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$  مثبت ہے اور اس لیے ف، ما کے ساتھ

بڑھتا ہے تو نا مساواتوں (1) اور (2) سے

$$ف (1 + \frac{1}{n}) ب + \frac{1}{n} م > ف (1 + \frac{1}{n}) ب + \frac{1}{n} م + ز$$

$$> ف (1 + \frac{1}{n}) ب + \frac{1}{n} م + \dots (3)$$

$$\text{اور ف (1 + \frac{1}{n}) ب + م > ف (1 + \frac{1}{n}) ب + ک}$$

$$> ف (1 + \frac{1}{n}) ب + م + \dots (4)$$

لیکن اگر  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$  منفی ہے تو

$$ف (1 + \frac{1}{n}) ب + \frac{1}{n} م < ف (1 + \frac{1}{n}) ب + \frac{1}{n} م + ز$$

$$ب + ز < ف (1 + \frac{1}{n}) ب + \frac{1}{n} م + \dots (5)$$

$$\text{اور ف (1 + \frac{1}{n}) ب + م < ف (1 + \frac{1}{n}) ب + ک}$$

$$ک (۱ + ۱۰۰ ب + ۱۰۰۰۰) \dots (۶)$$

پس اگر  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  مثبت ہو اور  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  بھی مثبت ہو تو  
دفعہ ۹۱ کے نتیجہ

$$۱ > ک > ب$$

کی بجائے  $ع > ک > ق$  ..... (۷)  
کو رکھا جاسکتا ہے جہاں

$$ب = ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب + ۱۰۰۰۰ م)$$

$$ق = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} \{ ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب) + ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب + ۱۰۰۰۰ م) \}$$

اور  
لیکن اگر  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  مثبت ہو اور  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  منفی تو

$$ع > ک > ق \dots (۸)$$

$$ب = ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب + ۱۰۰۰۰ م) \quad \text{جہاں}$$

$$ق = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} \{ ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب) + ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب + ۱۰۰۰۰ م) \}$$

$$+ ۱۰۰۰۰ (۱ + ۱۰۰ ب + ۱۰۰۰۰ م) \}$$

اسی طرح اگر  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  اور  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  دونوں منفی ہوں تو

$$ع < ک < ق \dots (۹)$$

لیکن اگر  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  منفی اور  $\frac{۱۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$  مثبت ہو تو

$$ع < ک < ق \dots (۱۰)$$



ان نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے کہ ہر صورت میں (اُن قیود کے تحت جن کا ذکر اس دفعہ کی ابتدا میں کیا جا چکا ہے) ک چار عددوں پ، ع، ق اور ق میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

تقریبی ضابطہ کے طور پر ہم کہ  $\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a$  کو استعمال کرتے ہیں اور اس میں  $b$  کی بجائے  $c$  یا  $c$  کی بجائے  $a$  اور  $a$  کی بجائے  $b$  یا  $c$  درج کرتے ہیں۔

۹۳۔ ایک عددی مثال پر اطلاق۔ اُس مثال پر غور کرو جس کو رُنجے اور کُٹانے اپنے طریقوں کی توضیح میں استعمال کیا ہے

$$\frac{u-a}{u+a} = \frac{v-a}{v} , \quad a = \text{جبکہ } u = 0 .$$

۱۰۰ کا اضافہ کر معلوم کرنا مطلوب ہے جبکہ لا میں ۲۰ کا

اضافہ ہو۔ یہاں ف (لا، ما) =  $\frac{ما - لا}{ما + لا}$ ۔ یہ تفاعل اُن شرطوں کو پورا کرتا ہے جو کھیلے دفعہ میں بیان ہوئیں گے۔

اے چونکہ دل (ع) معیت ہے اس لیے ما اور ۱۲ کے درمیان واقع ہے۔ ہر اور م کو معلوم کرتے وقت ہم ہمیشہ م کے لیے وہ کم سے کم سعوت لیتے ہیں جو مل سکتی ہے۔ (دشڑھوں م > ف > م کی بجائے م > ف > م کو لیا جاسکتا ہے اور اس سے آخری نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔ صرف یہ فرق ہوگا کہ > جیسی چند علامتوں کی بجائے > جیسی چند علامتیں ہوں گی۔)۔

$$\text{ہم لیتے ہیں } m = 1, \quad \frac{2}{4} = \frac{0.52 - 1}{0.52 + 1.52} = m$$

(۱۰۸)

تب  $0.51652321 = E$

$0.51666666 = E$

$0.51666984 = Q$

$0.51690466 = Q$

اس طرح ک، ع اور ق کے درمیان واقع ہے۔

خطائیں

$0.50000000$

$0.51668222 = E + \frac{1}{3} Q + \frac{2}{3}$

$0.50000032$

$0.51668229$

کٹا کی قیمت

$0.50000000$

$0.51668286$

رُنجے کی قیمت

$0.50001833$

$0.51680250$

ہیون کی قیمت

ان میں سے دوسری 'تیسری' اور چوتھی قیمتیں کٹانے محسوب کی گئیں۔ اب یہ مخصوص مثال محدود رقموں میں تکمیل پذیر ہے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

لوک  $(لا + ما) - 2 مس (پ) = 0$

اس لیے ہم ک کی صحیح قیمت معلوم کر سکتے ہیں چنانچہ

$0.51668214 = \text{صحیح قیمت}$

ظاہر ہے کہ اس مثال میں مصنف کے طریقہ سے جو قیمت حاصل ہوئی ہے وہ صحیح قیمت سے قریب ترین ہے خطائیں ساتھ ساتھ بیان کر دی گئی ہیں۔

ہم اس طریقہ کی جانچ زیادہ بڑے وقفہ = اکو لیکر بھی کرینگے۔ بلاشبہ نتیجہ کو حاصل کرنے کا زیادہ صحیح طریقہ عمل حساب کو کئی حصوں میں تقسیم کر کے مکمل کرنا ہے مثلاً  $0.52, 0.53$  اور بالا آخر  $0.55$ ۔

تفرقی مساواتیں۔ باب ۲۱۴ تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی تقرب

تاہم یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ بڑے وقفہ کے لیے نتیجے کتنے غلط ہوتے ہیں:

$$\text{ہم لیتے ہیں } m = 1, m' = \frac{1-1}{1+2} = 0$$

$$\text{تب } \frac{2}{3} \approx \frac{1}{3} + 0.666666 = 0.5$$

خطائیں	۰.۶۴۹۸۲۸ =	سیچ قیمت
۰.۶۰۰۱۷۲	۰.۶۵۰۰۰۰ =	ہماری قیمت
۰.۶۰۰۰۸۶	۰.۶۴۹۹۱۴ =	کٹا کی قیمت
۰.۶۰۱۷۸۵	۰.۶۵۱۶۱۳ =	ہیون کی قیمت
۰.۶۰۲۵۵۳	۰.۶۵۲۳۸۱ =	سیچ کی قیمت

اب کٹا کی قیمت قریب ترین ہے اور ہماری اس کے بعد۔  
 [م اور م کو متعین کرنے کا باقاعدہ طریقہ اور دفعات ۹۰ تا ۹۳ کے طریقہ کی ریم کی توسیع کے لیے دفعہ ۱۸۳ کا مطالعہ کرو۔]  
 آڈٹس کا عددی طریقہ جو شاید سب میں بہترین ہے دفعہ ۱۸۲ میں بیان کیا گیا ہے۔





اس باب میں ہم فرانسیس<sup>۱۲</sup> (باشندہ برلن) کی اتباع کرتے ہوئے آزمائشی حل

$$M = (L^1 + L^2 + L^3 + L^4 + L^5 + \dots + L^{\infty})$$

اختیار کریں گے جس میں تمام  $L$  مستقل<sup>۱۳</sup> ہیں۔  
قوت نماج کو ایک دو درجی مساوات سے جس کو قوت نمائی مساوات کہتے ہیں معلوم کیا جائے گا۔ اس مساوات کی اصلیں مساوی مختلف مگر ان کا فرق ایک صحیح عدد ہو، یا مختلف مگر ان کا فرق صحیح عدد نہ ہو ہو سکتی ہیں۔ ان صورتوں پر علیحدہ علیحدہ بحث کرنی ہوگی۔  
اس آزمائشی حل کی خاص خوبی یہ ہے کہ اس سے حل کی ایک دوسری شکل جس میں لوگ لا شامل ہوتا ہے فوراً حاصل ہوتی ہے۔  
تقریبی مساوات کا حل اس دوسری شکل کا ہوتا ہے۔

چونکہ  $\phi$  جیسے تفاعلوں کو لاکھ کی تعدادی قوتوں میں پھیلا یا نہیں جاسکتا (۱۱۰)

اس لیے ان تفرقی مساواتوں کی صورت میں جن کا حل اس نوعیت کا ہو یہ طریقہ ناکام رہے گا۔ ہم ایک ایسے طریقہ کا ذکر کریں گے جس سے فوراً یہ معلوم ہو سکیگا کہ کونسی مساواتوں کو فرانسیس کی شکلوں (باقاعدہ مکملوں) میں حل کیا جاسکتا ہے اور لاکھ قیمتوں کی کس سمت میں یہ حل مستحق ہوں گے۔

اس باب کا مقصد یہ ہے کہ مثالوں کو کس طرح حل کیا جائے۔ اس میں جو مسئلے پیش آئے ہیں ان کے باقاعدہ ثبوت آئندہ باب میں دیے جائیں گے۔

ان مثالوں میں بیسل، ایکٹرا اور ریگنی کی اہم مساواتیں ملیں گی۔ زائد ہندی گاس کی مساوات اور ارس کے چوبیسوں کا ایک خاکہ بھی دیا گیا ہے۔

۹۵۔ صورت (۱۱)۔ قوت نمائی مساوات کی اصلیں  
نامساوی لیکن ان کا فرق ایک صحیح عدد نہیں۔

مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots = ۰ = ۱ - \frac{فر۱}{فر۲} - \frac{فر۲}{فر۳} \dots\dots\dots$$

پرفورم کرو۔

$$رکھو ی = ۱ - \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots\dots\dots$$

$$تو \frac{فر۱}{فر۲} = ۱ - \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots\dots\dots$$

۱۷ فریڈرک ولہیم بیسل (مینڈن ۱۸۲۶ء تا ۱۸۴۶ء) کوئینشسنگ کی رصدگاہ کے ناظم تھے۔ وہ ”بیسل کے تقاضات“ کے لیے بہت مشہور ہیں۔  
اڈریں میری لیجنڈر (تولوس ۱۷۵۲ء تا ۱۸۲۳ء) اپنے (Zonal Harmonics) یا ”لیجنڈر کے سروں“ کی وجہ سے بہت مشہور ہیں۔ موصوف نے ناقصی تکملوں اور عددوں کے نظریہ پر بھی بہت کام کیا ہے۔  
کاونٹ ریگنی (وینس ۱۷۸۱ء تا ۱۸۴۱ء) نے ”ریگنی کی مساوات“ اور نیز ایک دی ہوئی مساوات کے رتبہ کو گھٹانے کے امکان پر مقالات تحریر کئے۔  
کارل فریڈرک گاس (برسوک ۱۷۹۸ء تا ۱۸۵۵ء) انیسویں صدی کے ارمیدش مشہور ہیں۔ آپ نے بہت سے فنون پر اپنی تحقیقاتیں شائع کیں ان میں عددوں کا نظریہ، مقطعات، لامتناہی سلسلے، خطاؤں کا نظریہ، علم ہیئت، ارضیات، برق اور مقناطیس شامل ہیں۔  
۱۷ لاکھ معوی قوتوں کے کسی سلسلہ کو اس طرح رقم بہ رقم تفرق کرنا جائز ہے بشرطیکہ تفرق استعداف کے علاقہ کے اندر ہو۔ دیکھو براہ موج Infinite Series دفعہ ۵۲

اور 
$$\frac{\text{فرقی}}{\text{فرق لا}} = \frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا$$

(۱) ہر درجہ کرو اور لا کی منوالہ ترقیوں کے سروں کو صفر کے مساوی رکھو۔

لا کی کم ترین قوت لا ہے۔ اس کے سر کو صفر کے مساوی رکھئے

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا = ۰$$

(۲)  $\frac{1}{2} (ج - ۱) لا = ۰$  کیونکہ

(۲) کو قوت ثانی مساوی کہتے ہیں۔

اس کے سر کو صفر کے مساوی رکھئے

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$$

(۳)  $\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$  یعنی

لا کے سر میں زیادہ رقمیں ہیں اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$$

یہ

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$$

یہ

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$$

اسی طرح

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$$

اسی طرح

$$\frac{1}{2} (ج - ۱) لا + \frac{1}{2} (ج + ۱) لا = ۰$$

یہ یا اس جمل میں جو اکی بجائے رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

علیٰ بن ۱ -

(۳)، (۵) وغیرہ سے

$$1 + 5r^2 = \dots = 5r^2 = 2r^2 = r^2 = 0$$

(۴)، (۶) وغیرہ سے

$$\left( \frac{1 - r}{5 + 5r^2} \right) = \frac{r^2}{2r^2} \quad \left( \frac{3 - r}{1 + 5r^2} \right) = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\frac{5 - 10r + r^2}{3 - 10r + 5r^2} = \frac{r^2}{2 - 5r^2} \quad \dots \quad \left( \frac{1 + r}{9 + 5r^2} \right) = \frac{r^2}{r^2}$$

لیکن (۲) سے  $0 = r$  یا  $\frac{3}{2}$

اس طرح اگر  $0 = r$  تو  $r$  کی بجائے  $r$  رکھنے سے

$$y = \left\{ 1 + 3r + \frac{3}{5}r^2 - \frac{1}{15}r^3 + \frac{1}{65}r^4 - \dots \right\} = 1 \text{ (فرض کرو)}$$

اور اگر  $\frac{3}{2} = r$  تو  $r$  کی بجائے  $\left( \frac{3}{2} \right)$  (جو اختیاری مستقل ہے)  $b$  رکھنے سے

$$y = b \left\{ 1 + \frac{3}{8}r - \frac{3 \times 1}{16 \times 8}r^2 + \frac{5 \times 3 \times 1}{24 \times 16 \times 8}r^3 - \dots \right\}$$

$b$  و  $a$  (فرض کرو)

پس  $a = 1 + b$  و  $b$  و  $a$  ایسا مل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں اور اس لیے اس کو کا بل ابتدائی سمجھا جاسکتا ہے۔

عام طور پر اگر قوت نامائی مساوات کی دو نامساوی عملیں

عہ اور بہ ہوں اور ان کا فرق ایک صحیح عدد نہ ہو تو ج کی ان قیمتوں کو ی کے سلسلہ میں درج کرنے سے دو غیر تابع حل حاصل ہوتے ہیں۔



## حل طلب مثالیں۔

$$(۱) \quad ۱۲ = ۱ + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \dots$$

$$(۲) \quad ۱۲ = ۱ + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \dots$$

$$(۳) \quad ۱۲ = ۱ + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \dots$$

$$(۴) \quad ۱۲ = ۱ + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} + \dots$$

یہ ن ویں رتبہ کی بیس کی مساوات ہے جس میں ۲ صحیح عدد نہیں ہے۔

۹۶۔ پچھلے دفعہ میں حاصل شدہ سلسلہ کا استدقاق (۱۱۲)

اعلیٰ جبر و مقابلہ یا علم تحلیل کی تقریباً ہر کتاب میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ لامتناہی سلسلہ  $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$  مستحق ہوتا ہے اگر

$$1 > \left| \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2^n} \right|$$

اس سلسلہ میں جو گذشتہ دفعہ میں حاصل کیا گیا ہے  $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

یعنی

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2^n}$$

اور اس کی انتہا جبکہ  $\infty$ ۔  $\frac{1}{p}$  لا ہے جو ج کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔  
اس لیے دونوں محصلہ سلسلے  $|a| > |b|$  کے لیے مستحق ہیں۔  
یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ اگر تفرقی مساوات شکل

$$a \frac{x^2}{x^2 + 1} + b \frac{x}{x^2 + 1} = c$$

میں تحویل ہو تو  $a$  اور  $b$  قوت  $(x^2 + 1)$  کے مستحق سلسلوں میں  
پھیلانے جا سکتے ہیں مثلاً اوپر کی مثال میں ایسے سلسلوں میں جو  
لا کی ان قیمتوں کے لیے مستحق ہیں جن کا مقیاس  $|a| > |b|$  ہے

$$c = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$b = \frac{x}{x^2 + 1}$$

اور

یعنی اس مثال میں استدقاق کا علاقہ اس علاقہ پر منطبق ہے جس کے  
لیے  $a$  اور  $b$  قوت کے مستحق سلسلوں میں پھیلانے  
جا سکتے ہیں۔ دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ یہ مسئلہ عام طور پر  
درست ہے۔

### حل طلب مثالیں۔

مثالوں کے پچھلے جٹ کے حلوں کے لیے استدقاق کا علاقہ معلوم کرو۔  
ہر صورت میں اس امر کی تصدیق کرو کہ استدقاق کا علاقہ اس علاقہ کے مماثل  
ہے جس کے لیے  $a$  اور  $b$  قوت کے مستحق سلسلوں میں پھیلانے  
جا سکتے ہیں۔

۹۷۔ صورت (۲)۔ جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں



درج کریں (ج = ۰ رکھے بغیر) تو ہمیں صرف واحد رقم  $1^2$  ج  $1^2$  -  $1^2$  مل  
ہوتی ہے۔ چونکہ اس میں  $1^2$  کا درجہ شریک ہے اس لیے ج کے  
لحاظ سے اس کا جزئی تفرقی سرے سے  $2^2$  ج  $2^2$  -  $1^2$  ج  $1^2$  -  $1^2$  لوک لا  
بھی معدوم ہو گا جبکہ ج = ۰ - یعنی

$$\text{جف} \left[ (1-1^2) \frac{1^2}{2} + (1-1^2) \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] \text{جف}$$

$$= 2^2 \text{ ج} 2^2 - 1^2 \text{ ج} 1^2 - 1^2 \text{ لوک لا}$$

چونکہ تفرقی عامل تبادلہ پذیر ہوتے ہیں اس لیے اس کو

$$\left[ (1-1^2) \frac{1^2}{2} + (1-1^2) \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] \text{جف}$$

$$= 2^2 \text{ ج} 2^2 - 1^2 \text{ ج} 1^2 - 1^2 \text{ لوک لا}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

پس جف  $\frac{1^2}{2}$  تفرقی مساوات کا دوسرا حل ہے اگر تفرق کے  
بعد ج کو صفر کے مساوی رکھا جائے۔  
تفرق کرنے پر

$$\text{جف} \frac{1^2}{2} = \text{لوک لا} + \text{لوک لا} \left\{ \frac{1^2}{2} \left( \frac{2+1}{1+1} \right)^2 - \frac{1^2}{2} \left( \frac{1+1}{1+1} \right)^2 \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{2^2}{2} \left( \frac{3+1}{1+1} \right)^2 - \frac{1^2}{2} \left( \frac{2+1}{1+1} \right)^2 \right\} + \dots$$

اوپر کے دو سلسلوں میں ج = ۰ اور علی الترتیب  $1 = 1$  اور  $1 = 1$  رکھنے سے

$$y = \{1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots\} = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots$$

اور  $\frac{\text{جفی}}{\text{جف ج}} = \text{ب} \times \text{لوک لا} - \text{ب} \times \{1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots\}$

کامل ابتدائی  $1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots$  ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اسیلیں ج = 1

مساوی ہوں تو ج کی اس قیمت کو ی میں اور  $\frac{\text{جفی}}{\text{جف ج}}$  میں

درج کرنے سے دو غیر تابع حل حاصل ہوتے ہیں۔ دوسرے حل میں ہمیشہ پہلے حل (یا اس کے عددی ضعف) اور لوک لا کا حاصل ضرب، جمع شدہ شریک ہوگا۔

اوپر کی مخصوص مثال پر غور کرو اور ع (لا) اور ق (لا) پر دفعہ ۹۶ کے مطابق غور کرو تو معلوم ہوگا کہ یہ سلسلہ مستحق ہے اگر  $1 > 1 - a$ ۔ یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ درست ہے۔

### حل طلب مثالیں

$$(1) (1 - a^2) \frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - a^2} (1 - a) = 1$$

(۲) معفر رتبہ کی بیسل کی مساوات

$$1 = \frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - a^2}$$

$$(3) 1 = \frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - a^2} (1 + a) + \frac{1}{1 - a^2}$$

$$(۴) \quad ۲(لا^۲ - لا^۱) + \frac{۲}{۲لا} فرما + \frac{۱}{لا} فرما - ۱ = ۰$$

۹۸ - صورت (۳) جبکہ قوت نمائی مساوات نامی  
اصلوں میں صحیح عدد کا فرق ہو اور ان میں سے ایک  
اصل سے دوسرے کا ایک سر لا متناہی ہو جائے۔ ایک رتبہ  
کی بیس کی مساوات

$$لا^۲ + \frac{۲}{۲لا} فرما + \frac{۱}{لا} فرما - ۱ = ۰$$

پر غور کرو۔ اگر ہم دفعہ ۹۵ کے مطابق عمل کریں تو معلوم ہوگا کہ

$$۱. \quad \{ (ج-۱) + (ج-۱) - ۱ \} = ۰$$

$$(۱) \quad \dots \dots \dots = ۱ - ج^۲ \quad \text{یعنی}$$

$$\dots \dots \dots = \{ ۱ - (ج+۱)^۲ \}$$

$$۰ = \{ ۱ - (ج+۱)^۲ \}$$

$$(۲) \quad \dots \dots \dots = ۱ \quad \text{یعنی}$$

$$(۳) \quad \dots \dots \dots = ۱ + \{ ۱ - (ج+۲)^۲ \}$$

$$(۴) \quad \dots \dots \dots = ۱ - (ج+۱)^۲ + ۱ \quad \text{اور}$$

اس لیے

$$۱ = ۱ - \{ ۱ - (ج+۱)^۲ \} + \frac{۱}{(ج+۱)(ج+۲)} + \frac{۱}{(ج+۲)(ج+۳)} + \dots$$

$$\{ \dots \dots \dots + \frac{۱}{(ج+۱)(ج+۲)(ج+۳)(ج+۴)} -$$

قوت نما مساوات (۱) کی اصلیں ج = ۱ - ۱ - ۱ ہیں -  
لیکن اگر ہم اوپر کے سلسلہ میں ج = ۱ رکھتے ہیں تو سہولت پائی  
ہو جائے گی کیونکہ سب نمایاں ج + ۱ جزو ضربی ہے -  
اس شکل سے بچنے کے لیے لکھیں بجائے (ج + ۱) ک رکھیں تو  
(۱۱۵)

$$Y = k \left\{ \frac{1}{(3+J)^2} + \frac{1}{(5+J)^2} - \frac{1}{(7+J)^2} \right\} \dots (5)$$

اور لا فری + لا فری + (لا - ۱) ی = ک لا (ج + ۱) (ج - ۱) (ج - ۲)  
= ک لا (ج + ۱) (ج - ۱) (ج - ۲)  
عین صورت (۲) کی طرح ہر جزو ضربی (ج + ۱) سے  
یہ معلوم ہوتا ہے کہ جف ی اور ی دونوں تفرقی مساوات کو پورا  
کرتے ہیں جبکہ ج = ۱ - ۱ - ۱ نیز ی = ۱ رکھنے سے ایک حل  
حاصل ہوتا ہے - اس لیے بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس تفرقی  
مساوات کے جس کا رتبہ صرف دو ہے تین حل حاصل ہوئے ہیں  
ان کو حسب ذیل تفصیلاً لکھو:

$$k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\}$$

$$k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\}$$

$$k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\} = k \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right\}$$

انہ بالمشبہ شرط لکھیں - اس طرح ٹوٹ جاتی ہے کہ ہم اس کو بجائے یہ مان  
لیتے ہیں کہ

$$\text{اور ک ل} \left\{ 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 2} - \frac{1}{8 \times 2 \times 2} + \dots \right\} = \text{ک ط}$$

فرض کرو  
یہ ظاہر ہے کہ  $\text{ط} = 2 - \frac{1}{3}$  اس لیے فی الحقیقت ہم نے  
صرف دو حل جو خطی طور پر غیر تاج ہیں معلوم کئے ہیں اور کامل ابتدائی  
۱ + ۶ + ۷ = ۱۴۔ یہ شکے لاکے تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہیں  
اور اس کو آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔  
ان سلسلوں کی مماثلت (مستقل ضارب کو چھوڑ کر) جو  
ی کے جملہ میں علی الترتیب ج = ۱ اور ج = ۱ درج کرنے سے  
حاصل ہوئے ہیں اتفاقی نہیں ہے۔ یہ خیر ربط (۴)

$$1 = \{1 - (n+1)\} + \frac{1}{2} = 0$$

سے فوراً واضح ہو جاتی ہے۔ چنانچہ اگر ج = ۱ تو اس سے

$$1 = \{1 - (n+1)\} + \frac{1}{2} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{اور ج} = ۱ \text{ تو } 1 = \{1 - (n+1)\} + \frac{1}{2} = 0$$

اس لیے اس میں  $n$  کی بجائے  $n+2$  رکھنے سے

$$1 = \{1 - (n+1)\} + \frac{1}{2} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{اس طرح } \left[ \frac{1}{2} \right]_{n=1} = \left[ \frac{1}{2} \right]_{n=1} \dots \dots \dots (8)$$

چونکہ [ی] میں خطوط ودانی کے باہر لاجز و ضربی اور [ی] میں  
ج = ۱ ج = ۱



(۱۱۶) ایسا جزو ضروری لا ہے اس لیے رشتہ (۸) کا حقیقت میں یہ مطلب ہے کہ مذکورہ دو سلسلوں میں لا کی متناظر قوتوں کے سر ایک دوسرے کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ پہلے سلسلے میں بظاہر ایک رقم زائد معلوم ہوتی ہے یعنی وہ جس میں لا' شریک ہے لیکن یہ رقم جزو ضروری (ج + ۱) کی وجہ سے معدوم ہو جاتی ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلوں  $e$  اور  $e'$  بہ (ج + ۱) میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اگر ج = بہ رکھنے سے  $y$  کے بعض سرا متناہی ہو جائیں تو ہم  $y$  کی بجائے ک (ج - بہ) رکھ کر  $y$  کی شکل میں ترمیم کرتے ہیں اور پھر  $y$  کی ترمیم شدہ شکل اور  $\frac{جف}{ج}$  میں ج = بہ رکھ کر دو غیر تابع حل حاصل کرتے ہیں۔  $y$  میں ج =  $e$  رکھنے سے جو نتیجہ حاصل ہو گا وہ صرف اُس نتیجہ کا ایک عددی ضعف ہو گا جو ج = بہ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

### حل طلب مثالیں

(۱) رتبہ ۲ کی بیسل کی مساوات

$$لا^۲ - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۲} لا^۲ = ۱ (لا^۲ - لا^۲) + \frac{۱}{۲} لا^۲ = ۱$$

$$(۲) لا (لا - ۱) - \frac{۱}{۲} لا^۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} لا^۲$$

$$(۳) لا (۱-۱) - \frac{فرما}{فر لا} (۱۳+۱) - ۱ = ۱ - \frac{فرما}{فر لا}$$

$$(۴) (لا + لا + لا) \frac{فرما}{فر لا} + لا^۲ - ۱ = ۱ - \frac{فرما}{فر لا}$$

۹۹۔ صورت (۴)۔ جبکہ قوت نہائی مساوات کی  
اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور ان میں سے  
ایک اصل سے ی کا ایک سر غیر متعین ہو جائے۔

مساوات

$$(۱-لا) \frac{فرما}{فر لا} + لا^۲ + ۱ = ۱ - \frac{فرما}{فر لا}$$

پر غور کرو۔

حسب سابق عمل کرنے پر

$$ج (۱-ج) = ۱ - \dots (۱)$$

$$۱ (۱+ج) = ج \dots (۲)$$

$$۱ (ج+۲) (۱+ج) + ۱ - \{ج (ج-۱) + ج^۲ + ۱\} = ج \dots (۳)$$

$$۱ (ج+۳) (ج+۲) + ۱ - \{ج (ج+۱) + ج (۱+ج) + ج^۲ + ۱\} = ج \dots (۴)$$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

(۱) سے ج = ۱ یا ۱

(۲) میں ۱ کا سر مقدم ہوتا ہے جبکہ ج = ۱۔ لیکن چونکہ  
مساوات میں کوئی اور رقم نہیں ہے اس لیے اس سے ۱ لامتناہی  
ہونے کی بجائے غیر متعین ہو جاتا ہے۔

اگر  $j = 1$  تو  $0 = 1$   
 اس طرح اگر  $j = 0$  تو مساواتوں (۳) (۴) ... سے  
 $0 = 1 + 2$   
 $0 = 1 + 2 + 3$   
 $0 = 1 + 2 + 3 + 4$

وغیرہ

(۱۱۷) اور اس لیے [ی] =  $\{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \dots\}$   
 $+ \{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \dots\}$

اس میں دو اختیاری مستقل ہیں اس لیے اس کو کامل ابتدائی سمجھا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ کو  $|a| > 1$  کے لیے مستحق ثابت کیا جاسکتا ہے۔  
 لیکن ہمیں ایک دوسرا حل  $j = 1$  رکھنے سے ملتا ہے۔ ہر دو کو محسوب کرنے سے

[ی] =  $\{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \dots\}$

یعنی پہلے حل کے دوسرے سلسلہ کو ایک مستقل جنہو ضربی سے ضرب دیا گیا ہے۔

اس کی اسی استدلال سے پیش بینی کی جاسکتی تھی جس کو صورت (۳) میں بیان کیا گیا ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلوں  $\alpha$  اور  $\beta$  (عہ  $\alpha \neq \beta$ ) میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اگر  $j = 0$  بہ رکھنے سے

ی کا ایک سرغیر متعین ہو جائے تو کامل ابتدائی ج = بہ رکھنے سے حاصل ہو جاتا ہے کیونکہ اس میں وہ اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔ ی میں ج = عہ رکھنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ صرف (ایک جزو ضروری کے ساتھ) ایسا سلسلہ ہوتا ہے جو پہلے حل کے سلسلوں میں شامل رہتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) رتبہ ایک کی لیجنڈر کی مساوات

$$= r + \frac{r_1}{r} - \frac{r_1^2}{r^2} (1 - \frac{1}{r})$$

(۲) رتبہ ن کی لیجنڈر کی مساوات

$$= \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})$$

$$= I_{لا}^2 + \frac{I_{فر}^2}{I_{لا}^2} \quad (3)$$

$$= l(11+1) + \frac{l_1}{r_1} 11 + \frac{l_2}{r_2} (11+r) \quad (4)$$

۱۰۰۔ چند صورتیں جن میں اوپر کا طریقہ ناکام ہوتا ہے

چونکہ اللہ کو لا کی صعوبتوں میں نہیں پھیلا یا جاسکتا اس لیے ہمیں اس طریقہ کی ناکامی کی توقع رکھنی چاہئے جبکہ تفرقی مسأو کا

حل ایسی شکل کا ہو۔ مساوات  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  پر غور کرو جس کے حل  $x$  اور  $y$  قوتوں ہیں۔ اس کو  $\frac{1}{a^2}$  رکھ کر مستحیل کر دو تو

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{y^2 + b^2}{b^2}$$

$$\text{اور } \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b}\right)^2 = \left(\frac{y^2 + b^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{y^2 + b^2}{b^2}$$

پس نئی مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2 + b^2}{b^2}$$

(۱۸)

ہے۔ اگر ہم معمولی طریقہ استعمال کرتے ہیں تو قوت نامی مساوات  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2 + b^2}{b^2}$  حاصل ہوتی ہے جس کی کوئی اصلیت نہیں ہے کیونکہ جب فرض  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2 + b^2}{b^2}$  ہے۔

ہم کہتے ہیں کہ ایسی تفرقی مساوات  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2 + b^2}{b^2}$  کی صعودی قوتوں میں کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں رکھتی۔ بلاشبہ  $\frac{x^2}{a^2}$  اور  $\frac{y^2 + b^2}{b^2}$  کو  $\frac{1}{a^2}$  کی قوتوں میں پھیلایا جاسکتا ہے۔

جب ذیل مثالوں سے دوسری ممکن صورتیں جہاں مذکورہ بالا طریقہ ناکام رہتا ہے واضح ہوں گی مثلاً جبکہ قوت نامی مساوات کی صرف ایک اصل ہو اور اس سے ممکن ہے ایک مستحق سلسلہ

۱۸ یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو لامتناہی اصلیں ہیں۔

حاصل ہو یا نہ ہو۔  
یہ قابل ذکر ہے کہ مساوات کو ہر صورت میں شکل

$$لا^۲ \frac{فر۲}{لا} + لا^۲ \frac{فر۱}{لا} + ق (لا) = م$$

میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب طریقہ کامیاب ہوتا ہے تو  $ق (لا)$  اور  $ق (لا)$  کے لیے محدود ہوتے ہیں لیکن ناکامی کی ہر صورت میں یہ شرط پوری نہیں ہوتی۔  
مثلاً اوپر کی مثال میں

$$ع (لا) = ۲$$

$$ق (لا) = -\frac{۱}{لا} \text{ جو لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ } لا = ۰$$

## حل طلب مثالیں

(۱) بیسل کی مساوات کو اندراج  $لا = \frac{۱}{جی}$  سے مستعمل کرو۔  
اس سے ثابت کرو کہ لاکر نرولی قوتوں میں اس کے کوئی باقی

بکملے نہیں ہیں۔  
(۲) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا صرف ایک سیکمہ ہے جو  
لا کی صعودی قوتوں میں باقاعدہ ہے۔ اس کو معلوم کرو۔

$$لا^۳ \frac{فر۳}{لا} + لا^۲ (۱-۳) \frac{فر۲}{لا} - م = ۰$$

(۳)  $م = لا^۲ (۱+۲)$  رکھ کر پچھلی مثال کا کامل ابتدائی معلوم کرو  
(۴) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا کوئی ایسا سیکمہ نہیں ہے  
جو لاکر صعودی قوتوں میں باقاعدہ ہو کیونکہ وہ ایک سلسلہ جو حاصل ہوتا  
ہے لاکر تمام قیمتوں کے لیے متغیر ہے:

$$لا^۲ \frac{فر۲}{فر۳} - (لا^۳ - ۱) \frac{فر۱}{فر۳} = لا + ۱$$

(۵) پچھلی مثال کے دو ٹکڑے معلوم کرو جو لا کی نزولی قوتوں میں باقاعدہ ہوں۔

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کے کوئی ایسے ٹکڑے نہیں ہیں جو ایک صعودی قوتوں میں یا نزولی قوتوں میں باقاعدہ ہوں (۱۱۹)

$$لا^۲ (لا - ۱) \frac{فر۱}{فر۳} + لا^۲ \frac{فر۲}{فر۳} - (لا - ۱) لا^۲ = ۰$$

[یہ وہ مساوات ہے جس کا ابتدائی  $لا + لا^۱ + ب$  قوت  $لا - لا^۱$  ہے]

## نویں باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) لا^۹ \frac{فر۲}{فر۳} + لا^۲ \frac{فر۱}{فر۳} + ۸ \frac{فر۱}{فر۳} - لا = ۰$$

کے تین غیر تابع حل معلوم کرو۔

$$(۲) مساوات لا^۲ \frac{فر۲}{فر۳} + لا^۳ \frac{فر۱}{فر۳} + (لا - ۱) \frac{فر۱}{فر۳} - لا = ۰$$

کے تین غیر تابع حل، شکل

$$جف۱، جف۲، اور جف۳$$

کے معلوم کرو۔

$$(۳) ثابت کرو کہ استحالة  $\frac{۱}{ب} = \frac{فر۱}{فر۳}$  سے یکٹی کی مساوات  $\frac{فر۱}{فر۳} + ب = لا$$$

غلی شکل  $\frac{فر۲}{فر۱} - ب ج و لا =$   
 میں تحویل ہوتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر یہ صفر ہو نہ ایک صحیح عدد تو زائد ہندسی (Hypergeometric)  $\frac{فر۲}{فر۱} + \{ج - (ع + ب + ا) لا\} \frac{فر۱}{فر۱} - ع ب م =$   
 کے حل (مستحق اگر  $|لا| > 1$ )

فا (ع، ب، ج، لا) اور لا<sup>-۱</sup> فا (ع، ج، ب، لا) سے زائد ہندسی سلسلہ

$$1 + \frac{ع ب}{ا ج} + \frac{ع (ع + 1) ب (ب + 1) ج (ج + 1)}{لا \times 2 \times 1 (ج + 1)} + \dots + \frac{ع (ع + 1) (ع + 2) ب (ب + 1) (ب + 2) ج (ج + 1) (ج + 2)}{لا^3 \times 3 \times 2 \times 1 (ج + 1) (ج + 2)} + \dots$$

تعبیر ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ اندراجات لا = ۱ - ی اور لا =  $\frac{۱}{ی}$  سے زائد ہندسی مساوات علی الترتیب

$$ی (۱ - ی) \frac{فر۲}{فر۱} + \{ع + ب + ۱ - ج - (ع + ب + ا) ی\} \frac{فر۱}{فر۱} - ع ب م =$$

اور  $ی^۲ (۱ - ی) \frac{فر۲}{فر۱} + ی \{ع - (۱ - ع - ب) - (۲ - ج) ی\} \frac{فر۱}{فر۱} + ع ب م =$

میں مستحیل ہوتی ہے جن میں پہلی مساوات کی شکل بھی زائد ہندسی ہے۔



(۱۲۰) پچھلی مثال سے یہ افذکر کو ابتدائی مساوات کے چار مزید حل

(ع) ع' ب' ع' + ج' - 1 + ح' - 1 = 0

(۱-۱) جہ-عہ-ہفا (جہ-بہ-جہ-عہ+جہ-عہ-بہ-۱-۱) لا

لا<sup>ع</sup> فا (ع<sup>ع</sup> + ا - ج<sup>ع</sup> + ا - ب<sup>ع</sup> + ا - لا<sup>ع</sup>)

اور لا<sup>ج</sup> فا (بہ، بہ، + ا- جب، بہ، + ا- عہ، لا<sup>ج</sup>)

ہیں۔

۱۶) ثابت کرو کہ  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_c}$  جہاں  $\lambda_0$  سے زائد ہندسی مساوات  
دوسری زائد ہندسی مساوات میں مستحیل ہوتی ہے اگر

لنا = جہ - ع - بہ

پس ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کے دو مزید حل

(۱-ا) جہ-عہ-ہ فا (جہ-عہ-جہ-جہ-جہ-لا)

اور لا<sup>۱</sup>جہ<sup>۲</sup>(لا)جہ<sup>۳</sup>فا(اے)بہ<sup>۴</sup>جہ<sup>۵</sup>لا

ہیں۔

[نوٹ: مثال ۵ سے یہ معلوم ہے کہ اگر  $z$  ایک بند سی مسات کے ابتدائی دو عملوں سے کس طرح دو دوسرے حل استحالوں  $z=1$  -  $z=1$  اور

لا =  $\frac{1}{u}$  کے ذریعہ معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح لا =  $\frac{1}{v}$ ،

$$\text{لا} = \frac{Y}{1-Y}, \text{ لا} = \frac{1-Y}{Y} \text{ میں سے ہر استعمال سے دوزائد حاصل}$$

ہوتے ہیں اور اس طرح کل ۱۲ مل ملتے ہیں۔ مثال کی طرح عمل کرنے پر یہ تعداد ڈگنی کیجا سکتی ہے اور کل ۲۴ مل حاصل ہوں گے۔ یہ پانچ

استحالے مع مائل استحالہ لا = ی کے ایک گروہ بناتے ہیں یعنی ایسے دو استحالوں کو علی التواتر عمل میں لانے سے ہمیشہ ابتدائی گروہ کا ایک استحالہ حاصل ہوگا۔  
(۷) ثابت کرو کہ اگر ۲ن ایک طاق صحیح عدد (مثبت یا منفی) نہ ہو تو لیجنڈر کی مساوات

$$(۱-لا) \left( \frac{۲}{۴} - \frac{۲}{۴} \right) لا ۲ - \frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۴} (۱+ن) = ۰$$

کے حل، لا کی نزولی قوتوں میں باقاعدہ،

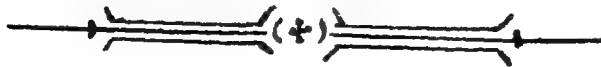
$$لا-۱ \text{ فا } \left( \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} \right) لا ۲$$

$$\text{اور لا فا } \left( -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \right) لا ۲$$

ہیں۔

[وہ حل جو صورت ۲ن = ۱ کے جواب میں ہے اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ دفعہ ۹۷ کی مثال (۴) کے نتیجہ میں لا کو لا میں تبدیل کیا جائے]

(۸) ثابت کرو کہ رتبہ ن کی بیسل کی مساوات کے حل کی شکل اس پر منحصر ہوتی ہے کہ آیا ن صفر ہے، یا صحیح عدد ہے، یا غیر صحیح عدد اگرچہ قوت نامساوات کی اصلوں کا فرق ن نہ ہو بلکہ ۲ن ہو۔



# دسوان باب\*

(۱۲۱)

پکڑ، کوشی، اور فراہنہ کے مسائل موجودگی

۱۰۱۔ مسئلہ کی نوعیت۔ گذشتہ بابوں میں بعض خاص شکلوں کی تفرقی مساواتوں کے حل حاصل کرنے کے لیے ہم نے متعدد ترکیبیں معلوم کیں۔ ایک زمانہ میں علماء ریاضی کو ایک ایسے طریقہ کے انکشاف کی امید تھی کہ کسی تفرقی مساوات کا حل معلومہ تفادوں یا ان کے محمولوں کی ایک محدود تعداد کی رقوم میں بیان ہو سکے۔ لیکن جب یہ حقیقت واضح ہوئی کہ یہ ناممکن ہے تو یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا تفرقی مساوات کا حل عام طور پر ہوتا بھی ہے یا نہیں اور اگر ہوتا ہے تو کس قسم کا۔

اس سوال پر بحث کرنے کے دو جدا جدا طریقے ہیں۔ ایک پکڑ کا طریقہ ہے جس کو مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جا چکا ہے (صفحہ ۸۳ اور ۸۴)۔ اس میں ہم نے متواتر تقریب حاصل کئے جو بظاہر

\* مطالعہ اول میں اس باب کو چھوڑ دو۔

۱۰۲۔ آگسٹ لونی کوشی (۱۸۵۷ء تا ۱۸۵۸ء) کو تفادوں کے نظریہ کا اور تفرقی مساواتوں موجودہ نظریہ کا موجد سمجھا جاسکتا ہے۔ موصوف نے محدود تکمیل کو کھیر (Contour) تکمیل کے ذریعہ معلوم کرنے کا طریقہ بخوبی کیا۔

ایک انتہا کی طرف مائل تھے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ یہ تقرب فی الواقع ایک انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ اس انتہا سے حل حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح ہم ثابت کریں گے کہ خاصی عام نمونہ کی تفرقی مساوات کا حل موجود ہوتا ہے۔ اس قسم کے مسئلہ کو  $\frac{1}{x}$  کہتے ہیں۔ پیکر و کوشی کا طریقہ مشکل نہیں ہے اور اس لیے دوسرے طریقے کے متعلق کچھ کہنے سے پیشتر ہم فوراً اس پر توجہ ہوں گے۔ یہ ذہن نشین رہے کہ اس باب کا مقصد مخصوص مساواتوں کے ایسے حل دریافت کرنا نہیں ہے جو عملاً بھی مفید ہوں۔ ہم ثابت کریں گے کہ حلوں کو حاصل کرنے میں جو مفروضہ اختیار کئے گئے تھے وہ صحیح تھے اور نیز ہم ان شرطوں کو ٹھیک طور پر بیان کریں گے جو حل کردہ مساواتوں کے مشابہ مساواتوں میں صحت کا یقین دلانے کے لیے کافی ہیں ان مساواتوں کو اس قدر عام شکل میں رکھا گیا ہے جس قدر ممکن ہے۔

۱۰۲۔ پیکر و کوشی کا طریقہ۔ اگر  $\frac{1}{x}$  (۱۲۲)

= ف (لا، ما) اور ما = ب جبکہ لا = ا تو لا کی رقوم میں ما کی قیمت کے لیے حسب ذیل متواتر تقرب حاصل ہوتے ہیں:

ب +  $\frac{1}{a}$  ف (لا، ب) فرلا = ما، فرض کرو

ب +  $\frac{1}{a}$  ف (لا، ما) فرلا = ما، " " "

ب +  $\frac{1}{a}$  ف (لا، ما) فرلا = ما، " " "

اور علیٰ ہذا القیاس۔

ہم اس طریقہ کو مختلف مثالوں پر استعمال کر کے سمجھا چکے ہیں دفعات (۸۳ اور ۸۴) ہم نے وہ مشورہ لی تھی جس میں ف (لا، ما) = لا + ما اور ب = ا = ۰

چنانچہ حاصل ہوا تھا

$${}^1\frac{1}{2} = {}^1\frac{1}{2}$$

$${}^1\frac{1}{2} + {}^2\frac{1}{2} = {}^3\frac{1}{2}$$

$${}^1\frac{1}{2} + {}^2\frac{1}{2} + {}^3\frac{1}{2} + {}^4\frac{1}{2} = {}^4\frac{1}{2}$$

یہ تفاعل، لا کی کافی چھوٹی قیمت کے لیے ایک انتہائی طرف مائل نظر آتے ہیں۔ اس دفعہ کا مقصد یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ امر نہ صرف اس مخصوص مثال میں درست ہے بلکہ اس وقت بھی جبکہ ف (لا، ما) چند شرطوں کو جو شخص کی جائیں گی پورا کرے۔

شرطیں یہ ہیں کہ دو مثبت عدد ۱ اور ۱ کے درست انتخاب کے بعد ہم یہ دعویٰ کر سکیں کہ ۱۔ ۱ اور ۱ + ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے اور ب۔ ک اور ب + ک کے درمیان ما کی تمام قیمتوں کے لیے ہم ایسے مثبت عدد ۱ اور ۱ معلوم کر سکتے ہیں کہ

$$(۱) \text{ ف (لا، ما) } > ۱$$

$$(۲) \text{ ف (لا، ما) } > ۱ + ۱ - ۱$$

جہاں ما اور ما زیر بحث سعت میں ما کی کوئی دو قیمتیں ہیں۔

اوپر کی مثال میں ف (لا، ما) = لا + ما، شرط (۱) صریحاً پوری

ہوتی ہے اگر ہم کی بجائے کوئی ایسا مثبت عدد لیا جائے جو ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱

+ ک سے بڑا ہو۔

$$\text{نیز } |(لا + ما) - (لا + ما)| = |ما + ما - ما| = ۲(ب + ک) - ما$$

اس لیے شرط (۲) بھی پوری ہوتی ہے اگر ۱ = ۲(ب + ک) لیا جائے

عام صورت میں ہم ان فرقوں پر غور کرتے ہیں جو متواتر



۱، ۲ اور ۳ کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہے۔  
اس لیے لامتناہی سلسلہ

$$1 + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

جس کی ہر رقم گذشتہ سلسلہ کی متناظر رقم کے مساوی یا اس سے کم ہے  
بدرجہ اولیٰ مستحق ہے۔  
اس کا یہ مطلب ہے کہ تواتر

$$1 = 1 + (1-1)$$

$$1 = 1 + (1-1) + (1-1)$$

ایک معین انتہا [فرض کرو ما (لا)] کی طرف مائل ہے اور یہی ثابت  
کرناتھا۔

اب یہ ثابت کرنا چاہئے کہ ہا تفرقی مساویات کو یوں کرتا ہے  
پہلی نظر میں یہ بالکل درست معلوم ہوتا ہے لیکن فی الواقع  
ایسا نہیں ہے کیونکہ ثبوت کے بغیر یہ فرض نہیں کر لینا چاہئے کہ

$$1 = 1 + (1-1) = 1 + (1-1) + (1-1) + \dots$$

وہ طالب علم جو یہ جانتا ہے کہ "یکساں استدقاق" کا مفہوم

کیا ہے فوراً سمجھ لے گا کہ نامساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے جن کو ہم نے  
سلسلہ کے صرف استدقاق کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کیا  
ہے فی الحقیقت اس سلسلہ کا یکساں استدقاق ثابت ہوتا ہے۔  
پس اگر ف (لا، ما) مسلسل ہے تو ما، ما، وغیرہ بھی مسلسل ہیں۔  
اور ما مسلسل تفاعلوں کا ایک یکساں مستحق سلسلہ ہے یعنی ما خود  
بھی مسلسل ہے اور ما۔ ۱، یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے

جبکہ ن بڑھتا ہے۔

پس شرط (۲) کی رو سے ف (لا'ما)۔ ف (لا'ما) یکساں طور پر صفر کی جانب مائل ہے۔  
اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

(۱۲۴)

مکمل ف (لا'ما)۔ ف (لا'ما) کم فرلا  
صفر کی جانب مائل ہے۔  
اس طرح رشتہ

ما = ب + مکمل ف (لا'ما) فرلا

کی انتہا ما = ب + مکمل ف (لا'ما) فرلا

ہے، اس لیے  $\frac{فرلا}{فرلا} = ف (لا'ما) اور ما = ب جبکہ لا = ۱۔$

پس ثبوت مکمل ہو چکا۔

۱۰۳۔ کوشی کا طریقہ۔ لامتناہی سلسلوں کے لیے مسئلہ

کوشی کا طریقہ یہ ہے کہ تفرقی مساوات سے ایک لامتناہی سلسلہ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دوسرے لامتناہی سلسلہ کے ساتھ مقابلہ کر کے اس کو مستحق ثابت کیا جاتا ہے۔ یہ دوسرا سلسلہ مساوات کا حل نہیں ہوتا لیکن اس کے سروں کے درمیان رشتہ اصلی سلسلہ کے سروں کے درمیان رشتہ کی بہ نسبت زیادہ سادہ اور آسان ہوتا ہے۔ اس طریقہ کی توضیح کے لیے ہم (پہلی مثال) پہلے رتبہ کی خطی مساوات

سے مکملہ کو تفرق کرتے وقت طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ مکملہ صرف اپنی بالائی حد کے تغیر کی وجہ بدلتا ہے۔



تفرقی مساواتیں۔ باب ۲۴۴ یکڑ کوشی اور فرانسس کے مسئلے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{4}{5} (لا) \times ما$$

کو لیں گے۔ بلاشبہ اس مساوات کو متغیروں کی جدائی سے فوراً حل کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{لوک } ما = ج + ک ع (لا) \text{ فرلا}$$

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن ہم یہاں اس پر اتنا ہی سلسلہ کے ذریعہ اس وجہ سے بحث کر رہے ہیں کہ بحیث

$$\frac{\text{فرما}^2}{\text{فرلا}^2} = ع (لا) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ق (لا) \times ما$$

اور اعلیٰ ترتیبوں کی مساواتوں کی ذرا مشکل بحث کے بہت مشابہ ہے۔  
قوت کے سلسلوں سے متعلق حسب ذیل مسئلوں کی ضرورت پیش آئے گی۔ متغیر لا کو ملطف فرض کیا گیا ہے۔ مطلق قیمتوں کو  
الٹن کی بجائے اختصاراً بڑے حرفوں لٹن وغیرہ سے تعبیر کیا جائے گا۔

(۱) قوت کا سلسلہ  $\sum_{n=1}^{\infty} لٹن$  اپنے استدقاق کے

دائرہ  $||ا|| = س$  کے اندر تمام نقطوں پر مطلقاً مستحق ہوتا ہے۔  
(ج) اس دائرہ کا نصف قطر س مساوات

$$\frac{1}{س} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{لٹن^{n-1}}{1 + لٹن}$$

سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو۔

(ج)  $||ا|| = س$  کے اندر  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} لٹن \right) = 1 - لٹن^{1-}$

(د) اگر قوت کے دو سلسلے ہوں تو اس علاقہ کے اندر جو ان کے استدقاق کے دائروں میں مشترک ہے

$$(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) + (\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$+ \dots + (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

(ع) اگر دائرہ  $|a| = r$  کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{تو} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(ف)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  جہاں  $a_n$  سلسلہ کے اس حاصل

جمع کی مطلق قیمت سے بڑا ہے جو دائرہ  $|a| = r$  کے نقطوں کے لیے حاصل ہوتا ہے جبکہ اس دائرہ پر سلسلہ مستقیم ہو۔

ان مسئلوں کے ثبوت براہ سوچ کی کتاب (Infinite Series) میں ملیں گے:

(۱) دفعہ ۸۲ میں [دوسرے اڈیشن کے دفعہ ۸۲ میں]

(ب) جو ڈیمبر کی نسبتی جانچ کا صریح نتیجہ ہے، دفعہ ۱۲ میں

(ج) دفعہ ۵۲ میں [دفعہ ۱۲ دوسرے اڈیشن میں دفعہ ۱۲۵۲ ہے]

(د) دفعہ ۵۴ میں

(ع) دفعہ ۵۲ میں

(ف) دفعہ ۸۲ میں [دوسرے اڈیشن کے دفعہ ۸۲ میں]

آئندہ چل کر یکساں استدقاق پر دو مسئلوں کی ضرورت ہوگی لیکن ہم اس کو یہاں اس وقت تک ملتوی کرتے ہیں جب تک کہ ان کی ضرورت نہ ہو۔

$$۱۰۴ - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ماع (لا) کے حل (سلسلہ میں)}$$

کا استدقاق ہے۔ فرض کرو کہ ع (لا) کو قوت کے سلسلہ

ج ع ل میں پھیلا یا جاسکتا ہے جو دائرہ | لا | = م پر اور اس کے

اندر ہر جگہ مستحق ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ ایک حل م = ج ل ل

حاصل ہو سکتا ہے جو اس دائرہ کے اندر مستحق ہے۔

تفرقی مساوات میں اندراج کرنے پر

$$\text{ج ل ل}^1 = \text{ج ل ل}^{\infty} \text{ج ع ل}^{\infty} \text{ (مسئلہ ج)}$$

$$= \text{ج}^{\infty} (\text{ل}^1 \text{ع} + \text{ل}^1 \text{ع}_1 - \text{ل}^1 \text{ع}_2 + \text{ل}^1 \text{ع}_3 - \dots + \text{ل}^1 \text{ع}_n)$$

(مسئلہ د)

لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے (مسئلہ ع)

$$\text{ل}^1 = \text{ل}^1 \text{ع}_1 - \text{ل}^1 \text{ع}_2 + \text{ل}^1 \text{ع}_3 - \dots + \text{ل}^1 \text{ع}_n + \dots + \text{ل}^1 \text{ع}_{n-1} - \text{ل}^1 \text{ع}_n$$

(۱)۔۔۔۔۔

اس لیے ل، ل، اور ع، ع، کی مطلق قیمتوں کے لیے جبکہ انہیں متناظر بڑے حروف سے تعبیر کیا گیا ہو حاصل ہوتا ہے (۱۲۶)

$$\text{ل}^1 \geq \text{ل}^1 \text{ع}_1 - \text{ل}^1 \text{ع}_2 + \text{ل}^1 \text{ع}_3 - \dots + \text{ل}^1 \text{ع}_n + \dots + \text{ل}^1 \text{ع}_{n-1} - \text{ل}^1 \text{ع}_n \text{ (۲)۔۔۔۔۔}$$

لہ اس کو پڑھنے سے پہلے دفعہ ۷ کا مکر مطالعہ کرو۔



$$\frac{1}{s} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

اس لیے سلسلہ  $b_n$  لا دائرہ  $|a| = s$  کے اندر مستحق ہے۔  
(سلسلہ  $b$ )

اس لیے سلسلہ  $b_n$  لا اسی دائرہ کے اندر بدرجہ اولیٰ مستحق ہے  
کیونکہ

$$|b_n| > |b_{n-1}|$$

تمام سروں  $b_1, b_2, \dots$  کو (۱) سے  $b, c, \dots$  کی (جو معلوم  
فرض کیے گئے ہیں) اور اختیاری مستقل  $b$  کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا  
۱۰۵۔ اس ثبوت کے متعلق چند امور۔ طالب علم کو  
گذشتہ دفعہ کے سمجھنے میں غالباً بڑی دقت ہوئی ہوگی۔ لیکن کام کی تفصیلاً  
سب پریشان نہیں ہونا چاہئے۔ خاص بات یہ ہے کہ ہم  
ہم  $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{s}$  کو ثابت کرنا پسند کرتے لیکن بد قسمتی سے وہ رشتہ

جس سے  $b_1$  وغیرہ کی تعریف ہوتی ہے ذرا پیچیدہ ہے۔ اس کو ہم  
اولاً  $b_1, b_2, b_3, \dots$  کو خارج کر کے مختصر

بناتے ہیں۔ لیکن اس کے بعد بھی رشتہ پیچیدہ ہی رہتا ہے۔  
(۱۲۷) کیونکہ اس میں  $b_n$  شامل ہوتے ہیں۔ ہمیں تو ایسے رشتہ کی ضرورت  
ہے جس میں صرف دو  $b$  شامل ہوں۔  $b_n$  کی مناسب تعریف  
اختیار کرنے سے  $b_n$  اور  $b_{n-1}$  کے درمیان ایک ایسا رشتہ مل جاتا

جس سے ہم

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

پہلے پہلے ہم کہتے ہیں کہ ایک بہت ہی سادہ مساوات کی ہتھکڑی  
پیچیدہ بحث کا صرف یہ مقصد ہے کہ ایک نمونہ حاصل ہو جائے  
تاکہ طالب علم اس کو دوسری صورتوں میں نقل کر سکے۔

### حل طلب مثالیں

(۱) اگر  $E$  (لا) اور  $Q$  (لا) کو قوت کے ایسے سلسلوں میں  
پھیلا یا جاسکے جو دائرہ  $E = Q$  کے اندر اور اس کے اوپر تمام نقطوں  
کے لیے مستحق ہوں تو ثابت کرو کہ ایک ایسا سلسلہ، اسی دائرہ کے  
اندر مستحق، پہلے دو سلسلوں کے سروں (اختیاری مستقل) کی رقوم میں  
معلوم کیا جاسکتا ہے کہ وہ

$$\frac{Q^2}{E} = E(1 - \frac{Q}{E}) + \frac{Q}{E} + Q(1 - \frac{Q}{E})$$

کو پورا کرے۔

$$[ \text{یہاں } n(1-n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-3} + \dots ]$$

$$1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots$$

پس اگر ہر کوئی عدد ہو جو  $E(1 - \frac{Q}{E})$  اور  $Q(1 - \frac{Q}{E})$  دونوں کی ان مطلق  
قیمتوں سے جو دائرہ  $E = Q$  حاصل ہوتی ہیں بڑا ہو تو

$$\frac{1}{n} > \left\{ \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots \right\}$$

$$+ (l_{n-2} + l_{n-3} + \dots + l_{n-1} + l_{n-2}^{n-1})$$

$$> \frac{m}{n} (1 + m) (l_{n-1} + l_{n-2} + \dots + l_{n-1}^{n-1})$$

[اس نامساوات کی بائیں جانب کو ب سے تعبیر کر کے حسب سابق عمل کرو]

$$(2) \text{ مساوات } \frac{m^3}{n^3} = \frac{m}{n} \times (l_{n-1}) + \frac{m^2}{n^2} \times (l_{n-1}) + \frac{m}{n} \times (l_{n-1}) + \dots + \frac{m}{n} \times (l_{n-1})$$

کے لیے متشابه نتیجے ثابت کرو۔

## ۱۰۶۔ فرا بنیس کا طریقہ۔ ابتدائی بحث۔

اگر طالب علم گذشتہ دفعہ کو خوب سمجھ چکا ہے تو فرا بنیس کے طریقہ سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے اس کے استدقاق کی تحقیق کرنے کا مشکل مسئلہ ذہن نشین کرنے میں آسانی ہوگی۔ گذشتہ باب میں (جس کو آگے بڑھنے سے پہلے اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے) ہم نے یہ دیکھا کہ بعض صورتوں میں ہمیں دو سلسلے حاصل ہوئے تھے جن میں سرے لاکھ قوتیں شریک تھیں لیکن دو سروں میں نو کار تم موجود تھے۔

بہلی صورت میں عمل کا طریقہ گذشتہ دفعہ کے طریقہ کے بہت مشابہ ہے۔ لیکن دو سری صورت میں ایک نئی شکل پیدا ہوتی ہے۔ نو کار تموں والے سلسلے سلسلوں کو تبدیل ج کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوئے تھے۔ اب تفرق انتہا لینے کا ایک عمل ہے اور ایک لامتناہی سلسلہ کو جمع کرنا بھی انتہا لینے کا دوسرا عمل ہے۔ یہ کسی طرز واضح نہیں کہ نتیجہ وہی ہوگا خواہ ان دو عملوں میں سے کسی ایک کو پہلے کیا جائے اس صورت میں بھی جبکہ تفرقی سروں والا سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

ہم ثابت کریں گے ہم نے جو صورت لی ہے اس میں عمل تفرق

جائز ہے لیکن یہ ثابت ہے۔ ہمارے سلسلے ان شرطوں کو پورا کرتے ہیں جو رقم بہ رقم تفریق کرنے کے لیے کافی ہیں۔ درجہ طویل اور پریشان کن ہے۔ مضمون ذیل پر ہے وقت طالب علم کو اولاً جبر و مقابلہ کی تفصیلات سے چشم پوشی کرنی چاہئے اور اپنی توجہ کو خاص کر استدلال کے عام رُخ پر مرکوز رکھنا چاہئے۔ جب یہ اچھی طرح ذہن نشین ہو جائے تو پھر وہ ان تفصیلات پر غور کر کے ان کی تصدیق کر سکتا ہے۔

۱۰۷۔ فرہنیس کے سلسلہ میں سروں کو حاصل کرنا جبکہ قوت نامساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد یا صفر کا فرق نہ ہو۔ جلد

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x^2} = 0 \quad \text{فرما} \quad - \frac{a^2}{x^2} = 0 \quad \text{ق (لا)}$$

$$= 0 \quad \text{فہ (لا، فرما، فرما)} \quad \text{فرض کرو}$$

پر غور کرو جہاں  $x$  (لا) اور  $q$  (لا) دونوں کو قوت کے سلسلوں  $\frac{a^2}{x^2}$  اور  $\frac{a^2}{x}$  ق  $\frac{a^2}{x^2}$  میں جو دائرہ  $|a| = s$  کے اندر اور اس کے اوپر مستقیم ہیں پھیلا یا جاسکتا ہے۔ ہم تفرقی مساوات

$$f(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x^2} = 0 \quad \text{فرما، فرما، فرما}$$

کامل حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

اگر  $m$  کی بجائے  $\frac{a^2}{x^2}$  (جس میں  $a \neq 0$ ) رکھا جائے تو  $f(x) = \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x^2} = 0$







ہر ایک مثبت عدد ہے جو ان تمام نقطوں پر جو دائرہ  $|a| = s$  پر ہیں  
 $E(a)$  اور  $Q(a)$  کی مطلق قیمتوں سے بڑا ہے۔

$$تب \quad E(s) > M(s) \\ \text{اور} \quad Q(s) > M(s)$$

اس لیے  $|E(s)| > |Q(s)| + (s - n - s) > M(s) + (s - n - s) + 1$   
 ان نامساواتوں اور (۲) سے

$$L(s) > M(s) + (s - n - s) + 1 + \dots$$

۱.  $(s - n - s) + 1 + \dots + (s - n - s) + 1 + \dots + (s - n - s) + 1 + \dots$   
 (۲) کی بائیں جانب کے جملے کو  $B(s)$  سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ  
 $L(s) > B(s) - s$  سے  $B(s)$  کی تعریف ملتی ہے اگر  $n < s$ ۔ فرض  
 کرو کہ  $B(s)$  کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ وہ کوئی مثبت عدد ہے جو  
 ۱ سے بڑا ہے۔  $B(s)$  کی اس تعریف سے حاصل ہوتا ہے

$$B(s) + (s - n - s) + 1 = B(s) + (s - n - s) + 1 = B(s) + (s - n - s) + 1$$

$$B(s) + (s - n - s) + 1 = B(s) + (s - n - s) + 1 = B(s) + (s - n - s) + 1$$

$$(۱۳) \quad \frac{B(s) + (s - n - s) + 1}{B(s)} = \frac{B(s) + (s - n - s) + 1}{B(s)}$$

یعنی  $\frac{(ج+ن)(ج+ن-۱)-ع(ج+ن)-ق|+ک(ج+ن+۱)}{س}$

س  $\frac{(ج+ن+۱)(ج+ن)-ع(ج+ن+۱)-ق|}{س}$

اب ن کی بڑی قیمتوں کے لیے بائیں جانب کا جملہ قیمت

$$\frac{۱}{س} = \frac{ن}{س}$$

کے قریب آتا ہے۔ اس لیے

$$\frac{۱}{س} = \frac{ب+ن}{ب}$$

اس لیے سلسلہ  $\frac{۱}{س}$  اور بدرجہ اولیٰ سلسلہ  $\frac{ن}{س}$  لا، دائرہ

۱ = س کے اندر مستحق ہیں۔

پس جب، ع اور ب میں ایک صحیح عدد کا فرق نہیں ہوتا تو دو مستحق لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو تفرقی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

۱۰۹۔ ترمیم جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں

میں فرق صفر ہو یا ایک صحیح عدد ہو۔ جب ع اور

بہ مساوی ہوتے ہیں تو اس طریقہ سے صرف ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے

جب، ع اور ب میں ایک صحیح عدد کا فرق ہوتا ہے تو یہ طریقہ

بڑی اصل کے لیے درست ہوتا ہے لیکن چھوٹی اصل کے لیے نہیں

کیونکہ اگر ع = ب = ر (ایک مثبت صحیح عدد) تو (۵) اور (۶) سے

$$ف(ع+ن) = ن(ع+ن-ب) = ن(ن+ر)$$

$$لیکن ف(ب+ن) = ن(ب+ن-ع) = ن(ن-ر)$$

جو معدوم ہوتا ہے جبکہ ن = ر اور اس لیے ر کے نسب نما میں ایک



جس میں  $1 = k$  (ج - بی) اور (ج - بی) کو تقسیم کر کے خارج کرنا ہوگا اگر وہ نسب نامہ میں واقع ہو۔

اب گرسا نے (Cours d'Analyse Vol. II, p. 98) میں ثابت کیا ہے کہ اگر (۱) تمام مساویہ تفاعل ہیں کہ وہ ایک خاص علاقہ میں جو ایک بند گھیرے میں محدود ہے، اور کُل شکلی (Holomorphic) ہیں اور اس گھیرے پر مسلسل ہیں اور اگر (۲) ان تفاعلوں کا سلسلہ اس گھیرے پر ایساں مستحق ہے تو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے ایک مستحق سلسلہ حاصل ہوگا جس کا مجموعہ ابتدائی سلسلہ کے مجموعہ کا تفرقی سر ہوگا۔ کُل شکلی اور تحلیلی کی تعریفوں کے لیے گرسا کی محولہ بالا کتاب کا ابتدائی حصہ دیکھو۔ یہ واضح ہے کہ تفاعل مساں شرطوں کو پورا کرتے ہیں اور مسلسل ہیں جب تک کہ ہم ج کی ان قیمتوں سے دور رہتے ہیں جن سے یہ تفاعل لامتناہی ہو جاتے ہیں۔ یہ قیمتیں  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ہیں۔ ۱۔  $a_1$ ، ۲۔  $a_2$ ، ۳۔  $a_3$  وغیرہ ہیں۔ ان سے بچنے کے لیے علاقہ کو ایک ایسے دائرہ کے اندر لوجس کا مرکز  $a_1 = 0$  ہے اور نصف قطر ایک سے کم ہو۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ اس علاقہ کے اندر سلسلہ ہر جگہ یکساں طور پر مستحق ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوگا کہ وہ ایک ایسے علاقہ کے گھیرے پر یکساں طور پر مستحق ہے جو پہلے علاقہ کے اندر اور اس کے مشابہ اور قد۔ ہے چھوٹا ہے۔

فرض کرو کہ س ایک مثبت صحیح عدد ہے جو بڑے علاقہ کے اندر ج کی بڑی سے بڑی قیمت سے بڑا ہے۔ تب اس علاقہ کے اندر ج کی تمام قیمتوں کے لیے اس سے بڑی ن کی قیمتوں کی صورت میں

$$f(n) = (n+1) - (n+2) + (n+3) - (n+4) + \dots + (-1)^{n+1} n$$

ف کی تعریف کی کہ موجب

$$\leq (ج + ن)^2 - (ع + ا)(ج + ن) - ق$$

کیونکہ  $ا - ع \leq ا - ا$

$$< (ن - س)^2 - (م + ا)(س + ن) - م$$

کیونکہ  $ع > م$  اور  $ق > م$

$$< ن^2 + ع + ن + جے$$

جہاں  $ع$  اور  $جے$

ن<sup>۱</sup> لا یا ج پر منحصر نہیں ہیں۔  
 ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے (مثلاً فرض کرو  $ن < م$ ) یہ آخری  
 جملہ ہمیشہ مثبت ہوگا۔  
 فرض کرو کہ علاقہ میں ج کی تمام قیمتوں کے لیے

$$م [ (م + ج) تر + ا - م - (ج + م - ا) تر + ..... ] + (ج + ا) تر + ..... (۹)$$

کی اعظم قیمت  $ھ$  سے تعبیر ہوتی ہے۔  
 اب اگر  $ت م$  بام سے بڑا کوئی مثبت عدد ہو اور اگر  $ن$  کی م  
 سے بڑی قیمتوں کے لیے  $ت$  کی تعریف کی جائے کہ

$$م \{ ت - (س + ن) تر + ..... + ت م (س + م + ا) تر + ..... + ھ \}$$

$$ت = ن^2 + ع + ن + جے$$

$$ت = \frac{ت م (س + م + ا) تر + ھ تر}{(م + ا) + ع + (م + ا) + جے}$$

جس کا شمار کنندہ 'ب'  $1+m$  کے شمار کنندہ سے بڑا اور جس کا نسب نامہ 'ب'  $1+m$  کے نسب نامہ سے چھوٹا ہے { (۸) اور (۹) کی رو سے } اور 'ب' کی تعریف سے جو یہ ہے کہ وہ (۷) کے بائیں جانب کے جملہ کو تعبیر کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$1+m < 1+m$$

اسی طرح  $1+n < 1+n$  کی م سے بڑی تمام قیمتوں کیلئے

(۱۰) سے ثابت ہوتا ہے کہ  $\frac{1+n}{1+m} = \frac{1}{\infty}$  کام کا یہ حصہ اس کام کے اس قدر مشابہ ہے جو دفعہ ۱۰۸ کے آخر میں کیا گیا ہے کہ اس کو طالب علم کے لیے مشق کے طور پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ پس  $1+n > 1+m$  مستحق ہے اگر  $1+n > 1+m$  اس لیے دائرہ  $1+n = 1+m$  کے اندر اور اس علاقہ کے اندر جو ج کے لیے مختص کیا گیا ہے

$$1+n > 1+m > 1+n > 1+m$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ  $1+n > 1+m$  سے دیر سٹر اس کی ہر والی جانچ جو یکساں استحقاق (براموج دفعہ ۴۴) کے لیے ہے پوری ہوتی ہے کیونکہ  $1+n$  اور تمام  $1+m$  کے غیر تابع ہیں۔



اس سے اس ثبوت کی تکمیل ہوتی ہے کہ  $\chi = 3$  سال  $\chi = 1$  سال  
 تمام مقررہ شرطوں کو پورا کرتا ہے، اس لیے ج کے لحاظ سے تفرق  
 اب جائز ہے۔ یہ دائرہ  $|a| = 1$  کے اندر درست ہے۔ ہم دائرہ  
 کا گواہ بنا کر لے سکتے ہیں کہ دائرہ  $|a| = 1$  کے اندر کا ہر نقطہ اس میں  
 شامل ہو جائے۔  
 اگر قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق  
 ہونے کی بجائے وہ مساوی ہوں تو اوپر کے کام میں صرف یہ فرق  
 پڑے گا کہ اب  $a$  کی بجائے  $k$  (ج۔ ب) کو رکھنے کی ضرورت نہیں  
 ہوگی کیونکہ  $a$  کے نسب نامہ میں کوئی (ج۔ ب) جزو ضربی کے  
 طور پر شریک نہیں ہوگا۔  
 [نویں اور دسویں باب کے تکملہ کے لیے دفعہ ۱۱، ۱۲، ۱۳ کا مطالعہ کرو  
 ان میں باقاعدہ تکملوں، فوش کا مسئلہ، معمولی اور نادر نقطوں، فوشی نمونہ کی  
 مساواتوں، اختصاصی نائندہ، طبعی، اور زیر طبعی تکملوں سے  
 بحث کی گئی ہے۔]



Characteristic Index

Regular Integrals ۱۱

Subnormal ۱۲

Normal ۱۳

(۱۳۳)

## گیارہواں باب

تین متغیروں والی معمولی تفرقی مساواتوں میں متناظر منحنی اور جس

۱۱۱۔ اب ہم چند سادہ تفرقی مساواتوں پر غور کریں گے جن سے فضا میں مرتبہ منحنیوں کے اور ان سطحوں کے خواص معلوم ہوں گے جن پر منحنی واقع ہیں یا جن کو منحنی علی القوام قطع کرتے ہیں (جیسا کہ برقی سکونیات میں ہم قوتہ سطحیں قوت کے خطوں کو علی القوام قطع کرتی ہیں)۔ اس باب کی معمولی تفرقی مساواتوں اور آئندہ باب کی جزئی تفرقی مساواتوں میں قریب کا رشتہ ہے۔  
آگے بڑھنے سے پیشتر طالب علم کو ہندسہ محسبات دہرانیہ بالخصوص ہمیں اس واقعہ کی ضرورت پڑے گی کہ ایک منحنی کے مماس کی سمتی جیوب التمام

$$\left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} , \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} , \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right)$$

ہوتی ہیں یعنی وہ نسبت فرلا : فرما : فری میں ہوتی ہیں۔  
مستقل سروں والی ہر داخلی مساواتوں کو تیسرے باب میں سمجھایا جا چکا ہے۔

۱۲۔ یعنی ان میں جزئی تفرقی سرشریک نہیں ہوتے۔

$$۱۱۲ - \text{ہمزاد مساواتیں} \quad \frac{\text{فر لا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

ان مساواتوں سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ایک خاص منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کے تماس کی سمتی جہوب التمام (ف، ق، ر) کے متنا سب ہیں۔ اگر ف، ق، ر مستقل ہوں تو اس طرح ایک خط مستقیم حاصل ہوگا یا زیادہ صحیح یہ ہے کہ خطوط مستقیم کا ایک دوہرا لامتناہی نظام حاصل ہوگا کیونکہ ایسا ایک خط فضاء کے کسی نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ لیکن اگر ف، ق، اور ر، لا، ما، اور ی کے تفاعل ہوں تو منحنیوں کا ایک متشابہ نظام حاصل ہوگا جن میں سے کسی ایک کے متعلق یہ سمجھا جاسکتا ہے کہ وہ ایک متحرک نقطہ سے جو مسلسل اپنی سمت حرکت بدلتا ہے تکوین پاتا ہے۔ برقی سکونیات میں قوت کے خط ایسا نظام بناتے ہیں۔ (۱۳۳)

$$(۱) \quad \text{مثال (۱)} \quad \frac{\text{فر لا}}{۱} = \frac{\text{فر ما}}{۱} = \frac{\text{فری}}{۱}$$

$$(۲) \quad \text{مرکبہ کنگلے} \quad ۱ - ی = لا$$

$$(۳) \quad ۱ - ی = ما$$

یہیں یہ دو تویوں کی مساواتیں ہیں جو خط

$$(۴) \quad \frac{۱ - لا}{۱} = \frac{۱ - ما}{۱} = \frac{۱ - ی}{۱}$$

۱۵ قوت کے خطوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{جف ی}}$$

یہیں جن میں فہ قوتہ تفاعل ہے۔

میں متقاطع ہوتے ہیں۔ اس خط کو اختیاری مستقلوں اور ب کے درست انتخاب سے کسی دے ہوئے نقطہ میں سے گزارا جاسکتا ہے مثلاً (ف، گ) میں سے اگر  $د = ف - ہ$  اور  $ب = گ - ہ$

نظام بنایا۔ واحد خط جو دے ہوئے نقطہ میں سے گزرے منتخب کرنیکی بجائے ہم ایسے خط تعداد میں لاتنا ہی لے سکتے ہیں جو ایک دے ہوئے منحنی کو قطع کریں مثلاً دائرہ لا + ما = م، ی = کو۔ اس دائرہ کی مساواتوں کو (۲) اور (۳) کے ساتھ لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} لا &= د \\ ما &= ب \end{aligned}$$

اور اس لیے  $د + ب = م$  (۵) یہ وہ رشتہ ہے جو اور ب کے درمیان درست ہوتا ہے جبکہ خط دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ اور ب کو (۲) (۳) اور (۵) سے سا ق کیا جائے تو

$$(ن - د) + (م - ی) = م$$

یہ ایک ناقصی اسطوانہ ہے جو نظام کے ان خطوں سے بنتا ہے جو دائرہ ملتے ہیں۔

اسی طرح نظام کے خط جو منحنی

$$فد (لا، ما) = ی =$$

سے ملتے ہیں سطح

$$فد (لا - ی، ما - ی) =$$

کی تکوین کرتے ہیں۔

$$(۶) \quad \frac{فری}{لا} = \frac{فرما}{ب} = \frac{فرلا}{ی} \quad \text{مثال (۲) صریحاً تکمیل}$$

$$(۷) \quad لا^۲ + ی^۲ = ۱$$

(۸) ہیں، ایک قائم مستدیر اسطوانہ اور ایک مستوی جو اُس کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے۔

اس لیے تفرقی مساواتیں دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہیں جن کے مرکز محور ماپرواقع ہیں اور جن کے مستوی اس محور پر عمود ہیں۔ ایسا ایک دائرہ فضاء کے کسی نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ وہ جو (ف، گ) میں سے گذرتا ہے

$$لا^۲ + ی^۲ = ف^۲ + گ^۲ = ۱$$

ہے۔ ایک سطح نظام کے ان دائروں سے بنتی ہے جو ایک دے ہوئے منحنی کو قطع کرتے ہیں۔ اگر دیا ہوا منحنی زائد

(۱۳۵)

$$۰ = ی^۲ = \frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۲}{۲}$$

ہو تو (۷) اور (۸) سے، اس زائد کو قطع کرنے والے دائرہ کے لیے

$$لا^۲ = ۱ - ی^۲$$

$$(۹) \quad ۱ = \frac{ب^۲}{۲} - \frac{۱}{۲}$$

۱ اور ب کو (۷)، (۸) اور (۹) سے ساقط کیا جائے تو زائد نما ایک چادری

$$۱ = \frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۲ + ی^۲}{۲}$$

حاصل ہوتا ہے جو نظام کے ان دائروں سے بنا ہے جو زائد کو قطع کرتے ہیں۔ اسی طرح منحنی فہ (لا، ما) = ۰ = ی سے ابتدا کی جائے تو

گردشی سطح فہ (لا + ی<sup>۲</sup>، م) = ماسل ہوگی۔

۱۱۳۔ ایسی مساواتوں کا حل ضاربوں سے۔ اگر

$$\frac{\text{فری}}{\text{فر}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ف}}$$

تو ان میں سے ہر کسر

$$\frac{\text{ل فرلا + م فرما + ن فری}}{\text{ل ف + م ق + ن ص}}$$

کے مساوی ہے۔

یہ طریقہ بعض مثالوں میں اُس وقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ نسب نما کو صفر اور شمار کنندہ کو ایک ٹھیک تفرقہ بنانا ہو یا نسب نما کو غیر صفر اور شمار کنندہ کو اس کا تفرقہ بنانا ہو۔

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{ی (لا + م)}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی (لا - م)}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا + م}^۲}$$

$$\frac{\text{لا فرلا - م فرما - ی فری}}{\text{لا ی (لا + م) - م ی (لا - م) - ی (لا + م}^۲)} = \text{ہر کسر}$$

اس لیے

$$\text{لا} - \text{م} - \text{ی} = ۱$$

اسی طرح

$$۲ \text{ لا} - \text{م} - \text{ی} = ۲$$

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{م + ۱}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا + ۱}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرلا + فرما}}{\text{لا + م + ۲}} = \frac{\text{فرلا - فرما}}{\text{لا - م}}$$

یہاں

اس لیے لوک ی = لوک (۲ + لا + ما) + لوک ۱ = - لوک (لا - ما) + لوک ب  
یعنی  $y = 1 + (2 + la + ma) = \frac{b}{la - ma}$

## حل طلب مثالیں -

(۱۳۶)

حسب ذیل ہمزاد تفرقی مساواتوں کو پورا کرنے والے اُن منحیوں کے نظام حاصل کرو جن کی تعریف دو مساواتوں سے ہوتی ہو جن میں سے ہر ایک میں ایک اختیاری مستقل شریک ہو۔ جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$$(۱) \quad \frac{فری}{ی} = \frac{فرما}{ما} = \frac{فرلا}{لا}$$

$$(۲) \quad \frac{فری}{م-ی-ن-ما} = \frac{فرما}{ن-لا-ل-ی} = \frac{فرلا}{ل-ما-م-لا}$$

$$(۳) \quad \frac{فری}{ما+۲ی-۲لا} = \frac{فرما}{لا+۲ما} = \frac{فرلا}{۲-لا-۲}$$

$$(۴) \quad \frac{فری}{ما+۲ی-۲لا} = \frac{فرما}{ی+۲لا} = \frac{فرلا}{ما+۲ی}$$

$$(۵) \quad \frac{فری}{ما+۲ی} = \frac{فرما}{ی+۲لا} = \frac{فرلا}{لا+۲ما}$$

$$(۶) \quad \frac{فری}{ی-۲ما-۲ی+۲لا} = \frac{فرما}{ما+۲ی} = \frac{فرلا}{لا+۲ما}$$

(۷) مثال ۲ کے اُس دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے۔

(۸) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۴ کے منحیوں سے جو دائرہ ما+۲ی<sup>۲</sup> = ۱ لا= کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۹) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۱ کے خطوں سے جو مرغولہ لا+۲ما<sup>۲</sup>

= ۲، ی = ک مس - ۱ ما کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰) وہ منحنی معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرے اور اس کے کسی نقطہ پر کے ماس کی سمتی جیوب التمام اس نقطہ کے محدودوں کے مربعوں کی نسبت میں ہوں۔

۱۱۴۔ ایک دوسرا تکملہ جو پہلے تکملہ کی مدد سے معلوم کیا گیا ہو۔ مساواتوں

$$(۱) \quad \frac{\text{فری}}{\text{لا ۳ لاجب (۱۲+ما)}} = \frac{\text{فرما}}{۲} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

پر غور کرو۔

صریحاً ایک تکملہ

(۲)  $۱ = ۱۲ + ما$  ہے۔ اس کو استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{فری}}{\text{لا ۳ لاجب ۱}} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

اس لیے ی۔ لا ۳ لاجب ۱ = ب

و کی بجائے درج کرنے سے

(۳) ی۔ لا ۳ لاجب (۱۲+ما) = ب  
کیا (۳) حقیقت میں (۱) کا تکملہ ہے؟  
(۳) کو تفرق کرنے سے

$$\{ \text{فری} - \text{لا ۳ لاجب (۱۲+ما)} \} - \text{لا ۳ لاجب (۱۲+ما)} =$$

$$= \{ \text{فرما} + ۲ \text{ فرلا} \} \times$$

جو (۱) کی رو سے صحیح ہے۔ اس لیے (۳) ایک تکملہ ہے۔



اس لیے لوک ی = لوک (۲ + لا + ما) + لوک ۱ = - لوک (لا - ما) + لوک ب  
یعنی  $\frac{ب}{لا - ما} = ۱ = \frac{۱}{(۲ + لا + ما)}$

## حل طلب مثالیں۔

(۱۳۶)

حب ذیل ہمزاد تفرقی مساواتوں کو پورا کرنے والے اُن منحینوں کے نظام حاصل کرو جن کی تعریف دو مساواتوں سے ہوتی ہو جن میں سے ہر ایک میں ایک اختیاری مستقل شریک ہو۔ جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو۔

$$(۱) \quad \frac{فری}{ی} = \frac{فرما}{ما} = \frac{فرلا}{لا}$$

$$(۲) \quad \frac{فری}{م - ی - ن - ما} = \frac{فرما}{ن - لا - لی} = \frac{فرلا}{ل - ما - ن}$$

$$(۳) \quad \frac{فری}{۲ - لا - ی} = \frac{فرما}{۲ - لا - ما} = \frac{فرلا}{۲ - لا - ی}$$

$$(۴) \quad \frac{فری}{ما} = \frac{فرما}{ی - لا} = \frac{فرلا}{لا - ما}$$

$$(۵) \quad \frac{فری}{ما + ی} = \frac{فرما}{ی + لا} = \frac{فرلا}{لا + ما}$$

$$(۶) \quad \frac{فری}{ی - ما} = \frac{فرما}{ما + ی} = \frac{فرلا}{۲ - ما - ی}$$

(۷) مثال ۲ کے اُس دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو جو نقطہ (۱، -۱) (ن'م) میں سے گذرتا ہے۔

(۸) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۴ کے منحینوں سے جو دائرہ ما<sup>۲</sup> + ی<sup>۲</sup> = ۱ = لا<sup>۲</sup> کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۹) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۱ کے خطوط سے جو منفرغہ لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup>

$z = y = k$  مساوی کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰) وہ منحنی معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲، ۱) میں سے گزرے اور اس کے کسی نقطہ پر کے مماس کی سمتی جو ب تمام اس نقطہ کے محدودوں کے مربعوں کی نسبت میں ہوں۔

۱۱۴۔ ایک دوسرا تکملہ جو پہلے تکملہ کی مدد سے معلوم

کیا گیا ہو۔ مساواتوں

$$(۱) \quad \frac{\text{فری}}{\text{لا ۳ لاجب } (۷۲+۶)} = \frac{\text{فرما}}{۲} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

پر غور کرو۔

مربعا ایک تکملہ

(۲)

$$۷ = ۷۲ + ۶$$

ہے۔ اس کو استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{فری}}{\text{لا ۳ لاجب } ۷} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

ی۔ لا ۳ لاجب ۷ = ب

اس لیے

و کی بجائے درج کرنے سے

(۳)

$$۷ = \text{لا ۳ لاجب } (۷۲+۶) = ب$$

کیا (۳) حقیقت میں (۱) کا تکملہ ہے؟

(۳) کو تفریق کرنے سے

$$\{ \text{فری} - \text{لا ۳ لاجب } (۷۲+۶) \} - \text{لا ۳ لاجب } (۷۲+۶) =$$

$$= \{ \text{فرما} + ۲ \text{ فرلا} \} \times$$

جو (۱) کی رو سے صحیح ہے۔ اس لیے (۳) ایک تکملہ ہے۔

## حل طلب مثالیں۔

$$(۱) \frac{\text{فری}}{\text{فری} + \text{مس} - \text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{۳} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

$$(۲) \frac{\text{فری}}{\text{فری} + \text{ی} + \text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ی}}$$

$$(۳) \frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما} - \text{ما} - \text{لا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{ی} - \text{لا}}$$

$$(۴) \frac{\text{فری}}{\text{فری} + \text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

۱۱۵۔ ہمزاد مساواتوں کے عام اور خاص تکملے۔ (۱۳۷)

اگر ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

کے دو غیر تابع تکملے  $\text{ع} = \text{ا}$  اور  $\text{و} = \text{ب}$  ہوں تو  $\text{فہ} = \text{و} = \text{ع}$  سے ایک سطح تغیر ہوگی جو نظام کے نغینوں میں سے گذرے گی اور اس لیے اس ایک دوسرا حل حاصل ہونا چاہئے خواہ تفاعل فہ کی شکل کچھ ہی ہو۔ اس کا تجزیلی ثبوت آئندہ باب میں دیا جائے گا کیونکہ اس کی اہمیت خاص کر جزئی تفرقی مساواتوں سے متعلق ہے۔

$\text{فہ} = \text{و} = \text{ع}$  کو عام تکملہ کہتے ہیں۔ بعض ہمزاد مساواتوں کے ایسے تکملے ہوتے ہیں جن کو خاص تکملے کہا جاتا ہے یہ تکملے عام تکملہ میں شریک نہیں ہوتے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) دفعہ ۱۱۳ کی مثال میں  $ع = لا - ما - ی$  اور  $و = ۲ لا - ما - ی$  اس لیے عام تکملہ

$$ف = (لا - ما - ی) + (۲ لا - ما - ی) =$$

ہے۔ طالب علم اس کی تصدیق سادہ صورتوں میں جہاں

$$ف = (ع، و) = ع - و \text{ یا } ف = (ع، و) = \frac{۱+و}{۲-ع}$$

کر سکتا ہے۔

(۲) تصدیق کرو کہ مساوات

$$\frac{فری}{۲} = \frac{فرما}{۱} = \frac{فرلا}{۱+ما-لا-ما}$$

کے لیے عام تکملہ

$$ف = (۲-ما-ی) + (ما+پاس-لا-ما) =$$

لیا جاسکتا ہے جہاں  $ی = لا + ما$  ایک خاص تکملہ ہے۔

## ۱۱۶۔ مساوات

$$ف + فرلا + ق + فرما + س + فری =$$

کی ہندسی تعبیر۔

اس تفرقی مساوات سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ایک منحنی کا مماس ایک خاص خط پر عمود ہے اور اس مماس کی سمتی جیوب التمام (فرلا، فرما، فری) کے متناسب اور خط کی سمتی جیوب التمام (ف، ق، س) کے متناسب ہیں۔

لیکن ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ ہمزاد مساواتوں

$$\frac{فرلا}{ف} = \frac{فرما}{ق} = \frac{فری}{س}$$

سے یہ بیان ہوا تھا کہ ایک منحنی کا ماس خط (ف، ق، س) کے متوازی تھا۔ اس طرح ہمیں منحنیوں کے دو جٹ حاصل ہوتے ہیں۔ اگر دو منحنی جن میں سے ایک ایک جٹ سے اور دوسرا دوسرے جٹ سے لیا گیا ہو متقاطع ہوں تو ان کو علی القوائم قطع کرنا چاہئے۔ اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ مساوات

$$f + q + s = 0$$

تکمل پذیر ہو۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ سطحوں کا ایک قبیل حاصل ہو سکتا ہے جس پر کے تمام منحنی ان نقطوں پر ہمزاد مساواتوں سے تعبیر شدہ منحنیوں کے عمود وار ہیں جہاں یہ منحنی سطح کو قطع کرتے ہیں۔ (۱۳۸) حقیقت میں یہ وہ صورت ہے جبکہ سطحوں کی لامتناہی تعداد ممکنہ بنی جا سکے جو کہ منحنیوں کے ایک دوسرے لامتناہی جٹ کو علی القوائم قطع کرے جیسا کہ برقی سکونیات میں ہم قوہ سطحیں خطوط قوت کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے برخلاف یہ ہو سکتا ہے کہ ہمزاد مساواتوں سے تعبیر شدہ منحنیوں سے علی القوائم سطحوں کا کوئی ایسا قبیل حاصل نہ ہو۔ اس صورت میں واحد مساوات تکمل پذیر نہیں ہوتی۔

مثال (۱) مساوات  $f + q + s = 0$

$$f + q + s = 0$$

ہے، یہ متوازی مستویوں کا ایک قبیل ہے۔

دفعہ ۱۱۲ کی مثال (۱) میں ہم نے یہ دیکھا کہ ہمزاد مساواتیں

$$\frac{f}{1} = \frac{q}{1} = \frac{s}{1}$$

$$\frac{f}{1} = \frac{q}{1} = \frac{s}{1}$$

توازی سطحوں کے قبیل

تعبیر کرتی ہیں۔

اوپر کے مستوی ان خطوں کے علی القوائم مرماۃ ہیں

مثال (۲) ی فرلا - لافری = ۰

یعنی 
$$۰ = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} - \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$$

ی = ج لا

اس لیے یہ مستویوں کا ایک قبیل ہے جو محور مایں سے گذرتے ہیں۔  
دفعہ ۱۱۲ مثال (۲) میں ہم نے یہ دیکھا کہ متناظر ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا}}$$

دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہیں جن کے محور سب کے سب محور ماہر واقع ہیں، اس لیے مستوی ان دائروں کے علی القوائم مرماۃ ہیں۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کو تکمیل کرو اور جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو، نیز اس امر کی تصدیق کرو کہ سطحیں ان خمینوں کے علی القوائم مرماۃ ہیں جو متناظر ہمزاد مساواں سے تعبیر ہوتے ہیں:

- (۱) لا فرلا + ما فرما + ی فری = ۰
- (۲) (ما + ی) - لا (فرلا - لا فرما - لا ی فری) = ۰ [لا سے تقسیم کرو]
- (۳) ما ی فرلا + ی لا فرما + لا ما فری = ۰
- (۴) (ما + ی) (فرلا + (ی + لا) فرما + (لا + ما) فری) = ۰
- (۵) ی (ما فرلا - لا فرما) = ما فری
- (۶) لا فرلا + ی فرما + (ما + ی) فری = ۰

۱۱۷ - تکمیل کا طریقہ جبکہ حل واضح نہ ہو۔ جب شکل

ف فرلا + ق فرما + س فری = ۰

(۱۳۹) کی مکمل پذیر مساوات کو معائنہ سے حل نہ کیا جاسکے تو ہم حل کی تلاش اس سادہ صورت پر غور کر کے کرتے ہیں جس میں  $y$  کو مستقل سمجھا جاتا ہے اور اس لیے  $فری = ۰$ ۔

مثلاً اگر  $y$  مستقل ہو تو مساوات  $۲ مای فرلا + ۳ ی لا فرما$   
 $۳ - لا مای فری = ۰$ ۔

$$۲ مای فرلا + ۳ لا فرما = ۰$$

ہو جاتی ہے اور  $لا مای = ۱$

حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ اس کو یہ فرض کر کے حاصل کیا گیا ہے کہ  $y$  مستقل ہے اس لیے یہ اغلب ہے کہ ابتدائی مساوات کا حل مستقل  $y$  کی بجائے  $y$  کا کوئی تفاعل رکھنے سے حاصل ہو سکے چنانچہ

$$لا مای = ۲ ف (ی)$$

اور اس لیے  $۲ مای فرلا + ۳ لا مای فرما - فری = ۰$ ۔

یہ مساوات ابتدائی مساوات کے مماثل ہوگی اگر

$$\frac{فری}{۳ - لا مای} = \frac{۲ لا مای}{۳ ی لا} = \frac{۲ مای}{۳ ی}$$

$$یعنی \frac{فری}{۳ ی} = \frac{۲ لا مای}{۳ ی} = \frac{۲ مای}{۳ ی}$$

$$\frac{فری}{۳ ی} = \frac{فری}{۳ ف}$$

$$۳ ف (ی) = ۳ ی$$

اور آخری حل  $لا مای = ۳ ی$  حاصل ہوتا ہے۔

یہ طریقہ تمام تکمل پذیر مساواتوں کے لیے درست ہے، اس کا ثبوت دفعہ ۱۱۹ میں دیکھو۔

## حل طلب مثالیں

- (۱)  $۲ مای لک ی فرلا - ی لالو ک - ۲ فرما + لا مافری = ۰$
  - (۲)  $۲ مای فرلا + ی لافرا - لا مافری = ۰$
  - (۳)  $(۲ لافرا + لا مافری + ۱ لای) فرلا + فرما + ۲ مای فرری = ۰$   
[پہلے لالو مستقل فرض کرو]
  - (۴)  $(۲ مای) فرلا + (ی لای) فرما + (۲ لالو) فرری = ۰$
  - (۵)  $(لا مافری - مای) فرلا + (لا مافری - لای) فرما + (لا مافری - لا مافری) فرری = ۰$
  - (۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا تکملہ مستویوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جن کا خط تقاطع مشترک ہے اور یہ کہ یہ مستوی دفعہ ۱۱۳ کی مثال ۲ کے دائروں کے علی القواکم مرآتہ ہیں :-  
 $(م ی - ن م) فرلا + (ن ل - ل ی) فرما + (م ل - ل م) فرری = ۰$
- ۱۱۸۔ وہ ضروری شرط کہ کوئی مساوات تکمل پذیر ہو۔

اگر

- (۱)  $ف فرلا + ق فرما + س فرری = ۰$  ..... (۱)
- کا ایک تکملہ  $ف (لا، م، ی) = ج$  ہو جس کو تفرق کرنے پر  
 $\frac{ج ف فرلا}{ج ف لا} + \frac{ج ف فرما}{ج ف م} + \frac{ج ف فرری}{ج ف ی} = ۰$   
 حاصل ہوتا ہے تو  
 $\frac{ج ف فرلا}{ج ف لا} = ل ف، \frac{ج ف فرما}{ج ف م} = م ف، \frac{ج ف فرری}{ج ف ی} = ی ف$



پس  $\frac{\text{جف}}{\text{جف م}} = \frac{\text{جف ا}}{\text{جف م ا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م ف}} = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف م ق}}$  (۱) یعنی  
 لہ (جف م - جف ق) + ق (جف م - جف ا) - م (جف م - جف ف) = ۰ (۲)  
 اسی طرح لہ (جف م - جف ف) + م (جف م - جف ق) - ق (جف م - جف ا) = ۰ (۳)  
 اور لہ (جف م - جف ق) + ق (جف م - جف ا) - م (جف م - جف ف) = ۰ (۴)  
 مساواتوں (۲) (۳) اور (۴) کو علی الترتیب 'ف' 'ق' اور 'م' سے ضرب دو اور جمع کرو تو

$$\begin{aligned} & \text{ف} \left( \frac{\text{جف م}}{\text{جف م}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف م}} \right) + \text{ق} \left( \frac{\text{جف م}}{\text{جف م}} - \frac{\text{جف ا}}{\text{جف م}} \right) - \text{م} \left( \frac{\text{جف م}}{\text{جف م}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} \right) \\ & = ۰ \end{aligned}$$

اگر مساوات (۱) تکمیل پذیر ہے تو یہ شرط پوری ہونی چاہئے۔  
 سمتی تحلیل سے جو طالب علم واقف ہیں وہ دیکھیں گے کہ اگر  
 ایک سمتی کے اجزائے ترکیبی 'ف' 'ق' 'م' ہوں تو اوپر کی شرط کو  
 اُٹھ ۱ = ۰ لکھا جاسکتا ہے۔

مثال - گذشتہ دفعہ کی حل شدہ مثال میں

$$\text{م ا ی فر لا} + \text{ی لا فر م} - \text{ا لا فر ی} = ۰$$

$$\text{ف} = \text{م ا ی} \quad \text{ق} = \text{ی لا} \quad \text{م} = \text{ا لا} \quad \text{ا لا م} = ۰$$

شرط سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م ا ی} (لا + لا) + \text{ی لا} (ا - ا) - \text{ا لا} (م - م) = ۰$$

$$\text{یعنی} \quad ۵ \text{ لا م ا ی} - ۸ \text{ لا م ا ی} + ۳ \text{ لا م ا ی} = ۰ \quad \text{جو درست ہے۔}$$

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثالوں کے پچھلے دو جٹوں کی مساواتیں اس شرط کو پورا کرتی ہیں۔

$$(۲) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{\text{فر لا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{لا + ما}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{ی}}$$

سے حاصل شدہ مخفیوں کے علی القوائم، سطحوں کا کوئی جٹ نہیں ہے۔

۱۱۹۔ تکمل پذیری کی شرط کافی بھی ہے اور ضروری

بھی۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ اوپر کی تکمل پذیری کی شرط کافی ہے یعنی یہ کہ جب وہ پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۱۱۷ کے طریقہ سے ہمیشہ ایک حل حاصل ہو سکتا ہے۔

تمہیدی مفروضہ کے طور پر اس واقعہ کی ضرورت پڑے گی کہ اگر  
ف، ق، س اس شرط کو پورا کریں تو ف، لہ، ف، ق، لہ، ق، س  
س، لہ، س بھی اس شرط کو پورا کریں گے جہاں لہ، لا، ما، اور ی کا کوئی  
تفاعل ہے۔ ہم اس کا ثبوت طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔

(۱۴۱)

دفعہ ۱۱۷ میں ہم نے یہ فرض کیا کہ

$$\text{ف فر لا} + \text{ق فر ما} = ۰$$

کا ایک حل ی کو مستقل سمجھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ یہ حل فا (لا، ما، ی) = ۱ ہے تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = ۰$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{ق}} = \text{لہ، فرض کرو}$$



$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا جف ما}} \left\{ \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} \right\} - \left\{ \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} \right\} \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا جف ما}} = \dots \dots \dots (۴)$$

اب تہمیدی مفروضہ کی رُو سے 'ف' 'ق' 'س' کے درمیان  
رشتہ سے مشابہ رشتہ

$$\left\{ \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right\} + \left\{ \frac{\text{جف س}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف س}}{\text{جف لا}} \right\} \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} = \dots \dots \dots$$

حاصل ہوتا ہے، نیز چونکہ (۲) تکمیل پذیر ہے اس لیے (۱۳۲)

$$\left\{ \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right\} + \left\{ \frac{\text{جف س}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف س}}{\text{جف لا}} \right\} \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} = \dots \dots \dots$$

ان دو آخری مساواتوں کو تفریق کرنے سے

$$\left\{ \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right\} - \left\{ \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right\} \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} = \dots \dots \dots (۵)$$

$$\text{لیکن } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \text{ق} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} \text{ اور } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}$$

$$= \frac{\text{جف}}{\text{جف م}} \left( \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \right) = ۰$$

کیونکہ ف صرف ی کا تفاعل ہے۔  
پس مساوات (۵) مساوات (۴) میں تحویل ہوتی ہے۔

یعنی  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}$ ۔ م کو فا اور ی کے تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے، فرض کرو کہ یہ تفاعل سا (فا، ی) ہے۔ پس (۱) اور (۳) سے

$$\frac{\text{فر ف}}{\text{فر ی}} = \text{سا (ف، ی)}$$

اگر اس کا حل ف = ضا (ی) ہے تو فا (لا، ما، ی) = ضلا (ی) مساوات

ف فر لا + ق فر ما + م فر ی = ۰  
کا ایک حل ہے جس کا تکمیل پذیر ہونا اوپر ثابت کیا جا چکا ہے جبکہ  
ف، ق، م دفعہ ۱۱۸ کی شرط کو پورا کریں۔

۱۲۰۔ ناقابل پذیر واحد مساوات۔ جب تکمیل پذیری کی شرط پوری نہ ہو تو مساوات

ف فر لا + ق فر ما + م فر ی = ۰  
سے منحینوں کا ایسا قبیل تعبیر ہو گا جو اس قبیل کے علی القوائم ہو گا جو ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} = \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$$

سے تعبیر ہوتا ہے لیکن اس صورت میں سطحوں کا کوئی قبیل ایسا نہیں ہے جو منحینوں کے دوسرے قبیل کے علی القوائم ہو۔

لیکن ہم ایسے منحنیوں کی لامتناہی تعداد معلوم کر سکتے ہیں جو ایک دی ہوئی سطح پر واقع ہوں اور مساوات (۱) کو پورا کریں خواہ یہ مساوات مکمل پذیر ہو یا نہ ہو۔

مثال —  $۲\text{فرلا} + (۱ - ی) \text{فرما} + \text{لا فری} = ۰$  (۱)  
کے حل سے تعبیر شدہ ایسے منحنی معلوم کرو جو مستوی

(۲)  $۲ - لا - ۱ - ی = ۱$

میں واقع ہوں۔

(یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ مکمل پذیر کی شرط پوری نہیں ہوتی)  
عمل کا طریقہ یہ ہے کہ متغیروں میں سے ایک اور اس کے تفرقہ کو مثلاً (فرما) کو  
ی اور فری کو ان دو مساواتوں اور ان میں سے دوسری مساوات کے تفرقہ سے ساٹھا کیا جائے۔  
(۲) کو تفرقہ کرنے سے

$۲\text{فرلا} - \text{فرما} - \text{فری} = ۰$

لا سے ضرب دینے اور (۱) میں جمع کرنے سے

$(۲ + لا) \text{فرلا} + (۱ - ی - لا) \text{فرما} = ۰$

یا (۲) کو استعمال کرنے سے

$(۲ + لا) \text{فرلا} + (۱ - لا - ۲ - ی) \text{فرما} = ۰$

اور اس سے  $لا + لا - لا - ۲ - ۱ - ی = ۰$  (۳)

اس لیے قبیل کے منحنی جو مستوی (۲) میں واقع ہیں وہ تراشیں ہیں جن کو یہ مستوی قائم زائدی اسطوانوں (۳) میں قطع کرتا ہے۔

اس مثال کے نتیجہ کو یہ کہہ کر بیان کیا جاسکتا تھا کہ لا کے مستوی ان منحنیوں کے ذیل جو مستوی (۲) میں واقع ہیں اور مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں ہم مرکز، مشابہ اور مشابہا واقع قائم زائدوں کا ایک قبیل ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ فری  $= ۲\text{فرلا} + لا\text{فرما}$  کا کوئی واحد تکملہ نہیں ہے۔

ثابت کیونکہ اس مساوات کے منحنی جو مستوی ی = لا + ما میں واقع ہیں سطحوں کے قبیل

$$ج = (۱ - لا) (۱ - ما) = ج$$

پر بھی واقع ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ

$$لا فرلا + ما فرما + ج = (۱ - \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب}) \text{ فری} =$$

کے منحنی جو ناقص نما

$$۱ = \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} + \frac{ج}{ج}$$

پر واقع ہیں ہم مرکز کڑوں کے قبیل

$$لا + ما + ج = ک$$

پر بھی واقع ہیں۔

(۳) نامی سیمہ مستوی پر ان منحنیوں کا قائم ظل معلوم کرو جو مکانی نما  
سے ی = لا + ما پر واقع ہیں اور مساوات

$$\text{فری} = (لا + ی) \text{ فرلا} + ما فرما$$

کو پورا کرتے ہیں۔

(۴) محور ما کے متوازی مکونوں والے اس اسطوانہ کی مساوات  
معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱، ۲) میں سے گزرے اور نیز کیا ایسے منحنی میں سے گزرے  
جو کڑہ لا + ما + ی = ۳ پر واقع ہے اور مساوات

$$(لا + ما + ی) \text{ فرلا} + ما فرما + (لا + ما) \text{ فری} =$$

کو پورا کرتا ہے۔

نوٹ - میل پذیر "تفریقی مساوات

$$ف (لا، ما، ی) \text{ فرلا} + ق (لا، ما، ی) \text{ فرما} + ص (لا، ما، ی) \text{ فری} =$$

پر دفعہ ۶۹ کی طرح بحث کی جاسکتی ہے اگر دائیں جانب، منہ اٹلا  
 و (لا، ما، ی) x فرع (لا، ما، ی) = کے مساوی ہو۔ تب کامل  
 ابتدائی ع = ج کے علاوہ حل و ج بھی ہوگا جو یا تو نادر حل (لفاف  
 کے مفہوم میں) ہوگا یا ایک انتہائی شکل۔ اگر ہم 'ف' 'ق' 'س' پر  
 ایسی شرطیں عائد کریں جو دفعہ ۶۹ کے متغیر لین 'ف' اور 'ق' پر عائد کردہ شرطوں  
 کے مشابہ ہوں اور ف + س + ف + اور ق + س + ف + میں ی کی بجائے  
 ط + ف (لا، ما، ی) رکھنے سے علی الترتیب نتیجے ع (لا، ما، ی) ط + اور  
 گ (لا، ما، ی) حاصل ہوں تو وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ ط = ی - ف (لا، ما، ی)  
 ایک نادر حل ہو یہ ہیں کہ ع (لا، ما، ی) = گ (لا، ما، ی) اور یہ کہ  
 تکملوں گ (لا، ما، ی) فرط اور گ (لا، ما، ی) فرط میں سے کم از کم ایک

اپنی زیرین حد پر زیر بحث علاقہ میں لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے متدق  
 ہو۔ اگر ع (لا، ما، ی) = گ (لا، ما، ی) لیکن استدقاق کی  
 شرط پوری نہ ہو تو ط = ایک خاص تکملہ ہوگا۔ حسب سابق ہم صرف  
 حقیقی متغیروں پر بحث کر رہے ہیں۔

اس کا ثبوت کسی آئندہ مقالہ میں دیا جائے گا لیکن ہم چند  
 مثالوں سے اس مسئلہ کی توضیح کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{فرلا} + \{ + (ی - لا - ما) \} \text{فرما} - \text{فری}$$

$$= (ی - لا - ما) \times \text{فر} \{ ما - ۲ (ی - لا - ما) \} =$$

$$\text{کا کامل ابتدائی } ما - ۲ (ی - لا - ما) = ج$$

ہے اور نادر حل ی - لا - ما = ہے جو اس قبیل کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جو کامل ابتدائی  
 ہے جو سطحوں کے اس قبیل کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جو کامل ابتدائی  
 تعبیر ہوتے ہیں۔



یہاں  $E (لا، ما، ط) = .$  اور  $گ (لا، ما، ط) = ط$ ، اس لیے دوسرا  
تکملہ مستحق ہے۔ اس کے برخلاف

$$Y (فر لا + ۲ ما فرما) + فری = Y (فر لا + ما - ۲ سی) = .$$

کے لیے  $لا + ما - ۲ سی = ج$  کی ایک انتہائی شکل  $ی = .$  ہے یہاں  
 $E (لا، ما، ط) = ط$  اور  $گ (لا، ما، ط) = ۲ ما ط$ ، اس لیے دونوں  
تکملے متسع ہیں۔ اسی کے مشابہ نتیجے ایسی مکمل پذیر شکل "تفرقی مساواتوں  
کے لیے بھی درست ہیں جن میں متغیروں کی کوئی تعداد مشترک ہو۔

اب ہم شکل

$$F (فر لا + ق فرما + سا فری) = .$$

کی ان مساواتوں کی طرف رجوع ہوتے ہیں جو "تکمل پذیر" ہیں  
یعنی ایسی ہیں کہ وہ کوئی کامل ابتدائی جس میں اختیاری مستقل شریک  
ہو انہیں رکھتیں۔ اس صورت میں

$$F (جف ق - جف ما - یق) + (جف لا - جف سا - جف ی) = .$$

$$+ (جف ف - جف لا - جف ق) = .$$

متماثل صفر نہیں ہوتا۔ اس کو  $و (لا، ما، ی)$  سے تعبیر کرو۔ اگر وہ  
سے تفرقی مساوات پوری ہو تو  $و = .$  ایک نادر مل ہو گا۔ ہم دو  
مثالوں پر غور کریں گے۔

$$Y (فر لا + ی فرما + فری) = .$$

کے لیے  $و = ی$ ۔ اب چونکہ  $ی = .$  سے تفرقی مساوات پوری ہوتی  
ہے اس لیے وہ ایک نادر مل ہے۔ لیکن

ما فر لا + ی فر ما + لا فر ی = .

و = ما + ی + لا

کے لیے

یہاں لا + ما + ی = . سے تفرقی مساوات پوری نہیں ہوتی  
اس لیے وہ نادر حل نہیں ہے۔ کسی نامکمل پذیر کُل تفرقی مسا  
یہ بالعموم بیان کیا جاتا ہے کہ کسی نامکمل پذیر کُل تفرقی مسا  
کے نادر حل کے لیے و کا صفر ہونا ضروری ہے۔ یہ بیان صرف  
اس وقت درست ہوتا ہے جبکہ 'ف' 'ق' 'س' چند خاص شرطوں  
کو پورا کریں۔ اگر 'ف' 'ق' 'س' کو لا متناہی جنہی اشتقات اختیار  
کرنے دیا جائے تو ایک ایسا نادر حل موجود ہو سکتا ہے جس سے  
و صفر نہیں ہوتا۔

مثلاً  $\frac{1}{2} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ ی} + \frac{1}{2} \text{ فر ما} = 2 \text{ فر ی} = .$

کلا ایک نادر حل ی = . سے سین ی = . ت = و = .  $\frac{1}{2} \text{ ی} + \frac{1}{2} \text{ صفر ی بجائے}$

لا متناہی ہو جاتا ہے۔ نامکمل پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے اور نامکمل  
ہم دیکھتے ہیں کہ نامکمل پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے اور نامکمل  
پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے نادر حل طبعیوں پر پیدا ہوتے ہیں ان میں  
ایک عجیب فرق ہے۔ ان الذکر مساواتوں کے لیے یہ ضروری  
ہے کہ سروں 'ف' 'ق' 'س' میں سے کم از کم ایک میں ایک ایسا  
تفاعل شامل ہونا چاہئے جو قدرت رکھتا ہو لیکن ثانی الذکر مساواتوں  
کے لیے ایسا نہیں ہے۔ نامکمل پذیر مساوات متعینوں کے ایک  
دوہرے لا متناہی قبیل کو تعبیر کرتی ہے جو قبیل

$$\frac{\text{ف}}{\text{ق}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{س}}$$

کے متعینوں کے علی القوائم ہوتے ہیں لیکن سطحوں کا کوئی ایسا قبیل

نہیں ہے جو تخمینوں کے اس دوسرے قبیل کے علی القوائم ہو۔ اگر نادر حل موجود ہے تو تخمینوں کے پہلے قبیل کے تمام سختی نادر حل سے تعبیر شدہ سطح کو مس کرتے ہیں۔

## گیارہویں باب پر تفرق مثالیں

$$(۱) \frac{\text{فرلا}}{\text{لا ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا ما}}$$

$$(۲) \frac{\text{فری}}{\text{ما ی (۲-۱) (۳-۲)}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا ما (۲-۱) (۳-۲)}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا (۲-۱) (۳-۲)}}$$

$$(۳) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}، \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$$

$$(۴) \text{ی (ی+۲) جم لا فرت} - \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - \text{ی (ی+۲) فرما}$$

$$+ (۱-۲) (ما-جب لا) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰$$

$$(۵) (۲+لا+ما+۲لا ی) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۲لا ما \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + لا \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = ۱$$

(۶) ف (ما) کو معلوم کرو اگر ف (ما) فرلا - ی لا فرما - لا ما لوک ما فری = تکمیل پذیر ہو۔

متناظر تکمیل معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات نا تکمیل پذیر ہے :

$$۳ ما فرلا + (ی-۳ ما) فرما + لا فری = ۰$$

ثابت کرو کہ مستوی لا ما پر ان تخمینوں کے ذیل جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں ما و مستوی ۲ لا + ما - ی = ۰ پر واقع ہیں قائم زائد

$$لا + ۳ لا - ما - ۱ ما = ب$$

ہیں -

(۸) کبھی یخنیوں  $ما = لا$ ،  $ما = ب$  ی لا کے قبیل کی تفریق مساواتیں معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ یہ تمام یخنی ناقص نماؤں کے قبیل  $لا + ۲ ما + ۳ ی = ج$

کو علی القوائم قطع کرتے ہیں -

(۹) اس یخنی کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲، ۱) میں سے گذرتا ہے اور سطحوں  $لا + ما = ج$  کے قبیل کو علی القوائم قطع کرتا ہے -

(۱۰)  $لا = ع$ ،  $ما = و$  رکھ کر حسب ذیل متجانس مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱) (لا - ما - ی + ۲ لا + ما + ۲ لای) فرلا + (ما - ی - لا)$$

$$+ ۲ ما + ۲ لای + (ی - لا - ۲ لا - ۲ ی) فرما + ۲ ی لا$$

$$+ ۲ ی ما = فری$$

$$(۲) (۲ لای - ما + ۲ لای) فرلا + (ما - ی - لای) فرما - (لا - لا)$$

$$+ ما = فری$$

$$(۳) ی فرلا + (ی - ۲ ما + ۲ لای) فرما + (ما - ی - لای) فری =$$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر مساوات

$$ف فرلا + ف فرلا + ف فرلا + ف فرلا =$$

مکمل پذیر ہو تو

$$ف (ف فرلا - ف فرلا) + ف (ف فرلا - ف فرلا) = ف (ف فرلا - ف فرلا)$$

$$+ ف (ف فرلا - ف فرلا) =$$

جہاں 'ر' 'س' 'ت' چار لامعول ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے کوئی تین ہو سکتے ہیں -



پورا کرتی ہے اور اس کا مکملہ حاصل کرو:

ماجب ط فرلا + لاجب ط فرما - لاجب ط فری - لاجم ط فرط =

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

فرلا + ب فرما + ج فری + ۲ ف فرما فری + ۲ گ فری فرلا

+ ۲ = فرلا فرما =

ف فرلا + ق فرما + س فری =

شکل

کی دو مساواتوں میں تھوٹل ہوتی ہے اگر

ا ب ج + ۲ ف گ = ۱ ف - ۱ ب گ - ۱ ج =

(منحوطات کے نتیجے سے متقابل کرو)

پس ثابت کرو کہ

لاما (فرلا + فرما + فری) + لا (ما + ی) فرما فری + ما (ی)

+ لا (فری فرلا + ی (لا + ما) فرلا فرما =

(لا + ما + ی - ج) (لاما - ج) =

کامل

(دفعہ ۵۲ کے ساتھ متقابل کرو)

ہے -

(۱۶) ثابت کرو کہ ف فرلا + ق فرما + س فری = ۱ ..... (۱)

کی تکمیل پذیری کی شرط سے متقاطع منحنیوں کے قبیلوں

$$(۲) \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{س}}$$

فرلا فرما فری

$$\text{اور} \quad \frac{\text{جفت ق جفت س}}{\text{جفت ی جفت ما}} = \frac{\text{جفت س جفت لا}}{\text{جفت ی جفت لا}} = \frac{\text{جفت ق جفت ف}}{\text{جفت ی جفت ما}}$$

(۳) ----

کے کسی زوج کا علی القوائم متقاطع ہونا لازم آتا ہے -

اس سے ثابت کرو کہ (۳) کے منحنی سب کے سب (۱) کی سطح پر واقع ہیں -

اس نتیجہ کی تصدیق ف = ن - م - ی، ق = ل - ی - ن لا، س = م لا۔ ل م کے لیے کرو۔

[متناظر مساواتوں کے حل کے لیے اس باب کی ابتدائی مثالوں کو دیکھو]  
(۱۷) گذشتہ مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساواتوں (۳) کے دو تکملے = مستقل، یہ = مستقل ہوں تو مساوات (۱) کا تکملہ شکل ف (عربی) = مستقل میں بیان ہو جانا چاہیے۔ اور اس لیے

ف فرما ہے ف فرما + س فرما  
ا فرما + ب فرما کے طور پر بیان ہونا چاہیے جہاں ا اور ب  
ع اور ب کے تفاعل ہیں۔

اس کی تصدیق صورت  
ف = م ای لوک ی، ق = ی لا لوک ی، س = لا م  
ع = م ای، ب = لا ی، لوک ی، ب = ب، ب = ب = ع

میں کرو۔  
اس لیے (۱) کا تکملہ شکل ع = ج = ج = ج ہے۔ یعنی م = ج لا لوک ی  
میں حاصل کرو۔

[اس باب کے تکملہ کے لیے دفعہ ۶۸ تا ۷۰ کا مطالعہ کرو۔ ان  
میں میر کا طریقہ اور متجانس مساواتوں کے لیے مشکل جزو ضربی کا بیان ملے گا]



## بارہواں باب

### پہلے رتبہ کی خبری تفرقی مساواتیں مخصوص طریقے

(۱۴۶)

۱۲۱۔ ہم جو تھے باب میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ اختیاری تقاضیوں یا اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے خبری تفرقی مساواتیں کس طرح حاصل کی جاتی ہیں۔ ہم یہ بھی بتا چکے ہیں کہ بعض ایسی مساواتوں میں جو ریاضیاتی طبیعیات میں بڑی اہم ہیں سادہ مخصوص حل کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں اور ان کی مدد سے زیادہ پیچیدہ حل جو ان ابتدائی اور محدودی شرطوں کو پورا کرتے ہیں جو بالعموم طبیعیاتی مسئلوں میں واقع ہوتی ہیں کس طرح حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

اس باب میں خاص طور پر ان مساواتوں سے بحث کی جائے گی جو ہندسی دلچسپی کی حامل ہیں اور مختلف شکلوں "عام"، "مکمل"، اور "ناور" شکلوں کو معلوم کیا جائے گا اور ان کی ہندسی تفسیر بیان کی جائے گی۔ مستثنیٰ مساواتوں کے متعلق یہ معلوم ہو گا کہ ان کے مکمل مختلف شکل سے ہوتے ہیں ان کو ہم مخصوص شکلوں "مکمل" کہیں گے۔

۱۲۲۔ وہ ہندسی مسئلے جن کی ضرورت پڑیگی۔ طالب علم کو ہندسہ محکمات کے حسب ذیل مسئلوں کا مطالعہ کرنا چاہئے۔



(۱) سطح ف (لا، ما، می) = کے نقطہ (لا، ما، می) پر اس کے عماد کی سمتی جیوب التمام نسبت

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} : \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} : \frac{\text{جف ف}}{\text{جف می}}$$

میں ہو رہی ہیں۔  
چونکہ

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف می}}{\text{جف لا}} = \text{ع (فرض کردہ) اور} - \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ف}} = \frac{\text{جف می}}{\text{جف ف}}$$

= ق (فرض کردہ)

اس لیے اوپر کی نسبت کو ع : ق :- ا بھی لکھا جاسکتا ہے۔  
اس پورے باب میں ع اور ق کو ان "خوں میں جس کی تعریف اوپر کی گئی ہے استعمال کیا جائے گا۔

(۲) سطحوں ف (لا، ما، می، اب) = کے نظام کاتواف بہاں و اور ب متغیر تبدیل ہیں دی ہوئی مساوات اور

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ب}} =$$

سے ا اور ب کو ساقط کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔ (۱۲۴)

نتیجہ میں لفاف کے علاوہ دوسرے طریق بھی شامل ہو سکتے ہیں  
(دیکھو چٹا باب)۔

۱۲۳۔ لگرانج کی خطی مساوات اور اس کی ہندی تعبیر۔

عام مساوات

$$\text{ف ع} + \text{ق ق} = \text{سرا} \dots \dots \dots (۱)$$

کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جس میں 'ف'، 'ق'، 'س' تینوں 'لا'، 'ما'، 'ی' کے تفاعل ہیں۔

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ ایک خاص سطح کا عماد اس خط پر عمود ہے جس کی سمتی جیوب انعام میں نسبت 'ف' : 'ق' : 'س' ہے۔ لیکن گذشتہ باب میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{\text{فر ق}}{\text{فر ی}} = \dots (۲)$$

منحنیوں کے ایسے قبیل کو تعبیر کرتی ہیں کہ کسی نقطہ پر کے تماس کی سمتی جیوب نسبت 'ف' : 'ق' : 'س' میں ہوتی ہیں اور مساوات 'ف' : 'ق' : 'س' = (ع' و) = (جہاں ع' = مستقل اور و = مستقل) ان ہمزاد مساواتوں کے دو خاص (نکٹے ہیں) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جو ان منحنیوں میں سے گزرتی ہے۔ ایسی کسی سطح کے ہر نقطہ میں سے قبیل کا ایک منحنی گذرتا ہے جو عملاً اس سطح پر واقع ہوتا ہے۔ اس لیے سطح کا عماد اس منحنی کے تماس پر عمود ہونا چاہیے۔ یعنی ایک ایسے خط پر جس کی جیوب انعام میں نسبت 'ف' : 'ق' : 'س' ہے۔ یہ عین وہی ہے جو جزئی تفرقی مساوات کے لیے مندرجہ ذیل ہے۔

اس لیے مساوات (۱) کی سطحیں وہ ہیں جن میں سے دو دو کو لیا جائے تو مساوات (۲) کے منحنی حاصل ہوتے ہیں۔ جب مساوات (۱) دیجاتی ہے تو مساواتوں (۲) کو ذیلی مساواتیں کہا جاتا ہے۔ اس طرح (۱) کا ایک تکملہ 'ف' : 'ق' : 'س' = (ع' و) = مستقل اور و = مستقل ذیلی مساواتوں (۲) کے کوئی دو غیر تابع حل ہوں اور نہ کوئی اختیاری تفاعل ہو۔ اس کو لکرائیج کی خطی مساوات کا عام تکملہ کہتے ہیں۔

$$\text{مثال (۱)} \quad ع + ق = ۱$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{\text{فر ق}}{\text{فر ی}} = \frac{۱}{۱}$$

(۱۴۸) ہیں جو متوازی خطوط مستقیم کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہیں۔ ان پر دفعہ ۱۱۲ مثال (۱) میں بحث کی جا چکی ہے۔  
 دو غیر تابع منحنی

$$لا - ی = ۱$$

ہیں جو مستویوں کے دو قبیلوں کو تعبیر کرتے ہیں جن میں یہ خطوط مستقیم واضح ہیں۔  
 عام تکملہ فہ (لا - ی، ما - ی) =۔ ہے جو اس سطح کو تعبیر کرتا ہے جو منحنی

فہ (لا، ما) =۔ ی =۔  
 میں سے گزرنے والے خطوں کے قبیل سے بنی ہے۔  
 اگر کوئی متعین منحنی دیا جائے مثلاً دائرہ  
 لا + ما = ۴، ی =۔

تو اس کے متناظر ہم خاص تکملہ  
 حاصل کر سکتے ہیں یہ تکملہ اس ناقصی اسطوانہ کو تعبیر کرتا ہے جو قبیل کے  
 ان خطوں سے بنتا ہے جو دئے ہوئے دائرہ سے ملتے ہیں۔

مثال (۲) ی ع =۔ لا (دیکھو دفعہ ۱۱۲ مثال ۲)  
 فیملی مساواتیں

$$\frac{فر لا}{ی} = \frac{فر ما}{۱} = \frac{فر ی}{لا}$$

ہیں جن کے دو تکملے لا + ی = ۱ اور ما = ی ہیں۔  
 عام تکملہ فہ (لا + ی، ما) =۔ اس گردشی سطح کو تعبیر کرتا ہے جو منحنی

$$فہ (لا، ما) =۔ ی =۔$$

کو قطع کرنے والے منحنیوں کے قبیل (اس صورت میں دائروں کے قبیل) سے بنتی ہے۔

مثال (۳) ان سطحوں کو معلوم کرو جن کے حماس مستوی 'ی' کے محور سے مستقل طول ک کا مقلوبہ کریں۔

(لا، ما، ی) پر حماس مستوی

ے۔ ی = ع (لا - لا) + ق (ما - ما)

ہے۔ رکھو لا = ما = .، ے = ی - ع لا - ق ما = ک ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{ی-ک}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

ہیں جن کے تکملے ما = لا، ی - ک = ب لا ہیں۔

عام تکملہ فہ (لا، ی - ک) = . ایک مخروط کو جس کا راس

(،،، ک) پر ہے تعبیر کرتا ہے اور یہ سطحیں صریحاً مطلوبہ خاصیت رکھتی ہیں۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے عام تکملے معلوم کرو: (گیا رہو ہیں باب میں مثالوں کا پہلا جٹ دیکھو)

(۱) لا ع + ما ق = ی

(۲) (م ی - ن ما) ع + (ن لا - ل ی) ق = ل ما - م لا

(۳) (ما + ی - لا) ع - ۲ لا ما ق + ۲ لا ی = .

(۴) ما ی ع + ی لا ق = لا ما

(۵) (ما + ی) ع + (ی + لا) ق = لا + ما

(۱۴۹)

$$(۶) (۲-۱) = ۱ + ۱ = ۲ \quad (۱-۱) = ۰ \quad (۱-۱) = ۰$$

$$(۷) ۳ + ۱ = ۴ \quad ۵ + ۱ = ۶ \quad (۳-۱) = ۲$$

$$(۸) ۱-۱ = ۰ \quad ۱+۱ = ۲ \quad (۱+۱) = ۲$$

$$(۹) \text{ مثال (۱) کا وہ حل معلوم کرو جو ایک سطح کو جو مکافی } ۴ = ۲ \text{ لا}$$

ی = ۱ سے ملے تبصرہ کرے۔

$$(۱۰) \text{ مثال (۴) کا عام ترین حل معلوم کرو جو ایک مخروطی نما کو تعبیر کرے}$$

$$(۱۱) \text{ ثابہت کرو کہ اگر مثال (۶) کا حل ایک کرہ کو تعبیر کرے تو}$$

مرکز مبداء پر ہوگا۔

$$(۱۲) \text{ وہ سطحیں معلوم کرو جن کے تمام عادی محور ی کو قطع کریں۔}$$

## ۱۲۴ - عام مسئلہ کی تحلیلی تصدیق - اب ہم اختیاری تغا

فہ کو فہ (۱، ۲) = ۰ سے ساقط کریں گے اور اس طرح اس امر کی تصدیق

تحلیلی طور پر کریں گے کہ یہ فہ ۱، ۲ = ۰ ق ق = ۰ کو پورا کرتا ہے

بشرطیکہ ۱، ۲ = ۰ اور ۱، ۲ = ۰ ب، ۱، ۲ = ۰ ذیلی مساوات

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۲}{۲} = \frac{۳}{۳}$$

کے دو غیر تابع نہ ہوں۔

فہ (۱، ۲) = ۰ کو لا کے لحاظ سے، ۱، ۲ کو مستقل رکھ کر جزوی تفرق کرتے

لا کے تغیر کی وجہ سے ی بدلتے گا۔ اس لیے حاصل ہوگا

۱، ۲ اگر ۱، ۲ اور غیر تابع نہ ہوں تو (جف ۱، ۲ - جف ۱، ۲) اور دیگر مشابہ

جملے سب متشابه معدوم ہوتے ہیں (ایڈورڈ کا ڈفرنشل کیا لکھو دفعہ ۵۱۰) اور اس

مساوات (۱) = ۰ میں تحویل ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \right) + \left( \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \right) \\
 & = \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \\
 & \text{یعنی } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \\
 & = \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \\
 & \text{اسی طرح } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right) + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \\
 & = \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right) + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \\
 & \text{نسبت } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} : \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} \text{ کو ان دو مساواتوں سے ساٹھا کیا جاتا تو} \\
 & \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right) \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}} \right) \\
 & = \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}} \right) \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right) \\
 & \text{یعنی } \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} \right) \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}} \right) \\
 & = \left( \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} \right) \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} \right) \\
 & (1) \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

لیکن  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = 1$  سے،  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}}$  فرما

اس لیے ذیلی مساواتوں سے جن کا ایک تکملہ  $\epsilon = \omega$  ہے

$$\text{ف} = \frac{\text{جفء}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{ق}}{\text{جفما}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفی}} = \text{س}$$

$$\text{اسی طرح ف} = \frac{\text{جفو}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{ق}}{\text{جفما}} + \frac{\text{جفو}}{\text{جفی}} = \text{س} \quad (150)$$

پس  $\text{ف} : \text{ق} : \text{س}$

$$= \left( \frac{\text{جفو}}{\text{جفما}} - \frac{\text{جفء}}{\text{جفی}} \right) : \left( \frac{\text{جفء}}{\text{جفی}} - \frac{\text{جفء}}{\text{جفلا}} \right) :$$

$$\left( \frac{\text{جفء}}{\text{جفلا}} - \frac{\text{جفء}}{\text{جفی}} \right) :$$

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\text{ف} = \text{ق} + \text{س}$$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۲۵۔ مخصوص تکملے۔ بعض اوقات یہ بیان کیا جاتا ہے کہ

لکیرانج کی خطی مساوات کے تمام تکملے عام تکملے  $\text{ف} = (\epsilon, \omega)$  میں شامل ہوتے ہیں، لیکن ایسا نہیں ہے۔ مثلاً مساوات

$$\epsilon - \text{ق} = 2\omega$$

$$\text{کی ذیلی مساواتیں} \quad \frac{\text{فرلا}}{1} = \frac{\text{فرما}}{1} = \frac{\text{فری}}{2\omega}$$

ہیں۔

اس طرح ہم  $\epsilon = \omega + \omega' = \omega - \omega''$  لے سکتے ہیں اور عام تکملہ کو شکل

$$\text{ف} = (\omega + \omega', \omega - \omega'')$$

میں رکھ سکتے ہیں۔ لیکن یہ = جزئی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اگرچہ یہ سرخی ناممکن ہے کہ اس کو عام تکملہ سے حاصل کیا جائے۔  
 ایسے تخیل کو جنہوں تکملہ کہتے ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ  
 سرور و ق' سر پر بعض مناسب قیود عائد کر کے تمام مخصوص تکملہ  
 معلوم کیے جاسکتے ہیں اور یہ اس طرح کہ سرور کی ان قیوں کو جن میں  
 نہ رست ہو (مثلاً انا ہی) صفر کے مساوی رکھا جائے۔ اس کے برخلاف  
 یہ ہو سکتا ہے کہ ایسی رقم سے کوئی خاص تکملہ حاصل نہ ہو۔ مسٹر ایم  
 جے۔ ایم۔ ہل کے کام کو جاری رکھتے ہوئے میں نے وہ ضروری اور کافی شرطیں  
 منضبط کی ہیں کہ ایسی رقم سے خاص تکملہ حاصل ہو اور نیز تکملوں کی  
 مختلف قسموں کی جدید تقسیم کی ہے جس کی ضرورت مسٹر فرسٹاچ نے  
 بتائی تھی۔

## حل طلب مثالیں

ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں کے عام تکملے اور مخصوص تکملے وہ  
 ہیں جو ساتھ ہی درج کئے گئے ہیں:

$$(۱) \quad ع + ۲ ق ی = ۳ ی^۲ \quad \text{فہ} (لا - ی) = ۱ - ی^۲ \quad \text{ی} = ۰$$

$$(۲) \quad ع + ق = ۱ + (ی - ۱) \quad \text{فہ} \{ لا - ی \} = ۲$$

$$۳ + (ی - ۱) = ۰ \quad \text{ی} = ۱$$

Proc. London Math. Soc 1917

Journal Lond. Math. Soc, 1939

Proc. London Math. Soc. 1905—6

۱

۲

۳



$$(۳) \{ ۱ + \sqrt{۱ - لا - ما} \} ع + ق = ۲ \text{ فہ } \{ ۲ - ما - ی \} ما$$

$$[Crystal] ۲ + \sqrt{۱ - لا - ما} = ۰ \text{ فہ } ی = لا + ما$$

(۴) کرسٹل کی مساوات (مثال ۳) میں (ی - لا - ما) = ۲ ط رکھ کر (۱۵۱)

$$ط = [۲ (۱ + ط) \frac{جف ط}{جف لا} + ۲ \frac{جف ط}{جف ما} + ۱] = ۰$$

کو حاصل کرو۔

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی مساوات کا ایک حل ی - لا

- ما = ۰ ہے۔ (Hill) ثابت کرو کہ کرسٹل کی مساوات (مثال ۳) کی لگرا نخی ذیلی مساواتوں کو

$$\frac{فر لا}{فر ما} = ۱ + (ی - لا - ما)^{\frac{1}{2}} \text{ فہ } \frac{فر ی}{فر ما} = ۲$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اخذ کرو

$$\frac{فر ی}{فر ما} - (ی - لا - ما) = (ی - لا - ما)^{\frac{1}{2}}$$

جس کا ایک مخصوص حل ی - لا - ما = ۰ ہے۔

(۶) مساوات ع - ق = ۲ ی

کے عام اور تفصیل تکمیل کے طریقہ کی نقل کر کے جیسا کہ مثال ۴ اور ۵ میں کیا گیا ہے حاصل کرو۔

۱۲۶ - ن متبوع متغیروں کی خطی مساوات - مساوات

$$ف۱ ع + ف۲ ع + ف۳ ع + \dots + ف۱ ع = ص$$



$$(۶) \quad ۳ = \{ ۱ + \sqrt[۳]{۱ - ی - لا - لا - لا} \}$$

$$۱۲۷ - مساوات ف جف ف + ق جف لا جف ما جف (۱۵۲)$$

+ کا جف ف = . - اگر ف ' ق ' اور س ' لا ' ما ' اور ی کے  
تفاعل ہوں لیکن ف کے تہ ہوں تو اس مساوات پر دو مختلف  
طریقوں سے بحث کی جاسکتی ہے -  
مثلاً مساوات

$$\frac{جف ف}{جف لا} - \frac{جف ف}{جف ما} + ۲ \frac{جف ف}{جف ی} = ۰ \quad (۱)$$

پر غور کرو -  
ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات 'سہ بُعدی مساوات'  
(۲)  $۲ = ق - ی$

کے معادل ہے جس کا عام تکملہ  
فہ (لا + ما ' لا - ی) = ۰  
ہے اور ایک مختص تکملہ  $ی = ۰$  ہے -  
اس کے برخلاف اگر ہم (۱) کو چار متغیروں کی ایک مساوات  
سمجھیں تو عام تکملہ

فہ (ف ' لا + ما ' لا - ی) = ۰  
حاصل ہوتا ہے جو ف = سا (لا + ما ' لا - ی) کے معادل ہے  
جہاں سا ایک اختیاری تفاعل ہے لیکن یہ صرف اس صورت  
میں جبکہ

$$ف = ی \quad \frac{جف ف}{جف لا} - \frac{جف ف}{جف ما} + ۲ \frac{جف ف}{جف ی} = ۲ = ق - ی$$

اس طرح ف = ی، (۱) کا تکملہ نہیں ہے، اگرچہ ف = ی۔ سے یقیناً ایک حل حاصل ہوتا ہے۔  
عام طور پر یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر

$$ف = \frac{جف ف}{جف لا} + \frac{جف ق}{جف ما} + \frac{جف ی}{جف ی} = ۰$$

کو چار بعد ی سمجھا جائے اور ف، ق، اور ما میں ف شریک نہ ہو تو اس کے کوئی شخصیں بچلے نہیں ہوتے۔ متعدد متبوع متغیروں کے لیے مشابہ مسئلہ بھی درست ہے۔

### حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ اگر ف = لا تو ف = ۰۔ ایک ایسی سطح ہے جو

$$لا = \frac{جف ف}{جف لا} + \frac{جف ق}{جف ما} + \frac{جف ی}{جف ی} = ۰$$

کو پورا کرتی ہے اور پھر اس سے یہ ثابت کرو کہ اس تفرقی مساوات کے تین مخصوص بچلے

$$لا = ۰، ما = ۰، ی = ۰$$

ہیں اور عام تکملہ ف = (ما - لا، لا - ما، ما - لا) = ۰ ہے اگر اس تفرقی مساوات کو سہ بعد ی سمجھا جائے۔

(۲) ثابت کرو کہ گذشتہ مثال کا عام تکملہ ان منحیوں میں سے گذرنے والی سطحوں کو تعبیر کرتا ہے جو (اگر وہ مبدا میں سے نہیں گذرتے تو) محدودوں کے مستویوں کو مس کرتے ہیں یا ان میں سے ایک میں کلاً واقع ہیں۔

[ اشارہ - ثابت کرو کہ  $\frac{فرلا}{فرس} = \left[ \frac{لا}{لا+ما+ی} \right]$  اور یہ کہ  $\frac{فرلا}{فرس} = ۰$  اگر  $لا = ۰$ ،  $لا+ما+ی$  کی سب صفر ہوں۔ ]

(۳) ثابت کرو کہ اگر  $\frac{جف ی}{جف لا} + \frac{جف ی}{جف ما} = \frac{جف ی}{جف ۱}$  کو دو

بُند ی سمجھا جائے تو وہ مکافون کے قبیل  $ما = لا + ج$  اور ان کے لغاف اور محدودوں کے محوروں  $لا = ۰$ ،  $ما = ۰$  کو تعبیر کرتی ہے لیکن اگر اس کو سہ بُندی سمجھا جائے تو وہ سطحوں  $ی = ۰$  (ما - لا) کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۲۸ - غیر خطی مساواتیں - اب ہم ایسی مساواتوں پر غور

کریں گے جن میں  $ع$  اور  $ق$  پہلے درجہ میں واقع نہیں ہوتے بلکہ کسی درجہ میں - عام طریقہ بیان کرنے سے پیشتر ہم چار معیاری شکلوں پر بحث کریں گے جن کے لیے "ایک سماج تکمیل" کیلئے جس میں دو اختیار کی مشتمل ہے (ہوں) صرف معائنہ کرنے سے یا دوسرے معمولی ذریعوں سے حاصل ہو سکتا ہے - دفعہ ۱۳۳ تا دفعہ ۱۳۵ میں ہم یہ بتائیں گے کہ کمال تکمیل سے عام اور نادر کئے کس فن اخذ کئے جاسکتے ہیں -

۱۲۹ - معیاری شکل (۱) - صرف  $ع$  اور  $ق$  موجود - مثلاً مساوات

$$ق = ۳ع$$

پر غور کرو -

سب سے زیادہ واضح حل یہ ہے کہ  $ع$  اور  $ق$  کو ایسے مستقل سمجھا جائے جو مساوات کو پورا کریں مثلاً  $ع = ۱$  اور  $ق = ۳$

اب چونکہ  
فری = ع فرلا + ق فرما = لا فرلا + ۳ لا فرما

اس لیے

ی = لا + ۳ لا + ما + ج  
یہ کوائف مکملہ ہے جس میں دو اختیاری مستقل لا اور ج شریک ہیں۔  
نام طور پر ف (ع، ق) = کا کامل مکملہ  
ی = لا + ب + ما + ج

ہے جہاں لا اور ب میں رشتہ ف (لا، ب) = ہے۔

## حل طلب مثالیں

تسب ذیل مساواتوں کے کامل تحلیئے معلوم کرو:

$$(۱) \quad ع = ۲ ق + ۱ \quad (۲) \quad ۱ = ع + ۲ ق$$

$$(۳) \quad ع = ق \quad (۴) \quad ۱ = ع + ق$$

$$(۵) \quad ع - ق = ۲ \quad (۶) \quad ع ق = ع + ق$$

۱۳۔ معیاری شکل (۲)۔ صرف ع، ق اور ی موجود

مساوات

$$(۱) \quad ی (ع + ق) = ۱$$

پر غور کرو۔ آزمائشی حل کے طور پر فرض کرو کہ ی لا + لا کا ایک تفاعل ہے جہاں لا ایک اختیاری مستقل ہے۔ فرض کرو کہ یہ تفاعل ۶ ہے۔

$$تب \quad ع = \frac{جف ی}{جف لا} = \frac{جف ی}{جف لا} \times \frac{جف ۶}{جف ۶} = \frac{جف ی}{جف لا} \times \frac{جف ۶}{جف ۶}$$

$$ق = \frac{جف ی}{جف ما} = \frac{جف ی}{جف ما} \times \frac{جف ۶}{جف ما} = \frac{جف ی}{جف ما} \times \frac{جف ۶}{جف ما}$$

(۱) میں درج کرنے پر

$$۱ = (۱' + ۲') \left( \frac{فری}{فرع} \right)$$

$$\frac{فرع}{فری} = \pm ۱ (۱' + ۲')$$

$$۶ + ۱ = \pm \frac{۱}{۳} (۱' + ۲')$$

$$۹ (لا + لا + با) = (۱' + ۲')$$

(۱۵۴) عام طور پر اس طریقے سے مساوات ف (ی، ع، ق) = ۰، معمولی تفرقی مساوات

$$ف (ی، ع، ق) = \left( \frac{فری}{فرع} \right) = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔ حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے کابل شکلے معلوم کرو:

$$(۱) ۴ ی = ع ق (۲) ۱ = ۲' + ع' + ق'$$

$$(۳) ق' = ۲' + ع' (۱ - ع') (۴) ع' + ق' = ۲' = ۴ ی$$

$$(۵) ع (۱ + ع) + ق = ۰ (۶) ع' = ۱ ق$$

۱۳۱۔ معیاری شکل (۳)۔ ف (لا، ع) = فا (ما، ق)

مساوات ع - ۳ لا = ق' - ما پر غور کرو۔ آزمائشی حل کے طور پر اس مساوات کی ہر جانب کے جملہ کو ایک اختیاری مستقل ۱ کے مساوی رکھو تو

$$ع = ۳ لا + ۱، ق = \pm ۱ (لا + ما)$$

لیکن فری = ع فر لا + ق فر ما

$= (۳\text{ لا} + ۱) \text{ فر لا} \pm \text{ما} + ۱ \text{ فر ما}$   
 اس لیے  $ی = \text{لا} + ۱ \text{ لا} \pm \frac{۲}{۳} (۱ + \text{لا}) + \text{ب}$   
 اور یہ مطلوبہ کامل تکملہ ہے۔

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱)  $\text{ع} = \text{ق} + \text{لا}$  (۲)  $\text{ع} \text{ ق} = \text{لا}$

(۳)  $\text{ما} \text{ع} = ۲\text{لا} + \text{لوک ق}$  (۴)  $\text{ق} = \text{لا} \text{ما} \text{ع}$

(۵)  $\text{ع} \text{ فو} = \text{ق} \text{ فو}$  (۶)  $\text{ق} (\text{ع} - \text{جم لا}) = \text{جم ما}$

۱۳۲۔ معیاری شکل (۴)۔ جزئی تفرقی مساواتیں  
 جو کلیروی شکل کے مشابہ ہیں۔ چوتھے باب میں ہم نے

یہ بتایا تھا کہ

$\text{ما} = \text{ع} \text{ لا} + \text{ف} (\text{ع})$

کا کامل ابتدائی  $\text{ما} = \text{ع} \text{ لا} + \text{ف} (\text{ج})$

ہے اور یہ خطوط مستقیم کا ایک قبیلہ ہے۔

اسی طرح جزئی تفرقی مساوات

$ی = \text{ع} \text{ لا} + \text{ق} \text{ ما} + \text{ف} (\text{ع} \text{ ق})$

کا کامل تکملہ  $ی = \text{لا} + \text{یب} \text{ ما} + \text{ف} (\text{و} \text{ ب})$

ہے اور یہ مستویوں کا ایک قبیلہ ہے۔

مثلاً  $ی = \text{ع} \text{ لا} + \text{ق} \text{ ما} + \text{ع} \text{ ق}$

کا کامل تکملہ  $ی = \text{لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{و} \text{ ب}$



۱۵۵ ہے۔ کلیروی شکل کے نادر حل کے جواب میں جس سے خطوط مستقیم کے قبیل کا لفاف حاصل ہوتا ہے اُسکے دفعہ میں یہ معلوم ہو گا کہ جزئی تفرقی مساوات کا ایک ”نا در تکملہ“ ہوتا ہے جس سے مستویوں کے قبیل کا لفاف حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ  $y = e + la + c - 3c$  کا کامل تکملہ ان تمام مستویوں کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ  $(0, 3, 2)$  میں سے گزرتے ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ  $y = e + la + c + \sqrt{e^2 + c^2} + 1$  کا کامل تکملہ ان تمام مستویوں کو تعبیر کرتا ہے جو مبدا سے اکائی فاصلہ پر ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ  $y = e + la + c + \frac{e}{c - e - c}$  کا کامل تکملہ

ایسی تمام مستویوں کو تعبیر کرتا ہے کہ محدودوں کے تین محوروں پر ان کے مقطوعوں کا جبری مجموعہ ایک ہے۔

۱۳۳۳۔ نادر تکملے۔ چھٹے باب میں ہم نے یہ ثابت کیا تھا

کہ اگر مخفیوں کا وہ قبیل جو پہلے رتبہ کی ایک معمولی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتا ہے ایک لفاف رکھے تو اس لفاف کی مساوات تفرقی مساوات کا ایک نادر حل ہوتی ہے۔ اس کے مشابہ مسئلہ سطحوں کے ایک ایسے قبیل کے متعلق درست ہے جو پہلے رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے کامل تکملہ سے تعبیر ہوتا ہو۔ اگر ان سطحوں کا لفاف ہے تو اس کی مساوات کو ”نا در تکملہ“ کہتے ہیں۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ وہ فی الواقع ایک تکملہ ہے صرف یہ دیکھنے کی

ضرورت ہے کہ لفاف کے کسی نقطہ پر قبیل کی ایک سطح ہے جو اس کو مس کرتی ہے۔ اس لیے لفاف کا عماد اور اس سطح کا عماد ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے لفاف کے کسی نقطہ پر ع اور ق کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو قبیل کے کسی خاص سطح کی ہیں اور اس لیے اسی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ ہم نے نادر علوں کو معلوم کرنے کے دو طریقے ایک ج مینر سے اور دوسرا ع مینر سے بیان کئے تھے اور یہ بتایا تھا کہ ان طریقوں سے عقدہ طریق 'قرن طریق' اور 'تاس طریق' بھی حاصل ہوتے ہیں جن کی مساواتیں تفرقی مساواتوں کو پورا نہیں کرتیں۔ چھٹے باب کے ہندسی استدلال کی توسیع سطحوں پر کی جاسکتی ہے لیکن ان زائد طریقوں (Luci) کی بحث جن سے نادر مل حاصل نہیں ہوتے زیادہ پیچیدہ ہے۔ جہاں تک لفاف کا تعلق ہے وہ طالب علم جس نے چھٹے باب کو خوب سمجھا ہو یہ سمجھنے میں کوئی مشکل محسوس نہیں کرے گا کہ یہ سطح ان میں شامل ہے جو ا اور ب کو کامل تکملہ اور دو مشتق مساواتوں

$$f = (a, b) = 0$$

$$\frac{df}{da} = 0$$

$$\frac{df}{db} = 0$$

۱۵۶ سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہیں یا ع اور ق کو تفرقی مساوات اور دو مشتق مساواتوں

$$f = (a, b, c) = 0$$

$$\frac{df}{da} = 0$$

$$\frac{df}{db} = 0$$

$$\frac{df}{dc} = 0$$

$$\frac{df}{dd} = 0$$

سے سا قی کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔  
کسی حقیقی مثال میں اس کا امتحان کر لیا جائے کہ آیا نامکملہ حقیقت  
میں تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔

مثال (۱) دفعہ ۱۳۲ کی مساوات کا کامل تکملہ

$$y = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots$$

تھا۔

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 0$$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 0$$

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 0$$

اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ یہ تفرقی مساوات

$$y = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots$$

کو پورا کرتا ہے اور اس سے ایک گردش کی مکافی غائب ہو جاتا ہے جو ان تمام

مستویوں کا لٹاف ہے جن کو کامل تکملہ تعبیر کرتا ہے۔

مثال (۲) دفعہ ۱۳۰ کی مساوات کا کامل تکملہ

$$(1) \quad y = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots$$

تھا۔

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 0$$

$$(2) \quad 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 0$$

$$(3) \quad 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots = 0$$

اس لیے (۲) سے  $1 = 0$

(۱) میں (۳) اور (۴) سے اندراج کرنے پر

$$y = 1$$

لیکن  $y = 1$  سے  $1 = 0$  اور یہ قیمتیں تفرقی مساوات

$$y = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots$$

کو پورا نہیں کرتیں۔

اس لیے ی = ۰۔ نادر تکملہ نہیں ہے۔

مثال (۳) مساوات  $ع^۲ = ی ق$  پر غور کرو۔

ع کے لحاظ سے تفرق کرنے پر  $۰ = ع$

اسی طرح  $ی = ۰$

ان مساواتوں سے ع اور ق کو سا قاط کرنے سے ناں ہوتا ہے

ی = ۰

یہ تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس لیے وہ حقیقت میں نادر تکملہ ہے

لیکن وہ  $ی = ب و لا + لا + لا$

میں ب = ۰ رکھنے سے ماخوذ ہو سکتا ہے جو ایک کامل تکملہ ہے۔

اس لیے ی = ۰ ایک نادر تکملہ بھی ہے اور کامل تکملہ کی ایک مخصوص صورت بھی۔

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے نادر تکملے معلوم کرو:

(۱)  $ی = ع + لا + ق + ما + لوک ع ق$

(۲)  $ی = ع + لا + ق + ما + ع + ع + ق + ق$

(۳)  $ی = ع + لا + ق + ما + \frac{۱}{۲} ع ق$

(۴)  $ی = ع + لا + ق + ما + \frac{ع}{۲}$

(۵)  $۴ ی = ع ق$  (۶)  $ی = ۱ + ع + ق$

(۷)  $ع + ق = ۲ ی$

(۸) ثابت کرو کہ کسی ایسی مساوات کا نادر تکملہ نہیں ہوتا جو معیاری

شکل (۱) یا (۳) سے متعلق ہو۔ [معمولی عمل سے مساوات ۰ حاصل ہوتی ہے]

(۹) ثابت کرو کہ ی = ۰ مساوات ق = ۱ ع (۱-ع) کا ایک

نادر حل بھی ہے اور اس کے کابل تکملہ کی ایک مخصوص صورت بھی۔

۱۳۴۔ عام تکملے۔ گزشتہ دفعہ کی مثال (۱) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کابل تکملہ

ی = ۱ + لا + ب + ا + ب' + ا' (۱)  
سے تعبیر شدہ تمام مستوی اُس گردش مکانی نما کو سس کرتے ہیں جو نادر تکملہ  
۴ ی = - (لا + ا') (۲)

سے تعبیر ہوتا ہے۔  
اب تمام مستویوں پر نہیں بلکہ صرف اُن مستویوں پر غور کرو جو  
مستوی ا = ۰ پر عمود ہیں۔ یہ مستوی (۱) میں ب = ۰ رکھنے سے حاصل  
ہوتے ہیں چنانچہ

ی = ۱ + لا + ا'  
اور لفاف مکانی اسطوانہ  
۴ ی = - لا' (۳)

ہے۔ مستویوں کا دوسرا جٹ لو یعنی وہ جو نقطہ (۰، ۰، ۱) میں سے گزرتے ہیں  
(۱) سے ۱ = ا + ب' + ا'

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے  
ی = ۱ + لا + ا' + (۱ - ا') + ا' + ۱  
اور لفاف قائم مستدیر مخروط

(۴) (ی - ۱) = لا' + ا'  
آسانی سے معلوم ہوتا ہے۔

عام طور پر ہم ب = ف (۱) رکھ سکتے ہیں جہاں ف، لا کا کوئی  
تفاعل ہے چنانچہ

(۵) ی = ۱ + لا + ف (۱) + ا' + {ف (۱)}



ایک خط مستقیم (دوستویوں کے خط تقاطع کے طور پر) حاصل ہوگا اور یہ خط مستقیم ایک میز ہوگا۔ اس مثال میں میز خطوط مستقیم کے تہرے لائن ہی جیسے مشتمل ہیں جو گردش کی مکانی نما (۲) کو مس کرتے ہیں۔

مکانی اسطوانہ (۳) میزوں کے ایک اکہرے لائن ہی جٹ سے تکوین پانچ پانچ آٹ سے جو ما۔۔۔ پر نمود ہیں اور مخروط (۴) دوسرے جٹ سے تکوین پانچ پانچ آٹ سے جو ثابت نقطہ (۵) میں سے گزرتے ہیں۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ عام مکملہ تمام ایسی سطحوں کے

مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو میزوں سے تکوین پاتی ہیں۔

اگر ایک نادر شکل موجود ہو تو تمام میز اس کو مس کرنے چاہئیں

اور اس لیے وہ تمام سطحیں اس کو مس کرنی چاہئیں جو عام مکملہ سے

تعبیر شدہ سطحوں کے مخصوص جٹوں سے تکوین پاتی ہیں۔ اس کی

آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ گذشتہ دفعہ کا مکانی اسطوانہ اور

تمام مستدیر مخروط گردش کی مکانی نما کو مس کرتے ہیں۔

۱۳۶۔ خطی مساوات کی خصوصیات - خطی مساوات

$$F + C + Q = R$$

پر غور کرو۔ فرض کرو کہ

$$6 = \text{مستقل}$$

$$7 = \text{مستقل}$$

ذیلی مساواتوں کے دو غیر تابع متعلقہ ہیں۔

لہٰذا چونکہ اور دو غیر تابع ہیں ان میں سے کم از کم ایک میں ی شریک ہونا چاہئے۔ فرض کرو کہ

ی ۶ میں ہے۔ یہ ہم اسوجہ سے کرتے ہیں کہ ۶ + ۷ + ۱ + ۱ + ۱ = ۲۰ صرف لا اور کا تعلق نہ ہونے بلکہ کیونکہ اگر ایسا ہو تو ۶ + ۷ + ۱ + ۱ + ۱ = ۲۰ سے (۱) کی قیمتیں غیر متعین ہو جائیں گی

اور معمولی طریقہ پر مساوات (۱) پوری نہ ہو سکے گی۔

اب اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ (۱) کا ایک تکملہ

$$(۲) \quad ۱ + ۶ + ۷ + ۸ = ۰$$

۴۔ اس کو کامل تکملہ کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔ عام تکملہ کو

(۱۵۹)

$$(۳) \quad ۱ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۰$$

$$(۴) \quad ۱ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۰$$

سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(۴) سے ظاہر ہے کہ ۱ 'صرف و کا ایک تفاعل ہے' فرض کرو

$$۱ = ۱ \text{ فا } (۱)$$

(۳) میں درج کرنے سے

$$۶ = ۱ \text{ و کا ایک تفاعل}$$

اس لیے فرض کرو کہ ۶ = ۱ سا (۱)

یہ اس عام تکملہ (۱، ۶، ۷، ۸، ۹) کے مابول ہے جو اس باب کے شروع میں حاصل ہوا تھا۔

خطی مساوات اس امر میں استثنائی ہے کہ اس کا کامل تکملہ

(۲) عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔ دوسری خصوصیت یہ

ہے کہ ممیز جو یہاں وہ منحنی ہیں جو ذیلی مساواتوں سے تعبیر ہوئے ہیں تعداد

میں تہرے لائنوں کی بجائے صرف دو ہرے لائنوں ہی ہیں۔ صرف ایک

ایک دسے مجموعی نقطہ میں سے (عام طور پر) گذرتا ہے حالانکہ غیر خطی صورت

میں جس کی تمثیل گذشتہ دفعہ میں دی گئی ہے ایک معلومہ نقطہ میں سے

ممیزوں کی لائنوں کی تعداد گذر سکتی ہے اور ان سے ایک سطح بن سکتی ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱) وہ سطح معلوم کرو جو

$$۱ = ۱ \text{ ع لا } + ۱ \text{ ق لا } + ۱ \text{ ع لا } + ۱ \text{ ق لا } + ۱ \text{ ق لا}$$



کے اُن ممیزوں سے تکوین پاتی ہے جو محور لای کے متوازی ہیں۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ وہ حقیقت میں تفرقی مساوات کو پورا کرتی ہے اور اُس سطح کو مس کرتی ہے جو نادرتکملہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

$$(۲) \text{ ثابت کرو کہ } ی = ۲ لا + ما \text{ مساوات}$$

$$ی = ع + لا + ق + ما + کوک + ع + ق$$

کا ایک تکملہ ہے جو اُن مستویوں کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں اور مبداء میں سے گزرتے ہیں۔

$$(۳) \text{ ثابت کرو کہ } ق = ۳ ع + ا \text{ کے وہ ممیز جو نقطہ } (۰، ۰، ۰)$$

میں سے گزرتے ہیں مخروط (لا + ا) + ۱۲ ما ی = کی تکوین کرتے ہیں۔

$$(۴) \text{ مساوات } ی = ع + لا + ق + ما + \frac{ع}{۳}$$

کے تکملہ (ما + ا) + ۲ لا ی = کی نوعیت کیا ہے؟

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ مساواتوں}$$

$$ی = (لا + ما) + ا + لا + ب + ما$$

$$ی = (لا + ما) + \frac{ما + لا + ب + ا}{لا + ا}$$

میں سے کسی ایک کو ایک خاص تفرقی مساوات کے کامل تکملہ کے طور پر لیا جاسکتا ہے اور اس سے دوسری مساوات کو عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت کے طور پر ماخوذ کیا جاسکتا ہے۔ [ لندن ]

$$(۶) \text{ ثابت کرو کہ تفرقی مساوات } ع = ۳ ی + ق \text{ کا ایک کامل تکملہ}$$

$$ی = (لا + ا) + ق + ۱$$

ہے۔

$$\text{ثابت کرو کہ } ما ی = ۲ \left( \frac{لا + ا}{۱ - ۲} \right) + ا \text{ اسی مساوات کے عام تکملہ کا}$$

حصہ ہے، اس کو اوپر دے ہوئے کامل تکملہ سے اخذ کرو۔ [لندن]  
نوٹ: جزئی تفرقی مساواتوں پر ان طریقوں کے مشابہ طریقے استعمال کئے  
جاسکتے ہیں جنکا ذکر دفعہ ۶۷ کے ختم پر نوٹ میں کیا گیا ہے۔ مثلاً  
$$y^2 (x^2 y^2 + y^2 + 1) = 1$$

کو لو جس میں 
$$x = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \text{ اور } y = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$$
  
حل کا معمولی طریقہ یہ ہے کہ  $y$  کو  $لا + ما$  ( $= ۶$  فرض کرو) کا ایک  
تفاعل فرض کیا جائے۔ اس سے حاصل ہوگا  
$$y^2 \left( \frac{x^2 y^2}{6} + y^2 + 1 \right) = 1$$

اب متغیروں کو جدا کرنے سے  $۶ + ب = \frac{۱}{۳} (۱ + ی + ی^۲)$  حاصل  
ہوتا ہے جس سے کامل ابتدائی  $(۱ + ی + ی^۲) = ۳ (لا + ما + ب)$  ملتا  
ہے۔ وہ طریقہ اختیار کرو جو دفعہ ۸۱ کے ختم پر نوٹ میں درج کیا گیا ہے۔  $ب$  کی  
جگہ  $\frac{۱}{۳} (۱ - ی - ی^۲)$  رکھو،  $۳$  سے تقسیم کرو اور پھر  $لا$  کو لائقنا ہی بتاؤ تو  
 $ی^۲ = ۲ (ما - ک)$  حاصل ہوگا جو تفرقی مساوات کو یقیناً پورا کرتا ہے۔  
ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ یہ عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے  
جو اکہرے لائقنا ہی ذیلی قبیلہ ہے

$$(۱ + ی + ی^۲) = ۳ (لا + ما + \frac{۱}{۳} (۱ - ی - ی^۲) - ک)$$
  
کے لفاف کو تعبیر کرتی ہے۔ لیکن اس سطح پر کے کسی نقطہ کے عماد کی سمتی  
جیوب التمام میں نسبت

$$۱۸ (لا + ما + \frac{۱}{۳} (۱ - ی - ی^۲) - ک) : ۱۸ (لا + ما + \frac{۱}{۳} (۱ - ی - ی^۲) - ک) :$$

ہے اور  $ی^۲ = ۲ (ما - ک)$  پر کے کسی نقطہ کے عماد کی سمتی جیوب التمام میں  
نسبت  $۶ - ی (۱ + ی + ی^۲)$

۲- ی  
یہ تفریقوں کے یہ دو جٹ، ک کی کسی قیمت کے لیے ایک ہی  
تفریق ہو سکتا ہے سو اس کی قیمت ۵۵ کے - اس لیے ی = ۲ (ما-ک)  
ایک مساوات کو تعبیر نہیں کرتا۔ اس کو بنیہ تکملہ کہہ سکتے ہیں۔  
حالب علم کو یہ مان ہو سکتا ہے کہ کامل تکملہ کے انکار کرنے  
میں منطقی نقص حسب سابق تغیروں کو جدا کرنے میں موجود ہے۔  
لیکن حقیقت میں ہم نے استدلال کے ایک مختلف حصہ میں  
ایک غلط مفروضہ اختیار کیا ہے یعنی وہاں جہاں ہم نے یہ مان  
نیا کہ لا + ۱ ما ایک تفاعل ہے۔ یہ مفروضہ جائز نہیں اگر  
ما صرف ما کا ایک تفاعل ہو اور یہ وہی مستثنیٰ صورت ہے  
بہر سے بقیہ تکملہ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح شکل  
فا (لا، ع، ق) = ۰  
کی کسی جزئی تفرقی مساوات پر بحث کی جاسکتی ہے۔

## بارہویں باب پر تفرقی مثالیں

- (۱) ی = ع لا + ق ما - ع ق (۲) = ع لا + ق ما - (ع لا + ی ق)  
(۳) ی (ی + لا ما) (ع لا - ق ما) = لا (۴) ع - ق = لا ۳ - لا ۲ ما  
(۵) ع + ۲ لا ۲ ع + لا ۲ ع = ۰ (۶) لا ۲ ع + لا ۲ ع + لا ۲ ع = ۰  
(۷) ع + ق - ۲ ق ی = ۰ (۸) ع + ع + ع = ۴ ی  
(۹) ع + ع + ع = ۴ ی (۱۰) ع + ع + ع + ق = ۴  
(۱۱) ی ع + ما ۲ ی ع لا + ما ۲ ی ق لا + ما ۲ لا = ۰  
(۱۲) ی ع ما = لا (ما + ی ق) (۱۳) ع ی + ق ی = ع ق

$$(۱۴) (۱ - ی - ع - لا - ق) (۱ - لا - ق) = ۱ - لا - ق - ی - ع - ی - لا - ق$$

(۱۵)  $ع + ق = ع ق$  کے عام تکملہ کی وہ مخصوص صورت معلوم کرو جو ان سطحوں کے لفاف کو تعبیر کرے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں اور نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتے ہیں۔

(۱۶) ثابت کرو کہ اگر مساوات  $ف + لا + ق + فرما + س + فری = ۰$  تکمل پذیر ہو تو اس سے سطحوں کا ایک ایسا قبیل تعبیر ہو گا جو

$$ف + ع + ق + ق = ۰$$

سے تعبیر شدہ قبیل کے علی القوائم ہو گا۔

اس سے یہ قبیل معلوم کرو جو

$$ف + ع + ق + ق = ۰$$

کے علی القوائم ہے۔

(۱۷) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے حماس مستوی سب کے سب مبدا

میں سے گزریں۔

(۱۸) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے عماد سب کے سب دائرہ

$$لا + ما = ۱ - ی = ۰$$

کو قطع کریں۔

(۱۹) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے حماس مستوی محدودوں کے سطحوں کے

ساتھ مل کر مستقل حجم کا ایک ذوار بقعہ اسطوح بنائیں۔

(۲۰) ثابت کرو کہ ایسی کوئی غیر کشاد پذیر (Non-developable) سطح نہیں

کہ ہر حماس مستوی محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرے جن کا جنری مجموعہ صفر ہو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر دو درجہ  $لا + ما = ۲ - ی$  کے لحاظ سے دو سطحیں

قطبی متکافی ہوں اور اگر  $(لا، ما، ی)$ ،  $(لا، ما، ی)$  دو ایسے نظیری نقطے

(ایک ایک سطح میں، دوسرا دوسری سطح میں) ہوں کہ ان میں سے کسی ایک

نقطہ پر حماس مستوی، دوسرے کا قطبی مستوی ہو تو

$$لا = ع، ما = ق، ی = ع + لا + ق، ی = لا، ف = ۱ - ق$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر ایک سطح مساوات

$$ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰$$

کو پورا کرے تو دوسری سطح مساوات

$$ن (ف، ق، ف، لا، ق، ما، ع، لا، ما) = ۰$$

کو پورا کرے گی۔

[ہم کہتے ہیں کہ یہ مساواتیں ایک دوسرے سے تنوید کے اصول سے اخذ پذیر ہیں]

(۲۲) ثابت کرو کہ وہ مساوات جو

$$ی = ع + لا + ق + ما + ع + ق$$

سے تنوید کے اصول سے ماخوذ ہوتی ہے

$$۰ = ع + لا + ما$$

ہے جس سے

$$لا = ف = \frac{جف}{جف} = - ما، ما = ق = - لا،$$

اور  $ی = ف + لا + ق + ما = ع + لا + ما$  حاصل ہوتے ہیں۔

اس سے (پہلی مساوات کے ایک تکملہ کے طور پر)  $ی = - لا + ما$  اخذ کرو۔

(۲۳) ایک جزئی تفرقی مساوات کے ذریعہ مساوات

$$لا + ما + ی = ن (لا + ما + ی)$$

سے اختیاری تفاعل ساقط کرو۔

[لا اور ما کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرنے سے

$$ع + ا = ف (لا + ما + ی) \{ (۲ + لا + ی) (۲ + ع) \}$$

$$اور \quad ق + ا = ف (لا + ما + ی) \{ (۲ + ما + ق) (۲ + ق) \}$$

$$اس لیے (ع + ا) (ما + ی + ق) = (ق + ا) (ق + لا + ی + ع)$$

یا  $(۱-۱) + (۱-۱) = ۱-۱$  [  $(۲۳)$  مثال  $(۲۳)$  کا طریقہ صفحہ ۳۴۹ کی مثالوں کے حلوں کی تصدیق کرنے میں استعمال کرو۔

$(۲۵)$  حسب ذیل جزئی تفرقی مساواتوں کے خاص تکمیلے معلوم کرو جو دئے ہوئے نغینوں میں سے گزرنے والی سطحوں کو تعبیر کریں :-

(۱)  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

(۲)  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

(۳)  $(۱-۱) + (۱-۱) = ۱-۱$  ،  $۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

(۴)  $(۱-۱) + (۱-۱) = ۱-۱$  ،  $۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

(۵)  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

(۶)  $(۱-۱) + (۱-۱) = ۱-۱$  ،  $۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

$۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$

[ لا 'ما' ی کو منحنی کی دو مساواتوں اور ذیلی مساواتوں کے دو غیر تابع تکملوں  $(۱-۱) = (۱-۱)$  و  $(۱-۱) = (۱-۱)$  سے باقی رہ کر اس سے ۱ اور ۱ میں ایک رشتہ لے گا۔ اور بجا آئے  $(۱-۱)$  اور ب کی بجائے  $(۱-۱)$  رکھو تو مطلوبہ تکملہ حاصل ہوگا۔ مثلاً (آ) کے لیے  $(۱-۱) = (۱-۱)$  و  $(۱-۱) = (۱-۱)$  ]

$۱ = ۱ + ۱ = ۱$  (دیکھو صفحہ ۲۹۲)

ان سے اور منحنی کی مساواتوں  $۱ = ۱$  ،  $۱ = ۱$  سے ۱ = ۱

اور  $۱ = ۱ + ۱ = ۱$  اور اس لیے  $(۱-۱) = (۱-۱)$  اور ب کی بجائے  $(۱-۱)$  رکھو تو تکملہ

$(۱-۱) = (۱-۱)$

حاصل ہوگا۔

تفرقی مساوتیں۔ باب ۲۰ پہلے رتبہ کی فزنی تفرقی مساوتیں مخصوص طریقے

اسی طرح (۲) (۳) اور (۴) کے لیے عمل کرو۔ (۵) اور (۶) میں ہم لا، ما، ی ت کو پانچ مساواتوں سے ساقط کرتے ہیں۔

جواب :-

$$(۲) \text{ ما ی} = (لا + ما)^۲$$

$$(۳) ۵ (لا + ما + ی) = (لا + ما + ی)۲$$

$$(۴) (لا + ما + ی)۳ = ۲ لا لا ی$$

$$(۵) (لا + ما) = ۳ ما ی$$

$$(۶) لا - لا ما = ی - ی ما ی$$



(۱۶۲)

## تیسرا باب

### پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ عام طریقہ

۱۳۷۔ اب ہم چارپی اور جیکوبی کے طریقوں کی وضاحت کریں گے۔

چارپی کے طریقہ میں دو متبوع متغیروں والی مساواتوں سے بحث کی جاتی ہے اور جیکوبی کا طریقہ متعدد متبوع متغیروں والی مساواتوں کے لیے ہے۔ جیکوبی کے طریقہ سے فطرتاً ہی ہم ہمزاد جزئی تفرقی مساواتوں کی بحث پر پہنچتے ہیں۔

اس باب کے طریقہ پچھلے باب کے طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ پیچیدہ اور دقیق ہیں۔ اس لیے ہم ان کو ان کی سادہ ترین شکل میں پیش کریں گے اور متعدد امثلة کو صرف سرسری ذکر کریں گے اگرچہ کہ ان پر بہت کچھ لکھا جاسکتا ہے۔

۱۳۸۔ چارپی کا طریقہ ۱۳۷۔ دفعہ ۱۳۱ میں ہم نے مساوات

۱۳۵ یہ طریقہ کچھ لگراچ سے منسوب ہے لیکن چارپی نے اس کی تکمیل کی۔ چارپی کا مقالہ پیارس اکاڈمی آف سائنس کو ۱۸۷۷ء میں پیش کیا گیا لیکن اس کے کچھ عرصہ کے بعد ہی مصنف کا انتقال ہوا اور یہ مقالہ نہ چھپا۔



تفرقی مساواتیں - باب ۱۱ ۳۲۲ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی - مساواتیں - عام نمونہ

(۱) ع - ۳ لا<sup>۲</sup> = ق<sup>۲</sup> - ما<sup>۲</sup> ..... (۱)  
کو ایک زائد تہائی مساوات

(۲) ع - ۲ لا<sup>۲</sup> = ق<sup>۲</sup> - ما<sup>۲</sup> ..... (۲)  
استعمال کر کے حل کیا، ع اور ق کو لا اور ما کی رقوم میں حل کر کے ان کی قیمتوں کو

(۳) فری = ع فر لا + ق فر ما ..... (۳)  
میں درج کیا جس سے یہ مساوات تکمیل پذیر ہو جاتی ہے اگر اس کو تین متغیروں لا، ما، ی میں ایک معمولی تفرقی مساوات سمجھا جائے۔  
اب ہم کچھ اس کے مشابہ طریقہ پہلے رتبہ اور دو متبوع متغیروں والی عام جزئی تفرقی مساوات

قا (لا، ما، ی، ع، ق) = ..... (۴)  
پر استعمال کریں گے۔

ہمیں ایک دوسری مساوات

ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ..... (۵)  
ایسی معلوم کرنی چاہئے کہ ع اور ق کو (۴) اور (۵) سے لا، ما، ی کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جاسکے جو (۳) کو تکمیل پذیر بنادیں۔  
وہ ضروری اور کافی شرط کہ (۳) تکمیل پذیر ہو یہ ہے کہ

$$ف = \left( \frac{جف ق}{جف ی} - \frac{جف س}{جف لا} \right) + \left( \frac{جف ق}{جف ما} - \frac{جف س}{جف ی} \right)$$

$$+ \left( \frac{جف ف}{جف لا} - \frac{جف ق}{جف ی} \right) = \dots (مشابہ)$$

جہاں ع = ق = ق = ق = س = ا

یعنی ع جف ق - ق جف ع - جف ق + جف ع = ..... (۶)  
ما اور ی کو مستقل رکھ کر لیکن ع اور ق کو لا، ما، ی کے وہ تفاعل



یعنی  $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف م}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ن}}$

$$+ \left( \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف م}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ن}} \right) + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}$$

$$+ \left( \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف م}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ن}} \right) = \dots \dots \dots (۱۳)$$

یہ اس شکل کی ایک خطی مساوات ہے جس پر دفعہ ۱۲۶ میں غور کیا گیا تھا 'اس میں لا، ما، می، ع، ق متبوع متغیر ہیں اور ف تابع متغیر -  
متناظر ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر می}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ق}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر م}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ن}}{\text{جف فا}}$$

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر می}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ق}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر م}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{جف فا}} = \frac{\text{فر ن}}{\text{جف فا}} = \dots \dots \dots (۱۴)$$

اگر ان مساواتوں کا کوئی تکملہ معلوم ہو سکے جس میں ع یا ق یا ن یا دو نوں شامل ہوں تو اس تکملہ کو زائد تفرقی مساوات (۵) کے طور پر لیا جاسکتا ہے اور پھر اس مساوات اور مساوات (۴) سے ع اور ق حاصل ہوتے ہیں جن سے مساوات (۳) تکمیل پذیر ہو جاتی ہے۔ اس سے (۴) کا کامل تکملہ حاصل ہوگا جس سے عام اور نادر تکملے معمولی طریقہ پر اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

۱۳۹۔ اس طریقہ کا استعمال حسب ذیل مثال سے واضح ہوگا:

$$۲ \text{ لای} - \text{ع لا} - ۲ \text{ ق لا} + \text{ما} + \text{ع ق} = \dots \dots \dots (۱)$$

اس مساوات کی دائیں جانب کے جملہ کو ف الیکر کھیلے دفعہ کی ہمزاد مساواتوں (۱۴) میں اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

تفرقی مساواتیں۔ باب ۳ ۳۲۵ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں عام طور پر

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرق}} = \frac{\text{ق}}{\text{ق} - \text{لا}^2} = \frac{\text{ع} + \text{لا}^2 + \text{لا}^2 \text{ما} - \text{ق}^2}{\text{ق}^2 - \text{ع}^2} = \frac{\text{فری}}{\text{فرق}}$$

جس کا ایک تکملہ  $\text{ق} = 1$  ..... (۲) ہے۔

$$\frac{\text{لا}^2 (\text{ی} - \text{لا}^2 \text{ما})}{\text{لا}^2 - 1} = \text{ع} \quad (۱) \text{ اور } (۲) \text{ سے}$$

$$\text{اس لیے فری} = \text{ع} + \text{فرلا} + \text{ق} + \text{فرما} = \frac{\text{لا}^2 (\text{ی} - \text{لا}^2 \text{ما})}{\text{لا}^2 - 1} + \text{فرما}$$

$$\frac{\text{فری} - \text{فرما}}{\text{ی} - \text{لا}^2 \text{ما}} = \frac{\text{لا}^2 \text{فرلا}}{\text{لا}^2 - 1} \quad \text{یعنی}$$

$$\text{ی} = \text{لا}^2 \text{ما} + \text{ب} (\text{لا}^2 - 1) \quad \text{یعنی}$$

یہ کامل تکملہ ہے۔ اس سے نادر مل  
 $\text{ی} = \text{لا}^2 \text{ما}$

اخذ کرنا آسان ہے۔

کامل تکملہ کی شکل سے ظاہر ہے کہ (۱) کو استعمال

$$\text{ف} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{ی} = \text{ف لا} + \text{ق ما} - \text{ف ق}$$

سے شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جو ایک معیاری شکل کی ایک مخصوص صورت ہے۔ مساواتیں جو چارہلی کے طریقہ سے حل ہوسکتی ہیں اکثر کسی ایسے ہی استعمال سے زیادہ آسانی کے ساتھ حل کی جاسکتی ہیں۔

حل طلب مثالیں



تفاعلوں کے طور پر حاصل ہو سکیں اور یہ تفاعل

فرمی = ع<sub>۱</sub> فرلا + ع<sub>۲</sub> فرلا + ع<sub>۳</sub> فرلا ..... (۴)

$$\frac{\text{جف}^1 \text{ع}^1}{\text{جف}^1 \text{لا}^1} = \frac{\text{جف}^2 \text{ع}^2}{\text{جف}^2 \text{لا}^2} = \frac{\text{جف}^3 \text{ع}^3}{\text{جف}^3 \text{لا}^3} = \frac{\text{جف}^4 \text{ع}^4}{\text{جف}^4 \text{لا}^4} = \dots \dots \dots (5)$$

اب لا اور لا کو مستقل رکھ کر لیکن ع، ع، ع کو لا، لا، لا کے وہ تفاعل سمجھ کر جو (۱)، (۲)، (۳) کو حل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں (۱) کو لا کے لحاظ سے جزئی طور پر تفریق کر دو تو

$$\begin{aligned} & \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}} \\ & = \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

(144)

← (6) و (7)

$$\frac{\text{جف (فا، فا،)} }{\text{جف (لا، لا، ع، ع،)}} + \frac{\text{جف (فا، فا،)} }{\text{جف (ع، ع،)}} + \frac{\text{جف (فا، فا،)} }{\text{جف (لا، لا،)}} + \dots (8)$$











۳۳۲ پہلے رتبہ کی خبرنی تفرقی مساواتیں۔ عام طرحی

$$(4) \dots\dots\dots \gamma_1 = \gamma_2 - \gamma_3 \equiv \gamma_6$$

ہیں۔

۱، ۲، ۳ میں سے کوئی دو قوت نہیں۔ آسانی سے اس کا دست ہونا

معلوم ہو جاتا ہے۔

(۵) (۶) (۷) (۸) کو حل کرنے سے

$$p - \varepsilon = \varepsilon \sqrt{\frac{(p + \frac{1}{2})}{(p + \frac{1}{2})}} \pm p = \varepsilon \sqrt{\frac{p}{p}} = \varepsilon \sqrt{1} = \varepsilon$$

اس لیے  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  (فرل - فرل)

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2} \{ (l_1 + l_2) \}} \quad (\text{فرلایم} - \text{فرلایم})$$

معنی

$$1 + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

(۱۶۸) اِس لیے  $e = 0$  سے جیکہ  $\lambda$  کی بجائے  $y$ ،  $\frac{1}{\lambda}$  کی بجائے  $(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$

کی بجائے  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{3}$  کی بجائے  $\frac{1}{4}$  رکھا جائے

$$= \frac{1}{r} + \left\{ \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \right\} \pm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} + \text{لوک}$$

جو (۴) کا کامل سیکمہ ہے -



تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱: ۳۳۴ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ عام طریقہ

(فا، فام) = ۰ = (فا، فام)  
ذیلی مساواتیں جو جیکوبی کے عمل کے ذریعہ فاسے ماخوذ ہوتی ہیں  
حسب ذیل ہیں:

$$\frac{فرلا_۱}{ع_۱} = \frac{فرلا_۲}{ع_۲} = \frac{فرلا_۳}{ع_۳} = \frac{فرلا_۴}{ع_۴} = \frac{فرلا_۵}{ع_۵} = \frac{فرلا_۶}{ع_۶}$$

اس کا ایک تکملہ  $ع_۱ = ۱$  ... (۳)

ہے۔ ہم فام کو  $ع_۱$  لے سکتے ہیں کیونکہ اس سے شرط (فا، فام) = ۰ = (فا، فام)  
پوری ہوتی ہے۔

$$(۱) (۲) (۳) \text{ کو حل کرنے اور فری} = ع_۱ فرلا_۱ + ع_۲ فرلا_۲$$

+  $ع_۳ فرلا_۳$  میں اندراج کرنے سے

$$\text{فری} = ۱ فرلا_۱ - ۱ لا_۱ فرلا_۲ + ۱ لا_۲ فرلا_۳$$

اس لیے

$$۱ = ۱ (لا_۱ - لوک لا_۲ - لا_۳) + ب$$

$$\text{مثال (۲) } فا = ع_۱ لا_۱ + ع_۲ لا_۲ - ع_۳ = ۰ \dots \dots (۴)$$

$$فا = ع_۱ - ع_۲ + ع_۳ - ۱ = ۰ \dots \dots (۵)$$

$$\text{یہاں } (فا، فام) = ع_۱ + ع_۲ - (۱ - ع_۳) = ع_۱ - ع_۲$$

اس کو محذوم ہونا چاہئے اگر فری کے لئے جو جملہ ہے وہ تکمیل پذیر ہے۔

اس لیے زائد مساوات

$$ع_۱ - ع_۲ = ۰ \dots \dots (۶)$$

حاصل ہوتی ہے۔

(۴)، (۵)، (۶) کو حل کرنے اور اندراج کرنے سے

$$\text{فری} = \frac{\text{فر لا}_1 + \text{فر لا}_2}{\text{لا}_1 + \text{لا}_2} + \text{فر لا}_3$$

اس لیے می = لوک (لا + لا) + لا + ۱

(۱۶۹) اس نمونہ کی مثالوں میں ذیلی مساواتوں کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔ نتیجہ میں صرف ایک اختیاری مستقل ہے حالانکہ مثال (۱) کے نتیجہ میں دو حاصل ہو گئے تھے۔

مثال (۳) - فا = لا + لا + ع = ۰ ..... (۷)

فا = ع + ع + لا = ۰ ..... (۸)

یہاں (فا، فا) = لا + لا + لا - لا - لا

اب چونکہ لا، لا، لا متبوع متغیر ہیں اس لیے (فا، فا) ہمیشہ صفر نہیں ہو سکتا۔ اس لیے ان مساواتوں سے فری کے لیے ایک تکمیل پذیر جملہ حاصل نہیں ہو سکتا کیونکہ ان میں کوئی اسکندہ مشترک نہیں ہے۔

مثال (۴) فا = ع + ع + ع - لا - لا - لا = ۰ ..... (۹)

فا = لا - لا - لا - لا + لا + لا = ۰ ..... (۱۰)

فا = ع - لا - لا = ۰ ..... (۱۱)

(۹)، (۱۰)، (۱۱) کو حل کرنے اور فری کے جملہ میں اندراج کرنے سے

$$\text{فری} = (\text{لا} + \text{لا}) \text{فر لا}_1 + (\text{لا} + \text{لا}) \text{فر لا}_2 + \text{لا} \text{فر لا}_3$$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۳ ۳۳۶ پہلے تیبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ عام طریقہ

اس لیے  $ی = لا_1 + لا_2 + لا_3 + لا_4 + لا_5 + لا_6$   
 اس دفعہ (فا، فا)، (فا، فا)، (فا، فا) کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑی۔

مثال (۵)  $فا = ع_1 + ع_2 - ۱ - لا_1 = ۰ \dots \dots (۱۲)$

$فا = ع_1 + ع_2 - لا_1 - لا_2 = ۰ \dots \dots (۱۳)$

$فا = ع_1 + ع_2 - ۱ - لا_1 = ۰ \dots \dots (۱۴)$

ان سے فری =  $لا_1 فر + لا_2 فر + لا_3 فر + لا_4 فر + لا_5 فر$  حاصل ہوتا ہے۔  
 چونکہ اس کو بحمل نہیں کیا جاسکتا اس لیے ہمزاد مساواتوں میں کوئی مشترک تنکملہ نہیں ہے۔

مثال (۶)  $فا = لا_1 ع_1 - لا_2 ع_2 + ع_3 - ع_4 = ۰ \dots \dots (۱۵)$

$فا = ع_1 + ع_2 - لا_1 - لا_2 = ۰ \dots \dots (۱۶)$

یہاں (فا، فا) =  $ع_1 - لا_1 (۱) - ع_2 + لا_2 (۱) = ع_1 - ع_2 + لا_2 - لا_1$

مثال (۲) کی طرح اس سے نئی مساوات

$فا = ع_1 - ع_2 + لا_1 - لا_2 = ۰ \dots \dots (۱۷)$

حاصل ہوتی ہے۔

اب (فا، فا) =  $ع_1 - لا_1 ع_2 + (۱) لا_2 + (۱) لا_1 = ع_1 - ع_2 + لا_2 + لا_1 = ۰$

اور (فا، فا) =  $(۱) - (۱) + (۱) - (۱) = ۰$

اس لیے اس طریقہ سے کوئی اور مساواتیں نہیں حاصل ہو سکتیں  
 فا سے ماخوذ ذیلی مساواتیں حسب ذیل ہیں:





ی = لا<sub>۱</sub> لا<sub>۲</sub> + سا (لا<sub>۳</sub> + لا<sub>۴</sub>)  
 ہے جس میں سا (لا<sub>۱</sub> + لا<sub>۲</sub>) ایک اختیاری تفاعل ہے۔ دوسرے طریقہ سے  
 حاصل شدہ کامل تکملہ ایک مخصوص صورت کے طور پر اس عام تکملہ میں شامل  
 ہے۔ عام تکملہ کو کامل تکملہ سے حسب دفعہ ۱۳۴ حاصل کیا جاسکتا تھا۔

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل ہمزاد مساواتوں کے مشترک کامل تکملے (اگر موجود ہوں) معلوم کرو:

$$(۱) \quad ع_۱ + ع_۲ - ۸ (لا_۱ + لا_۲) = ۰$$

$$= (ع_۱ - ع_۲) (لا_۱ - لا_۲) + ع_۳ لا_۳ - ۱$$

$$(۲) \quad لا_۱ ع_۲ ع_۳ = لا_۲ ع_۱ ع_۳ = لا_۳ ع_۱ ع_۲ = ۱$$

$$(۳) \quad ع_۱ ع_۲ ع_۳ - ۸ لا_۱ لا_۲ لا_۳ = ۰$$

$$= ع_۱ + ع_۲ - لا_۱^۲ - لا_۲^۲ - لا_۳^۲$$

$$(۴) \quad لا_۱ لا_۲ ع_۱ ع_۲ - لا_۳ ع_۳ = ۰$$

$$= ع_۱ - ع_۲$$

$$(۵) \quad ع_۱ لا_۱ + ع_۲ لا_۲ = ۰$$

$$= ع_۱ لا_۱^۲ + ع_۲ لا_۲^۲$$

$$(۶) \quad ع_۱^۲ + ع_۲^۲ + ع_۳^۲ + لا_۱^۲ + لا_۲^۲ + لا_۳^۲ = ۰$$

$$= ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ - لا_۱$$

$$(۷) \quad ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۱ ع_۲ + ع_۱ ع_۳ + ع_۲ ع_۳ = ۰$$



تفرقی مساواتیں۔ باب ۳۴۰ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں عام طریقے

میں خطی اور تجانس ہو اور ان کا ایک مشترک تکملہ

$$y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots$$

ہو جہاں  $x_1, x_2, \dots$  وغیرہ  $x_1, x_2, \dots$  کے تفاعل ہیں تو ایک عام تکملہ

$$y = (x_1^2 + x_2^2 + \dots)$$

ہے۔

ہمزاد مساواتوں

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

کا ایک عام تکملہ معلوم کرو۔

(۱۱) اگر  $x_1, x_2, x_3$  متبوع متغیروں  $x_1, x_2, x_3$  کے تفاعل ہو

جو ہمزاد مساواتوں

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

کو پورا کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \left( \frac{x_1^2}{x_2^2 + x_3^2} - \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_3^2} \right) \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2} = 0$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر ان ہمزاد مساواتوں کو جزئی تفرقی مساواتیں

سمجھا جائے اور اگر ان کا ایک مشترک تکملہ ہو تو  $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0$  ایک ضروری

شرط ہے لیکن وہ کافی نہیں ہے۔

ہمزاد مساواتوں کے حسب ذیل جوڑوں کا امتحان کرو:

$$(1) x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$x_1^2 = (x_2^2 + x_3^2) - 1 = 0$$

[ یہاں جف (فا، فا) = متماثلًا، اور مساواتوں کو ع اور ع کے لیے حل نہیں کیا جاسکتا۔ ]  
 جف (ع، ع)  
 (۲) فا = ع - ع = ۰

$$فا = ع + ع + لا + لا = ۰$$

[ یہاں (فا، فا) اور جف (ع، ع) دونوں ایسے تفاعل ہو جاتے ہیں جو ع، ع کی بجائے ان کی قیمتیں لا، اور لا کی رقوم میں رکھنے پر معدوم ہوتے ہیں۔ کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔ ]

$$(۳) فا = ع - ع + لا = ۰$$

$$فا = ع + ع + لا + لا = ۰$$

[ ان کا ایک مشترک تکملہ ہے اگرچہ جف (فا، فا) ایک ایسا تفاعل ہو جاتا ہے جو ع، اور ع کی بجائے ان کی قیمتیں رکھنے پر معدوم ہوتا ہے۔ ]

### چار پی کے طریقہ پر نوٹ: (صفحات ۳۲ تا ۳۲)

بعض اوقات ہم ایک مساوات ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ معلوم کر سکیں گے جو ذیلی مساواتوں (۱۴) کا نہیں بلکہ ان سادہ تر مساواتوں کا ایک تکملہ ہوگی جو ذیلی مساواتوں سے ابتدائی تفرقی مساوات (۴) کو استعمال کر کے حاصل کی گئی ہوں۔ یہ (۱۴) کو متماثلًا نہیں بلکہ (۴) کی وجہ سے پورا کرے گی اور (۴) کے ساتھ مل کر (۳) کو مکمل بنادیں

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱ ۳۴۲ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ عام طریقہ

بنادیکھی۔ مثلاً مثال ۲ دفعہ ۱۳۹ میں ع ی = ۱ ایک تکملہ ،  

$$\frac{\text{فرع}}{\text{ما ع}^۳} = \frac{\text{فری}}{\text{ما ی ح}^۲} - \text{کا نہیں بلکہ}$$
  

$$\frac{\text{فری}}{\text{ما ی ع}^۲ + \text{ق}} = \frac{\text{فرع}}{\text{ما ع}^۳}$$
  
 کا ہے جس سے بالآخر وہ نتیجہ حاصل ہوگا جو دفعہ ۱۳۹ کے جوابات میں مندرج ہے  
 اسی طرح جیکو بی کے طریقہ کے لئے بھی یہ بات صادق آتی ہے۔



## چودہواں باب

(۱۰۲) دوسرا درجہ سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی مساواتیں

۱۴۳۔ ہم اول چند سادہ مثالیں لیں گے جن کو صرف معائنہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے بعد خطی جزئی تفرقی مساواتوں پر جن کے مستقل ہوں بحث کی جائے گی، ان میں وہ طریقے استعمال کئے جائیں گے جو ان طریقوں کے مشابہ ہوں گے جن کو معمولی خطی مساواتوں کے لیے جن کے مستقل تھے استعمال کیا گیا تھا۔ باب کا باقی حصہ زیادہ مشکل مضمون منونگے کے طریقوں کے لیے وقف ہو گا۔ امید ہے کہ طالب علم اس کے مطالعہ کے بعد مشاہدوں کو عمل کرنے کے قابل ہو گا اور طریقہ کی صحت کا اس کو یقین ہو جائے گا لیکن ہم نظریہ پر بحث کرنے کی کوشش نہیں کریں گے۔

متعدد مثالوں میں ان اختیاری تفاضلوں کو متعین کرنے کی ضرورت پڑے گی جو ہندسی شرطوں کی وجہ سے حلوں میں شریک ہوتے ہیں۔

۱۴۴۔ پروفیسر گلیا سپرڈیونگ (بین، ۱۸۱۱ء تا ۱۸۸۱ء) علم ہندسہ بیانہ کا بانی تھا۔

اس نے تفرقی مساواتوں کو ہندسہ محسبات کے حوالوں میں استعمال کیا۔

۱۴۵۔ اگر اس نظریہ کے مطالعہ کا شوق ہو تو دیکھو گرسا کی کتاب 'Sur l'integration

des equations aux derivees partielles du second ordre

۱۴۶۔ فراسٹ کی سالیڈ جیو مٹری سے استفادہ کیا جاسکتا ہے۔

متفرق مثالوں میں جو باب کے ختم پر دی گئی ہیں بعض اہم تفرقی مساواتیں جو دو ریوں، ڈیٹاؤں، جھلیوں وغیرہ کے ارتعاشوں کے نظریہ میں وقوع پذیر ہوتی ہیں شریک ہیں۔ اس باب میں دوسرے جزئی تفرقی سروں  $\frac{جف^۲ ی}{جف لا^۲}$ ،  $\frac{جف^۲ ی}{جف لا جف ما}$ ،  $\frac{جف^۲ ی}{جف ما^۲}$  کو علی الترتیب ر، س، ت سے تعبیر کیا جائے گا۔

۱۴۴۔ مساواتیں جن کو معائنہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱)  $س = لا^۲ + ما^۲$   
لا کے لحاظ سے (ما کو مستقل رکھ کر) تکمل کرنے سے  
 $ق = لا^۲ + لا^۲ + ما^۲ + ف (ما)$   
اسی طرح ما کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

$ی = لا^۲ + لا^۲ + ف (ما) + ف (لا)$   
فرض کرو  $ی = لا^۲ + لا^۲ + ف (لا) + ف (ما)$   
مثال (۲) وہ سطح معلوم کرو جو مکافیوں

(۱۴۳)

$ی = ۰، ما^۲ = لا اور ی = ۱، ما^۲ = - لا$   
میں سے گذرے اور  $لا + ع = ۰$   
کو پورا کرے۔

تفرقی مساوات ہے

$$لا = ع + \frac{جف ع}{جف لا}$$

جس سے  $لا ع = ف (ما)$

$$ع = \frac{۱}{لا} ف (ما)$$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱

۳۴۵ دو اور اس سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں

$$y = -\frac{1}{11}f(m) + f(a)$$

تفاضلوں  $f$  اور  $f(a)$  کو ہندسی شرطوں سے متعین کرنا ہے۔

$$y = 0 \text{ اور } 1 = \frac{m}{14} \text{ رکھنے سے}$$

$$0 = -\frac{14}{14}f(m) + f(a)$$

$$1 = \frac{14}{14}f(m) + f(a) \quad \text{اسی طرح}$$

$$f(a) = \frac{1}{2}f(m) \quad \text{اس لیے}$$

$$y = \frac{m}{11} - \frac{1}{2} \quad \text{اور}$$

$$14 = 14 - 14 = 0 \quad \text{یعنی}$$

جو ایک محزوطی نام ہے۔

حل طلب مثالیں

$$(1) \quad 1 = 6 \quad (2) \quad 1 = 6 \quad (3) \quad 1 = 6$$

$$(4) \quad 1 = 6 \quad (5) \quad 1 = 6 \quad (6) \quad 1 = 6$$

$$(7) \quad 1 = 6 \quad (8) \quad 1 = 6 \quad (9) \quad 1 = 6$$

$$(10) \quad 1 = 6 \quad (11) \quad 1 = 6 \quad (12) \quad 1 = 6$$

$$(13) \quad 1 = 6 \quad (14) \quad 1 = 6 \quad (15) \quad 1 = 6$$

$$y = 0 = 1 - 1$$

میں سے گزرے۔

$$(16) \quad 1 = 6 \quad (17) \quad 1 = 6 \quad (18) \quad 1 = 6$$



کو پورا کرے -  
(۹) وہ گردشیں سطح معلوم کرو جو ی = کو مس کرے اور  
 $r = 12a^2 + 4a^2$

کو پورا کرے -  
(۱۰) وہ سطح معلوم کرو جو ت = ۶ لا۳ کو پورا کرے اور دو خطوط  
ما = ۰ = ی، ما = ۱ = ی

میں سے گزرے -  
۱۴۵ - مستقل سروں والی متجانس خطی مساواتیں -  
تیسرے باب میں ہم نے مساوات

(عف<sup>۱</sup> + عف<sup>۲</sup> + عف<sup>۳</sup> + ... + عف<sup>۱۱</sup>) = ف (لا) ... (۱)

پر ذرا تفصیل سے بحث کی ہے جس میں عف = فر لا ہے -

اب ہم دو متبوع متغیروں کی متناظر مساوات

(۱۴۴)

(عف<sup>۱</sup> + عف<sup>۲</sup> + عف<sup>۳</sup> + عف<sup>۴</sup> + ... + عف<sup>۱۱</sup>) = ف (لا۳)

= ف (لا۳) ... (۲)

پہاں عف = فر لا اور عف = فر ما اختصاراً بحث کریں گے -

سادہ ترین صورت (عف - م عف) = ی = ۰

ع - م ق = ۰

ف (ی، ما + م لا) = ۰

ی = ف (ما + م لا)

یعنی  
ہے جس کا حل

یعنی

ہے -

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۲ ۳۴۷ دو اور اس سے اعلیٰ درجوں کی خبری تفرقی مساواتیں

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (اور اس کی آسانی سے تصدیق ہو جاتی ہے) (۲) کا حل

ی = ف<sub>۱</sub>(م + م<sub>۱</sub> لا) + ف<sub>۲</sub>(م + م<sub>۲</sub> لا) + ... + ف<sub>n</sub>(م + م<sub>n</sub> لا)  
ہے اگر ف (لا، م) = ۰ جہاں م، م<sub>۱</sub>، م<sub>۲</sub>، ...، م<sub>n</sub> مساوات

$$م + م_1 م^{-1} + م_2 م^{-2} + \dots + م_n م^{-n} = 0$$

کی اصلیں ہیں اور یہ تمام اصلیں مختلف ہیں۔

مثال -  $\frac{\text{جف}^3 \text{ ی}}{\text{جف}^3 \text{ لا}} - \frac{\text{جف}^3 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا جف م}} + \frac{\text{جف}^3 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا جف م}} = 0$

یعنی  $(\text{عف}^3 - \text{عف}^2 \text{ عف}^2 + \text{عف}^2 \text{ عف}^2) \text{ ی} = 0$

$\text{م}^3 - \text{م}^2 \text{ م} + \text{م}^2 \text{ م} = 0$  کی اصلیں ۲، ۱، ۰ ہیں۔

اس لیے  $\text{ی} = \text{ف}_1(\text{م}) + \text{ف}_2(\text{م} + \text{لا}) + \text{ف}_3(\text{م} + \text{لا} + \text{لا}^2)$

## حل طلب مثالیں

(۱)  $(\text{عف}^3 - \text{عف}^2 \text{ عف}^2 + \text{عف}^2 \text{ عف}^2 - \text{عف}^2) \text{ ی} = 0$

(۲)  $۲ + ۵ \text{ س} + ۲ \text{ ت} = 0$

(۳)  $\frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} - \frac{\text{جف}^2 \text{ ی}}{\text{جف}^2 \text{ م}} = 0$

(۴) وہ سطح معلوم کرو جو  $\text{ر} + \text{س} = ۰$  کو پورا کرے اور ناقصی مکانی نما

$\text{ی} = ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ م}$  کو اس تراش پر مس کرے جو مستوی  $\text{ما} = ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ سے}$

منتقطع ہوتی ہے۔ [نوٹ: ان دو سطحوں کے لیے ع کی قیمتیں (اور نیز ق کی قیمتیں)  $\text{ما} = ۲ \text{ لا} + ۱$  پر کے کسی نقطہ کے لیے مساوی ہونی چاہئیں]

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۲ ۳۴۸ دو اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی دیکھیں

۱۴۶۔ وہ صورت جبکہ امدادی مساوات کی صلیں

مساوی ہوں۔

مساوات (عف۔ م عف) ی = ۰ ..... (۱) پر غور کرو۔

رکھو (عف۔ م عف) ی = ۰

تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے (عف۔ م عف) ۰ = ۰

جس سے ۰ = فا (ما + م لا)

اس لیے (عف۔ م عف) ی = فا (ما + م لا)

یا ع۔ م ق = فا (ما + م لا)

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{فا (ما + م لا)}} = \frac{\text{فرما}}{\text{م}} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

(۱۴۵) ہیں، ان سے

ما + م لا = ۱

فری۔ فا (۱) فرلا = ۰

ی۔ لا فا (ما + م لا) = ب

اس لیے عام مکملہ قہ (ی۔ لا فا (ما + م لا)) + ما + م لا = ۰

یا ی = لا فا (ما + م لا) + فا (ما + م لا)

ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عف۔ م عف) ی = ۰

ی = لا<sup>۰</sup> فا<sup>۱</sup> (ما + م لا) + لا<sup>۲</sup> فا<sup>۲</sup> (ما + م لا) + ..... + لا<sup>n</sup> فا<sup>n</sup> (ما + م لا)

ہے۔

## حل طلب مثالیں

(۱)  $(۴ \text{ عف}^۲ + ۱۲ \text{ عف} \text{ عف}^۲ + ۹ \text{ عف}^۳) = ی$

(۲)  $۲۵ ر - ۴۰ س + ۱۶ ت = ۰$

(۳)  $(\text{عف}^۳ - ۴ \text{ عف}^۲ \text{ عف}^۲ + ۴ \text{ عف} \text{ عف}^۲) = ی$

(۴) وہ سطح معلوم کرو جو دو خطوط  $ی = لا = ۰$ ،  $ی - ا = لا - ما = ۰$

میں سے گزرے اور  $ر - ۴ س + ۱۶ ت = ۰$  کو پورا کرے۔

۱۴۷۔ خاص تکملہ۔ اب ہم دفعہ ۱۴۵ کی مساوات

(۲) کی طرف رجوع ہوتے ہیں اور اس کو اختصاراً

فا (عف، عف)  $ی = ف (لا، ما)$

لکھتے ہیں۔

ہم تیسرے باب کی اتباع قدم بہ قدم کر کے ثابت کر سکتے ہیں کہ  $ی$  کی عام سے عام قیمت ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل (جو  $ی$  کی قیمت ہے جبکہ تفرقی مساوات میں  $ف (لا، ما)$  کی بجائے صفر رکھا گیا ہو) کا حاصل جمع ہے۔

خاص تکملہ کو  $\frac{۱}{فا (عف، عف)}$   $ف (لا، ما)$  لکھا جاسکتا ہے اور

ہم عف اور عف کے علامتی تفاعل کو اُسی طرح استعمال کر سکتے ہیں جس طرح ہم نے علامت عف کو استعمال کیا تھا یعنی اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں، جزئی کسور میں توڑ سکتے ہیں، یا ایک لامتناہی سلسلہ میں پھیلا سکتے ہیں۔

مثلاً  $\frac{۱}{عف^۲ - ۶ عف \text{ عف}^۲ + ۹ عف^۳} (۱۲ لا + ۳۶ لا ما)$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۲ ۳۵۰ دو اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی خبرنی تفرقی مساواتیں

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\text{عف}^2} \left( 1 - \frac{\text{عف}^3}{\text{عف}} \right) (12\text{لا} + 36\text{لا}^2) \\
 &= \frac{1}{\text{عف}^2} \left( 1 + \frac{\text{عف}^2}{\text{عف}} + \frac{\text{عف}^4}{\text{عف}^2} + \dots \right) (12\text{لا} + 36\text{لا}^2) \\
 &= \frac{1}{\text{عف}^2} (12\text{لا} + 36\text{لا}^2) + \frac{6}{\text{عف}} \times 36 \\
 &= \text{لا}^3 + 6\text{لا}^2 + 9\text{لا} = 10\text{لا} + 6\text{لا}^3 \\
 &\text{اس لیے (عف}^2 - 6\text{عف} + 9\text{عف}^2) \text{ی} = 12\text{لا} + 36\text{لا}^2 + 6\text{لا}^3 \\
 &\text{ی} = 10\text{لا} + 6\text{لا}^3 + 6\text{لا} + 3\text{لا} = 16\text{لا} + 6\text{لا}^3
 \end{aligned}$$

۴۔

### حل طلب مثالیں

$$(1) \quad (\text{عف}^2 - 2\text{عف} + \text{عف}^2) \text{ی} = 12\text{لا} + 6\text{لا}^3$$

$$(2) \quad (2\text{عف}^2 - 5\text{عف} + 2\text{عف}^2) \text{ی} = 24\text{لا} + 6\text{لا}^3$$

(۱۴۶)

(۳) لا اور ما کا ایک حقیقی تفاعل و معلوم کرد جو صفر میں تنویل ہو جبکہ ما = ۰ اور

$$24 = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^2} = 24$$

کو پورا کرے۔

۱۴۸۔ مختصر طریقے۔ جب 'ف' (لا، ما) لا + ب ما کا تفاعل

ہوتا ہے تو مختصر طریقے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔

اب 'ف' (لا + ب ما) = 'ف' (لا + ب ما)

$$\text{عف}^{\text{ن}} \text{فہ} (ا + لا + ب م) = ب \text{فہ} (ا + لا + ب م)$$

اس لیے فا (عف عف) فہ (ا + لا + ب م) = فا (ا + ب) فہ (ا + لا + ب م)  
 جہاں فہ<sup>(ن)</sup>، فہ کان والی مشتق تفاعل ہے اور ن، فا (عف عف) کا درجہ  
 اس کے بالعکس

$$\frac{ا}{\text{فا (عف عف)}^{\text{ن}} \text{فہ} (ا + لا + ب م)} = \frac{ا}{\text{فا (ا + ب)}^{\text{ن}} \text{فہ} (ا + لا + ب م)} \dots (۱)$$

بشرطیکہ فا (ا + ب) ≠ ۰، مثلاً

$$\frac{ا}{\text{عف}^۳ - ۴ \text{عف}^۲ \text{عف} + ۴ \text{عف} \text{عف}^۲ - ۳ \text{عف}^۳} = \frac{ا}{\text{عف}^۳ - ۴ \text{عف}^۲ \text{عف} + ۴ \text{عف} \text{عف}^۲ - ۳ \text{عف}^۳} \text{جب } (ا + لا + ب م)$$

$$= \frac{ا}{۳۲} \text{جب } (ا + لا + ب م)$$

کیونکہ فہ (ا + لا + ب م) کو جب (ا + لا + ب م) لیا جاسکتا ہے اگر

$$\text{فہ} (ا + لا + ب م) = \text{عف} (ا + لا + ب م)$$

اگر فا (ا + ب) = ۰ تو اس صورت میں ہم مساوات

(عف - م عف) ی = ع - م ق = لا سا (م + لا)  
 پر غور کرتے ہیں جس کا حل آسانی سے

$$ی = \frac{لا + ۱}{۱ + ر} سا (م + لا) + فہ (م + لا)$$

حاصل ہوتا ہے، اس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$\frac{ا}{\text{عف} - م \text{عف}} \times لا سا (م + لا) = \frac{ا}{۱ + ر} سا (م + لا)$$

$$\text{پس } \frac{ا}{\text{عف} - م \text{عف}} سا (م + لا)$$

$$\dots = \frac{1}{(عف - م عف) - ۱} \times لا سا (ما + م لا) =$$

$$= \frac{لاک}{ان} سا (ما + م لا) \dots \dots (ج)$$

مثلاً  $\frac{1}{عف^۲ - ۲ عف عف + عف^۲} مس (ما + لا) = \frac{1}{۳} لا مس (ما + لا)$

اور  $\frac{1}{عف^۲ - ۵ عف عف + ۴ عف^۲} جب (ما + لا)$

$$= \frac{1}{عف - م عف} \frac{1}{عف - عف} جب (ما + لا)$$

$$= \frac{1}{عف - م عف} \times \frac{1}{۳} اجم (ما + لا) (۱) سے$$

$$= - \frac{1}{۳} لا اجم (ما + لا) (ج) سے$$

**حل طلب مثالیں**

(۱۷۷)

(۱)  $(عف^۲ - ۲ عف عف + عف^۲) ی = ۵$

(۲)  $(عف^۲ - ۶ عف عف + ۹ عف^۲) ی = ۶ + لا + ما$

(۳)  $(عف^۳ - ۴ عف عف + ۴ عف عف^۲) ی = ۴ جب (ما + لا)$

(۴)  $\frac{۵ و}{و} = ۲ - س - ۳ ت$

(۵)  $۱۲ (ما + لا) = \frac{جف و}{جف لا} + \frac{جف و}{جف ما}$

(۶)  $۲ - ر - ۴ س + ت = ۱۶ لوک (ما + لا)$

۱۴۹۔ عام طریقہ۔ خاص تکملہ کو حاصل کرنے کا ایک عام طریقہ

معلوم کرنے کے لیے مساوات  
(عف - م عف) ی = ع - م ق = ف (لا، ما)  
پر غور کرو۔

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{م}} = \frac{\text{ف (لا، ما)}}{\text{م}}$$

ہیں جن کا ایک تکملہ  $\text{ما} + \text{م لا} = \text{ج}$  ہے۔  
اس تکملہ کو دوسرا تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کرنے سے  
فری = ف (لا، ج - م لا) فرلا

$$\text{ی} = \text{م ف (لا، ج - م لا) فرلا} + \text{مستقل}$$

جہاں تکمل کے بعد ج کی بجائے  $\text{ما} + \text{م لا}$  رکھنا ہوگا۔

$$\text{پس ہم عف - م عف} \times \text{ف (لا، ما) کو}$$

م ف (لا، ج - م لا) فرلا لے سکتے ہیں جہاں تکمل کے بعد  
ج کی بجائے  $\text{ما} + \text{م لا}$  رکھنا ہوگا۔

$$\text{مثال - (عف - عف ۲) (عف + عف) ی = (ما - ۱) فو}$$

$$\text{یہاں م ف (لا، ج - م لا) فرلا = م ف (ج - ۲ لا - ۱) فو فرلا = (ج - ۲ لا + ۱) فو}$$

$$\text{اس لیے عف - عف ۲} \frac{۱}{\text{ما - ۱} \text{ فو}} = (ما + ۱) \text{ فو} \text{ ج کی بجائے } \text{ما} + ۲ لا رکھنے سے$$

$$\text{اسی طرح عف + عف} \frac{۱}{\text{ما + ۱} \text{ فو}} \text{ کو م ف (ج + لا + ۱) فو فرلا = (ج + لا) فو}$$

سے ج کی بجائے  $\text{ما}$ ۔ لا رکھ کر معلوم کیا جائے تو  $\text{ما فو}$  حاصل ہوگا جو مطلوب ہے۔



خاص تکملہ ہے۔  
پس ی = ما<sup>۱</sup>قو + فہ (ما + لا<sup>۲</sup>) + سا (ما - لا)

## حل طلب مثالیں

(۱) (عف<sup>۱</sup> + ۲ عف<sup>۲</sup> + عف<sup>۳</sup>) ی = ۲ جم ما - لاجب ما

(۲) (عف<sup>۲</sup> - ۲ عف<sup>۳</sup> - ۵ عف<sup>۴</sup>) ی = ۱۲ لا ما

(۳) ۱ + س - ۶ ت = ما جم لا

(۴)  $\frac{\text{جف}^۲ \text{ لا}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} - \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لاجب ما}} - \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ما}}$

= (۲ لا<sup>۲</sup> + لا ما - ما<sup>۲</sup>) جب لا ما - جم لا ما

(۵) ۱ - ت = مس<sup>۳</sup> لا مس ما - مس لا مس ما

(۶)  $\frac{\text{جف}^۲ \text{ ما}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} - \frac{\text{جف}^۲ \text{ ما}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} = \frac{\text{لا}^۲}{\text{ت}} - \frac{\text{ت}}{\text{لا}}$

۱۵۰۔ غیر متجانس خطی مساواتیں - سادہ ترین صورت (۱۷۸)

(عف - م عف - ۱) ی = ۰

ع - م ق = ۱ ی

یعنی  
ہے جس سے

فہ (ی قو<sup>۱</sup>، ما + م لا) = ۰

ی = قو<sup>۱</sup> سا (ما + م لا)

یا  
حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عف - م عف - ۱) (عف - ن عف - ب) ی = ۰

کاتکملہ ی = قو<sup>۱</sup> ف (ما + م لا) + قو<sup>۱</sup> فا (ما + ن لا)

ہے اور (عف - م عفا - ۱) ی = کا تکملہ  
ی = حوف (ما + م لا) + لا فو (ما + م لا)

ہے۔ لیکن وہ مساواتیں جن میں لامتی عامل ایسے اجزائے ضربی میں  
تحویل نہ ہو سکے جو عفا اور عفا میں خطی ہوں اس طریقہ پر تکمیل نہیں  
کی جاسکتیں۔

مثلاً (عفا - عفا) ی = پر غور کرو۔  
ازمایشی حل کے طور پر رکھو ی = فو لا ک ما تو  
(عفا - عفا) ی = (ک - ک) فو لا ک ما

اس طرح ی = فو لا ک ما ایک خاص تکملہ ہے اور اس سے  
عام تر تکملہ (ک - ک) فو لا ک ما ہے جہاں ہر رقم میں اور ہر بالکل اختیار  
ہیں اور رقموں کی کوئی تعداد لی جاسکتی ہے۔

تکملہ کی یہ شکل طبعیاتی مسئلوں میں سب سے زیادہ موزوں  
ہے جیسا کہ چوتھے باب میں کچھ تفصیل کے ساتھ سمجھایا گیا ہے۔ بلاشبہ  
مشتقل سروں والی کسی خطی جزئی تفرقی مساوات کا تکملہ اس طریقہ پر  
بیان کیا جاسکتا ہے لیکن وہ مختصر شکلیں جن میں اختیاری تفاعل آتے  
ہیں بالعموم قابل ترجیح ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) عفا عفا (عفا - عفا - ۲) ی = ۰

$$(۲) \quad ۰ = ی + ۲ق + ۲ع + ۲ت + ۲س + ۲ر$$

$$(۳) \quad \frac{\text{جف}^۱ و}{\text{جف}^۱ ت} = \frac{\text{جف}^۱ و}{\text{جف}^۱ ت}$$

$$(۴) \quad ۰ = ی (عف^۱ - عف^۱ + عف^۱ - عف^۱)$$

$$(۵) \quad ۰ = ی (۲ عف^۱ - ۳ عف^۱ + عف^۱ - عف^۱)$$

$$(۶) \quad \text{جف}^۱ و + \frac{\text{جف}^۱ و}{\text{جف}^۱ ت} = ن و$$

$$(۷) \quad (عف - ۲ عف^۱ - ۱) (عف - ۲ عف^۱ - ۱) = ی$$

(۸) مثال (۴) کا حل معلوم کرو جو ۱ میں تحویل ہو جبکہ لا = ۰۰ اور ۱ میں تحویل ہو جبکہ لا = ۰

۱۵۱ - خاص تکنیک - غیر متجانس مساواتوں کے خاص  
تکملوں کو حاصل کرنے کے طریقے تیسرے باب کے طریقوں کے بہت  
مشابہ ہیں، اس لیے ہم صرف چند مثالیں دیتے ہیں۔

$$\text{مثال (۱)} \quad (عف^۳ - ۳ عف^۲ + عف + ۱) = ی$$

$$۶۳ + ۷۲$$

$$\frac{۱}{عف^۳ - ۳ عف^۲ + عف + ۱}$$

$$۶۳ + ۷۲$$

$$= \frac{۱ + ۲ + ۳ \times ۲ \times ۳ - ۳}{۱ + ۲ + ۳ \times ۲ \times ۳ - ۳}$$

$$۶۳ + ۷۲ \quad \frac{۱}{۲} =$$

$$\text{اس لیے } ی = \frac{۱}{۲} + \frac{۶۳ + ۷۲}{۲} \quad (۱۷۹)$$

$$\text{جہاں } ۳ - ۳ ک + ۱ = ۰$$

مثال (۲) (عف + عف - ۱) (عف + عف - ۲) (عف + عف - ۳) ی = ۴ + ۳ + ۲ + ۱

$$\frac{1}{\text{عف} + \text{عف} - ۱} = \frac{1}{\text{عف} + ۲ - \text{عف} - ۳} = \frac{1}{-۱ - (\text{عف} + \text{عف})}$$

$$\times \left\{ \frac{-۱ - (\text{عف} + ۲ - \text{عف} - ۳)}{-۱ - (\text{عف} + \text{عف})} \right\}$$

$$= \frac{1}{۳} \left\{ ۱ + \text{عف} + \text{عف} + \frac{۳}{۳} \right\}$$

$$\times \left\{ ۱ + \frac{\text{عف} + ۲ - \text{عف} - ۳}{۳} + \frac{۳}{۳} \right\}$$

$$= \frac{1}{۳} \left\{ ۱ + \frac{۴ + ۳ + ۲ - \text{عف} - ۳}{۳} + \frac{۳}{۳} \right\}$$

اس مثال سے ۴ + ۳ + ۲ + ۱ پر عمل کرنے سے

$$\frac{1}{۳} \{ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ \}$$

اس لیے ی = ۶ + ۲ + ۱ + ۳ + ۴ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴

مثال (۳) (عف - عف - ۲) (عف - عف - ۳) ی = جب (۳ + ۲ + ۱)

$$\frac{1}{\text{عف} - ۲ - \text{عف} - ۳} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱)$$

$$= \frac{1}{-۳ - (\text{عف} - ۲ - \text{عف} - ۳)} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱)$$

$$= \frac{1}{-۳ - \text{عف} + ۲ + \text{عف} + ۳} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱)$$

$$= \frac{\frac{۲ + ۳}{\text{عف} - ۲ - \text{عف} - ۳} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱)}{۹ - ۳ - ۲} = \frac{\frac{۲ + ۳}{\text{عف} - ۲ - \text{عف} - ۳} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱)}{۴}$$

$$= \frac{1}{۱۵} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱) + \frac{۲}{۱۵} \text{ جب } (۳ + ۲ + ۱)$$

[illegible]

پس  $y = \frac{1}{15}$  جب  $(6x+3)$   $\frac{2}{15}$  حجم  $(6x+3) + 3$

۱- ک - ۲ = ۳

جہاں

## حل طلب مثالیں

6-44

(۱) (عَف - عَف - ۱) (عَف - عَف - ۲) ی = فو

(۲) س + ع - ق = ی + لا م (۳) (ع - ع) = ی = جم (لا - م)

$$(5) \quad \frac{\text{جفا}^2 \text{ ما}}{\text{حفا}^2 \text{ لا}} - \frac{\text{جفا}^2 \text{ ما}}{\text{حفا}^2 \text{ لا}} = \text{ما} + \text{لا} + \text{ی}$$

(۶) (عف ۲ - عف ۲ - ی ۲) = ۲ قو<sup>۲</sup> مس (۳ + ۱)

۱۵۲۔ اسقاط کی مثالیں۔ اب ہم پہلے رتبہ کی جزئی

تفرقی مساوات سے اختیاری تفاعل کو سا قط کرنے کی مثالیں دیں گے۔

مثال (۱)  $۲۶۷ - ۵۴ = ۲۱۳$  = ف (لا ۱۳۴)

اول لاکھ لاکھ سے اور پھر مائے غلط سے تفرق کرنے پر

$$2 \text{ ر. لا - س. ما + ع. م} = 2 \text{ لا مافه (لا ما)}$$

۳۳ لا - تا - ق = لا ف (لا ما)

191

اس لیے  $لا(۲رلا-س+ع۲) = لا۲(سلا-تاما-ق)$

$$r^2 = 5\lambda^2 s^2 + 2\lambda^2 t^2 + (e\lambda + c)^2$$

جوڑ، س، ت میں پہلے درجہ کی مساوات ہے۔

ع-لا-۲ ق م = م (لا م ا) سے ساقط کرنے پر بھی یہی نتیجہ

(1A-0)

برآمد ہوگا۔

مثال (۲)  $E + C = F(2L + 4)$

$$2x + 3 = 2(2 + 3) = 2(5) = 10$$

یہاں

اور  $۲ع + س = ت = فہ (۲لا + ما)$   
 اس لیے  $۲ع + ر + س = ۳ع + س + ۲ت$   
 جو پھر ر + س، ت میں پہلے درجہ کی مساوات ہے۔  
 مثال (۳)  $ما - ع = فہ (لا - ق)$   
 اس سے حاصل ہوتا ہے  
 $ر = (۱ - س) فہ (لا - ق)$   
 اور  $س = ت - فہ (لا - ق)$   
 اس لیے  $رت = (۱ - س)$   
 یا  $۲س + (رت - س) = ۱$   
 اس مثال میں اور پہلے کی دو مثالوں میں یہ فرق ہے کہ اس میں ع  
 اور ق، اختیاری تفاعل میں بھی واقع ہوتے ہیں۔ نتیجہ میں (رت - س) کی رقم  
 شریک ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری تفاعل کو سا قط کر دو:

$$(۱) ع - ما - ق + ۳ما = فہ (۲لا + ما)$$

$$(۲) لا - ق = \frac{۱}{۲} فہ (ی)$$

$$(۳) ع + لا - ما = فہ (ق - ۲لا + ما)$$

$$(۴) ع + لا + ق + ما = فہ (ع + ق)$$

$$(۵) ع - لا = فہ (ق - ۲ما) (۶) ع + ی + ق = فہ (ی)$$

۱۵۳۔ پچھلے نتیجوں کی تعمیر۔ اگر لا، ما، ی، ع، ق کے  
 تفاعل ع اور ق معلوم ہوں اور مساوات  $ع = فہ (و)$  کو حسب  
 سابق استعمال کیا جائے تو

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱ ۳۶۰ دو اداس سے اعلیٰ رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں

$$\begin{aligned} & \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ع}} + \text{س} \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} \\ & = \left( \frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}} + \text{س} \frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} \right) \text{فہ (و)} \\ & \text{اور} \quad \text{س} \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ع}} + \text{ت} \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} \\ & = \left( \text{س} \frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}} + \text{ت} \frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} \right) \text{فہ (و)} \\ & \text{فہ (و) کو سا قی کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ رس اور ست والی} \\ & \text{رقمیں خارج ہو جاتی ہیں اور نتیجہ شکل} \\ & \text{سر} + \text{س} + \text{س} + \text{ت} + \text{ت} + \text{ت} = \text{س} = \text{و} \\ & \text{میں حاصل ہوتا ہے جہاں سر، س، ت، ع، و میں ع، ق، اور} \\ & \text{لا، ما، ی، ع، ق کے لحاظ سے ع اور و کے جزئی تفرقی سر شامل ہیں} \\ & \text{سر} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}} - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}} \\ & \text{معدوم ہوتا ہے اگر و صرف لا، ما، ی کا تفاعل ہو اور ع} \\ & \text{یا ق کا نہ ہو۔} \\ & \text{ان نتیجوں سے ہمیں یہ معلوم ہو گا کہ جب ہم دو سرے رتبہ کی} \\ & \text{مساواتوں سے ابتدا کرتے ہیں اور ان سے پہلے رتبہ کی مساواتیں} \\ & \text{حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں تو ہمیں کیا توقع کرنی چاہئے۔} \\ & \text{۱۵۴۔ سر + س + س + ت + ت = و کو بحال کرنے کا} \\ & \text{مونگے کا طریقہ۔ اب ہم ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساواتوں} \\ & \text{پر جن کے سر، س، ت، و ہوں جو ع، ق، لا، ما، ی کے} \end{aligned}$$

(۱۸۱)

تفاعل میں غور کریں گے اور دفعات ۱۵۲ اور ۱۵۳ کے عمل کو اٹکا کرنے کی کوشش کریں گے۔

چونکہ  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ فرلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{ فرما} = \text{فرع} + \text{فرلا} + \text{س فرما}$   
 اور  $\text{فرق} = \text{س فرلا} + \text{ت فرما}$   
 اس لیے  $\text{سار} + \text{س} + \text{ت} + \text{ت} - \text{و} = ۰$   
 ہو جاتا ہے  $\text{سار} (\frac{\text{فرع} - \text{س فرما}}{\text{فرلا}}) + \text{س} + \text{س} + \text{ت} (\frac{\text{فرق} - \text{س فرلا}}{\text{فرما}}) - \text{و} = ۰$   
 یعنی  $\text{سار فرع فرما} + \text{ت فرق فرلا} - \text{و فرما فرلا} - \text{س} (\text{س فرما}^۲) - \text{س فرما فرلا} + \text{ت فرلا}^۲ = ۰$   
 مونگی کے طریقہ میں خاص خصوصیت یہ ہے کہ ع ق لا ما می کے درمیان ایک یا دو رشتے (جن میں سے ہر رشتہ میں ایک اختیاری تفاعل شریک ہوتا ہے) حاصل کئے جاتے ہیں جو ہمزا د مساواتوں  $\text{سار فرما}^۲ - \text{س فرما فرلا} + \text{ت فرلا}^۲ = ۰$   
 $\text{س فرع فرما} + \text{ت فرق فرلا} - \text{و فرما فرلا} = ۰$   
 کو پورا کرتے ہیں۔

ان رشتوں کو درمیانی تکمیل کہا جاتا ہے۔

عمل کا طریقہ چند مل شدہ مثالوں کو دیکھنے سے اچھی طرح سمجھ میں آجائے گا۔

مثال (۱) ۲ لار - ۵ لاماس + ۲ مات + ۲ (ع لا + ق ما) = ۰  
 اوپر کی طرح عمل کرنے پر ہمزا د مساواتیں  
 $۲ \text{ لا فرما}^۲ + ۵ \text{ لا ما فرلا فرما} + ۲ \text{ ما فرلا}^۲ = ۰$  ..... (۱)  
 اور  $۲ \text{ لا فرع فرما} + ۲ \text{ ما فرق فرلا} + ۲ (ع لا + ق ما) \text{ فرما فرلا} = ۰$  ..... (۲)  
 (۱) سے  $(۲ \text{ لا فرما} + ۲ \text{ ما فرلا}) (۲ \text{ لا فرما} + ۲ \text{ ما فرلا}) = ۰$



یعنی  $\text{لا}^{\text{ا}} = \text{ا} \text{ یا } \text{لا}^{\text{ا}} = \text{ب}$   
 اگر ہم  $\text{لا}^{\text{ا}} = \text{ا}$  لیں اور (۲) کی ہر قلم کو لا فرمایا اس کے مساوی  
 - ۲ ما فرلا سے تقسیم کریں تو  
 $\text{ا}^{\text{ا}} \text{فرع} - \text{ما فرق} + \text{ع}^{\text{ا}} \text{فرلا} - \text{ق فرما} = ۰$

یعنی  $\text{ع}^{\text{ا}} \text{لا} - \text{ق}^{\text{ا}} \text{ما} = \text{ج}$   
 اس کو  $\text{لا}^{\text{ا}} = \text{ا}$  کے ساتھ لینے سے درمیانی تکملہ  
 $\text{ع}^{\text{ا}} \text{لا} - \text{ق}^{\text{ا}} \text{ما} = \text{فہ} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) \dots \dots \dots (۳)$   
 ملتا ہے جہاں فہ ایک اختیاری تفاعل ہے۔ (مقابلہ کرو مثال (۱) دفعہ  
 ۱۵۲ کے ساتھ)

اسی طرح  $\text{لا}^{\text{ا}} = \text{ب}$  اور مساوات (۲) سے  
 $\text{ع}^{\text{ا}} \text{لا} - \text{ق}^{\text{ا}} \text{ما} = \text{سا} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) \dots \dots \dots (۴)$   
 حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اور (۴) کو حل کرنے سے  
 $\text{ع}^{\text{ا}} \text{لا} = \text{فہ} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) - \text{سا} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما})$   
 $\text{ق}^{\text{ا}} \text{ما} = \text{فہ} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) - \text{سا} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما})$   
 اس لیے فری =  $\text{ع}^{\text{ا}} \text{فرلا} + \text{ق}^{\text{ا}} \text{فرما} = \frac{1}{\text{فہ}} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) (\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{ما}})$  (۱۸۲)  
 -  $\frac{1}{\text{سا}} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) (\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{ما}})$

یعنی  $\text{ی} = \frac{1}{\text{فہ}} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) \text{فرلوک} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) - \frac{1}{\text{سا}} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) \text{فرلوک} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما})$   
 یا  $\text{ی} = \text{فہ} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما}) + \text{فا} (\text{لا}^{\text{ا}} \text{ما})$

مثال (۲) -  $\text{ما}^{\text{ا}} \text{ر} - \text{ما}^{\text{ا}} \text{س} + \text{ت} = \text{ع} + \text{ما}^{\text{ا}} \text{و}$   
 ر اور ت کو حسب سابق سا قلم کرنے پر ہمزاد مساواتیں  
 $\text{ما}^{\text{ا}} \text{فرما}^{\text{ا}} + \text{ما}^{\text{ا}} \text{فرما فرلا} + \text{فرلا}^{\text{ا}} = ۰ \dots \dots \dots (۵)$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱ ۳۶۳ دو اور اس سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں

اور مافرع فرما + فرق فرلا - (ع + ۱۶) فرما فرلا = ۰ ..... (۶)  
حاصل ہوتی ہیں -

$$(۵) سے (ما فرما + فرلا) = ۰$$

$$۱ = ۲ا + ۲ما$$

یعنی

اس تکملہ کو استعمال کرنے اور (۶) کی ہر رقم کو ما فرمایا اس کے مساوی  
- فرلا سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$ما فرع - فرق + (ع + ۱۶) فرما = ۰$$

$$ع - ما - ق + ۳ا = ۰$$

یعنی

اس سے درمیانی تکملہ

$$ع - ما - ق + ۳ا = ۰ \text{ فہ } (۲ا + ۲ا)$$

حاصل ہوتا ہے -

اب چونکہ درمیانی تکملہ صرف ایک ہے اس لیے اس کو لگایا جائے  
طریقہ سے تکمیل کرنا چاہئے -

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فری}}{(۲ا + ۲ا + ۳ا - ۱)} = \frac{\text{فرما}}{۱} = \frac{\text{فرلا}}{۱}$$

ہیں -

ایک تکملہ  $۲ا + ۲ا + ۳ا = ۱$  ہے - اس کو دوسرے تکملہ معلوم کرنے میں  
استعمال کرنے سے

$$\text{فری} + \{۳ا + ۲ا - ۱\} = \text{فرما} = ۰$$

$$۳ا - ۲ا + ۲ا - ۱ = \text{فرما} = ۰$$

یعنی

پس عام تکملہ

$$۳ا - ۲ا + ۲ا - ۱ = \text{فرما} = ۰$$

$$۳ا - ۲ا + ۲ا - ۱ = \text{فرما} = ۰$$

$$\text{مثال (۳) - ع - ت - ق = ق = ۳ق}$$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۳۶۴ دو اور اس سے اعلیٰ تبوکی ہزنی تفرقی مساواتیں

ہمزاد مساواتیں  
 ق فرما فرلا + ع فرلا = ۱ ..... (۷)  
 ع فرق فرلا - ق فرما فرلا = ۱ ..... (۸)  
 اور ہیں۔

(۷) سے فرلا = ۱ یا ق فرما + ع فرلا (= فری) = ۱

یعنی  
 لا = ۱ یا ی = ب  
 اگر فرلا = ۱ تب مساوات (۸) = ۰ میں تحویل ہوتی ہے۔  
 اگر ی = ب تو ق فرما = ۱ - ع فرلا اور مساوات (۸)  
 ع فرق + ق فرما = ۱

فرق  
 ق فرما + فرلا = ۱

میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے

- ۱/ق + لا = ج = سا (ی) ..... (۹)

(۹) کو لگراج کے طریقہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے لیکن ایک مختصر طریقہ یہ ہے کہ اس کو

(۱۸۳)

فرما  
 فری = ۱/ق = لا - سا (ی)

لکھا جائے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے

ما = لا ی - سا (ی) فری + فا (لا)

ما = لا ی + ف (ی) + فا (لا)

**حل طلبشالیں**

(۱) ر - ت جزم لا + ع مس لا = ۱

(۲) (لا - ما) (لا - لاس - ماس + مات) = (لا + ما) (ع - ق)

(۳)  $(ق + ۱)س = (۱ + ع)ت$   
 (۴)  $ت - ر ق ط م = ۲ ق س م$   
 (۵)  $لا م (ت - ر) + (لا - م) (س - ۲) = ع م - ق لا$   
 (۶)  $(۱ + ق)ر - ۲ (۱ + ع + ق + ع ق)س + (۱ + ع)ت =$   
 (۷)  $وہ مسلح معلوم کرو جو ۲ لار - ۵ لا ماس + ۲ مات$   
 $۲ + (ع لا + ق م) =$   
 کو پورا کرے اور زائدی مکانی نمای = لا - م کو اس تراش پر مس کرے  
 جو مستوی م = اسے منقطع ہوتی ہے۔  
 (۸)  $ق ر - ۲ ع ق س + ع ت =$  کے مکملہ کو شکل  
 م + لاف (ی) = فا (ی)  
 میں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ اس سے ایک مسلح تعبیر ہوتی ہے جو ایسے  
 خطوط مستقیم سے تشکیل پاتی ہے جو ایک ثابت مستوی کے متوازی ہیں۔  
 ۱۵۵  $س + س + س + ت + ت + ع (رست - س)$   
 = کو تکمل کرنے کا مونچے کا طریقہ۔  
 سر س، س، ت، ع، و حسب سابق ع، ق، لا، م، ی  
 کے تفاعل ہیں۔  
 حل کا عمل فطرتاً دو حصوں میں منقسم ہوتا ہے:  
 (۱) درمیانی تکملوں کو بنانا  
 (۲) ان تکملوں کا مزید تکمل  
 وضاحت کی خاطر ہم ان دو حصوں پر جدا جدا غور کریں گے۔  
 ۱۵۶ — درمیانی تکملوں کو بنانا۔ حسب دفعہ ۱۵۴  
 $ر = (فرع - س فرما)$   
 فر لا

لے اس باب کا باقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کرنا چاہئے۔ مونچے نے یہ خیالات اندرونی  
 'بیدار' (۱۸۳۳ء) سے جس کے نام ت برقی روکی اکائی منسوب ہے یہ ہیں۔

ت = (فرق - س فرلا)

اور

ر اور ت کی بجائے یہ چلے

س + س + س + ت + ت + ع (رت - س) = و  
میں درج کرد اور (کسروں کو دور کرنے کے لیے) فرلا اور فرما سے  
ضرب دو تو حاصل ہوگا

س فرع فرما + ت فرق فرلا + ع فرع فرق - و فرلا فرما

- س (س فرما - س فرلا فرما + ت فرلا

+ ع فرع فرلا + ع فرع فرما) =

فرض کرو کہ ن - س م = ہے -

اب ہم ہمزاد مساواتوں

م = ہے

(۱۸۴)

کے حل کو حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

ابتک ہم نے ان طریقوں کا اتباع کیا ہے جو دفعہ ۱۵۴ میں  
استعمال کئے گئے تھے لیکن اب ہم ہر کو گزشتہ کی طرح اجزائے  
ضربی میں تحلیل نہیں کر سکتے جس کی وجہ رمتوں ع فرع فرلا + ع فرع فرما  
کی موجودگی ہے۔

اب چونکہ م بیان کو علیحدہ علیحدہ اجزائے ضربی میں تحلیل  
کرنے کی کوئی امید نہیں ہے اس لیے فرض کرو کہ ہم م + ل ن کو  
اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرتے ہیں یہاں لہ کوئی  
ضارب ہے جس کو بعد میں معلوم کیا جائے گا۔

م اور ن کو پوری طرح لکھنے پر وہ جملہ جس کو اجزائے تحویل کرنا

س فرما + ت فرلا - (س + ل و) فرلا فرما + ع فرع فرلا

+ ع فرع فرما + ل س فرع فرما + ل ت فرق فرلا

### ۱۔ لہ ۲۔ ع فرع فرق

ہے۔ چونکہ فرع<sup>۱</sup> یا فرق<sup>۲</sup> کی قیمتیں نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق<sup>۲</sup> دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی  
۱۔ فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں۔ تب فرما<sup>۱</sup>، فرلا<sup>۲</sup>، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$(۱) \text{ ع} = \text{س} \times \text{ب} \times \text{ف} = \text{ت} \times \text{ج} \times \text{گ} = \text{لہ} \times \text{ع}$$

ہم لے سکتے ہیں ۱ = س'ع = ا'ب = ک'ت'ف = ج'س'

$$\text{ج} = \text{م} \times \text{ع} \times \text{گ} = \text{لہ}$$

دوسری پانچ رقموں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$(۱) \text{ ک} \times \text{ت} + \frac{\text{س}}{\text{ج}} = - (\text{س} + \text{لہ} \times \text{و}) \dots \dots (۱)$$

$$(۲) \dots \dots \dots \text{لہ} \times \text{س} = \text{ع} \dots \dots (۲)$$

$$(۳) \dots \dots \dots \text{ک} \times \text{ت} \times \text{لہ} = \text{لہ} \times \text{ت} \dots \dots (۳)$$

$$(۴) \dots \dots \dots \text{م} \times \text{ع} = \text{لہ} \times \text{س} \dots \dots (۴)$$

$$(۵) \dots \dots \dots \frac{\text{م} \times \text{ع}}{\text{ج}} = \text{ع} \dots \dots (۵)$$

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے۔

ت = (فرق - سن فرلا)

اور

ر. و ر ت کی بجائے یہ چلے

س. + س. س. + ت. ت. + ع. (ر. ت. - س. -) = و  
میں و ر ج کرو اور (کسروں کو دو رک کرنے کے لیے) فرلا اور فرما سے  
قرب دو تو حاصل ہوگا

س. فرع فرما + ت. فرق فرلا + ع. فرع فرق - فرلا فرما

- س. (س. فرما - س. فرلا فرما + ت. فرق فرلا

+ ع. فرع فرلا + ع. فرق فرما) =

فرع کرو کہ ت. - س. - س. - س. -

اب ہم ہمزا و مساواتوں

(۳۴)

ہ =

کے صل کو حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

ایک جہنے ان طریقوں کا اتباع کیا ہے جو دفعہ ۵۴ میں  
استعمال کئے گئے تھے لیکن اب ہم ہر کو گشت کی جگہ جہنے  
ضروری ہیں تحلیل کر سکتے ہیں جو جہنوں - فرع فرلا -

یہ جو کہ ہر ت کو علیحدہ علیحدہ جہنے سے لے کر تحلیل

کرتے ہیں کوئی شک نہیں ہے اس سے فرق کرو کہ ہم ہر - ر. ت. کو

جہنے سے ضروری ہیں تحلیل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو جہنوں -

تصاریف سے جس کو بعد میں معلوم کیا جائے گا۔

ہر و ر ت کو جو جہنے سے ہر و ر جہنے سے ہر و ر جہنے سے

س. فرما - ت. فرلا - س. - س. - س. - س. -

+ ع. فرق فرما + س. فرع فرما - ت. فرق فرلا

### ۴۔ لہ ۶ فرع فرق

۴۔ چونکہ فرع<sup>۱</sup> یا فرق<sup>۲</sup> کی قیمتیں نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی  
۱ فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں۔ تب فرما<sup>۱</sup>، فرلا<sup>۲</sup>، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے  
۱ ع = سر' ب ف = ت' ج گ = لہ ۶

ہم لے سکتے ہیں ۱ = سر' ع = ا' ب = ک ت' ف = لہ ۶

ج = م ع' گ = لہ ۶

دوسری پانچ رقموں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ک ت + لہ ۶ = - (س + لہ ۶) ..... (۱)

لہ ۶ = لہ ۶ ..... (۲)

ک ت لہ ۶ = لہ ۶ ..... (۳)

م ع' = لہ ۶ ..... (۴)

لہ ۶ = لہ ۶ ..... (۵)

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے۔



ت = (فرق - س فرلا)

اور

فرما

ر اور ت کی بجائے یہ چلے

س + ر + س + ت + ت + ۶ (رت - س) = و  
میں درج کرو اور (کسروں کو دور کرنے کے لیے) فرلا اور فرما سے  
ضرب دو تو حاصل ہوگا

س فرع فرما + ت فرق فرلا + ۶ فرع فرق - و فرلا فرما

- س (س فرما - س فرلا فرما + ت فرلا

+ ۶ فرع فرلا + ۶ فرق فرما) =

فرض کرو کہ ن - س م = ۰ ہے -

اب ہم ہمزاد مساواتوں

م = ۰

(۱۸۴)

کے حل کو حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

ابتک ہم نے ان طریقوں کا اتباع کیا ہے جو دفعہ ۱۵۴ میں  
استعمال کئے گئے تھے لیکن اب ہم م کو گزشتہ کی طرح اجزائے  
ضربی میں تحلیل نہیں کر سکتے جس کی وجہ رمتوں ۶ فرع فرلا + ۶ فرق فرلا  
کی موجودگی ہے۔

اب چونکہ م یا ن کو علیحدہ علیحدہ اجزائے ضربی میں تحلیل  
کرنے کی کوئی امید نہیں ہے اس لیے فرض کرو کہ م + لہ ن کو  
اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرتے ہیں یہاں لہ کوئی  
ضارب ہے جس کو بعد میں معلوم کیا جائے گا۔

م اور ن کو پوری طرح لکھنے پر وہ جملہ جس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا

س فرما + ت فرلا - (س + لہ و) فرلا فرما + ۶ فرع فرلا

+ ۶ فرق فرما + لہ س فرع فرما + لہ ت فرق فرلا

### ۴۔ لہ ع فرع فرق

ہے۔ چونکہ فرع 'ا' یا فرق 'ا' کی رتبی نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی  
ا فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں۔ تب فرما 'ا'، فرلا 'ب'، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے  
ا ع = س 'ب' ف = ت 'ج' گ = لہ ع  
ہم لے سکتے ہیں ا = س 'ع' = ا 'ب' = ک ت 'ف' = لہ ع

ج = م 'ع' گ = لہ ع

دوسری پانچ رتبوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ک ت + لہ ع = - (س + لہ ع) ..... (۱)

لہ ع = لہ ع ..... (۲)

ک ت لہ ع = لہ ع ..... (۳)

م 'ع' = لہ ع ..... (۴)

م 'ع' = لہ ع ..... (۵)

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۴) پوری ہوتی ہے۔

$$(۲) \text{ سے یا } (۴) \text{ سے } م = \frac{لہ}{ع}$$

پس (۱) سے

$$لہ^۲ (س رت + ع و) + لہ ع س + ع^۲ = ۰ \dots (۶)$$

اس لیے اگر (۶) کی ایک اصل لہ ہو تو مطلوبہ اجزائے ضربی

$$(س فرما + لہ \frac{س رت}{ع} فرلا + لہ س فرغ) (فرما + لہ \frac{ع}{س} فرلا$$

$$+ \frac{ع}{س} فرق)$$

$$\text{یعنی } \frac{س رت}{ع} (ع فرما + لہ ت فرلا + لہ ع فرغ) \times \frac{۱}{لہ س} (لہ س فرما + لہ ع فرلا + لہ ع فرق)$$

ہیں۔

اس لیے ہم خلی مساواتوں

$$ع فرما + لہ ت فرلا + لہ ع فرغ = ۰ \dots (۷)$$

اور لہ س فرما + لہ ع فرلا + لہ ع فرق = ۰ \dots (۸)

سے مکملوں کو معلوم کرنے کی کوشش کریں گے جہاں لہ (۶) کو پورا کرتا ہے

عمل کا باقی حصہ حسب ذیل حل شدہ مثالوں سے اچھی طرح

(۱۸۵)

واضح ہو گا۔

### ۱۵۷۔ مثالیں

مثال (۱)  $س^۲ + (رت - س) = ۱$

پچھلے دفعہ کی مساوات (۶) میں  $س = رت = ۰$ ،  $س = ۲$

$$ع = و = ۱ \text{ درج کرنے سے}$$

$$لہ^۲ + لہ + ۱ = ۰$$

لہ جگہ بچانے کے لیے ہم صرف گذشتہ دفعہ کے نتیجے بیان کریں گے لیکن طالب علم کو یہ شعور دیا جاتا ہے کہ وہ ہر مثال کو ابتدائی اصولوں سے حل کرے۔

جو ایک دو درجہ کی ہے جس کی اصلیں مساوی - ۱ اور - ۱ ہیں۔

لہ - ۱ = ۱ تو مساواتوں (۷) اور (۸) سے مساواتیں

$$\text{فرما} - \text{فرع} = ۰$$

$$\text{فرلا} - \text{فرق} = ۰$$

حاصل ہوتی ہیں جن کے مکملے صریحاً مستقل

$$\text{ما} - \text{ع} = \text{مستقل}$$

اور

ہیں -

ان کو دفعہ ۵۴ کے مطابق استعمال کرنے سے

درمیانی تکملہ  $\text{ما} - \text{ع} = \text{ف} - \text{لا} - \text{ق}$  حاصل ہوتا ہے۔

مثال (۲)  $\text{ر} + ۳\text{س} + \text{ت} + (\text{رت} - \text{س}) = ۱$

لہ میں دو درجہ کی

$$\text{لہ} ۲ = ۱ + ۳\text{لہ} + ۱ = ۰$$

حاصل ہوتا ہے اس لیے لہ = ۱ یا - ۱

لہ - ۱ = ۱ تو مساواتوں (۷) اور (۸) سے مساواتیں

$$\text{فرما} - \text{فرع} = ۰$$

$$\text{فرما} + \text{فرلا} - \text{فرق} = ۰$$

حاصل ہوتی ہیں جن کے مکملے صریحاً

$$\text{ع} + \text{لا} - \text{ما} = \text{مستقل} \quad (۱)$$

$$\text{ق} - \text{لا} + \text{ما} = \text{مستقل} \quad (۲)$$

اور

اسی طرح

$$\text{لہ} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\text{ع} + \text{لا} - ۲\text{ما} = \text{مستقل} \quad (۳)$$

$$\text{ق} - ۲\text{لا} + \text{ما} = \text{مستقل} \quad (۴)$$

اور

حاصل ہوتے ہیں -

اب دیکھنا یہ ہے کہ ان چار تکملوں کو کن جوڑوں میں لینا چاہئے۔

تفرقی مساویں۔ باب ۳۰ دو لہر اس سے اعلیٰ تہوں کی جزئی تفرقی مساویں

پھر ان ہمزاد مساواتوں پر غور کرو جو دفعہ مابین مساویں سے تعبیر ہوئے ہیں۔ اگر یہ دونوں پورے ہوں تو  $ن = ۱$  اور  $۲ = ۱$ ۔ (جہاں  $ن$  اور  $۲$  کے دو درجہ کی اصلیں ہیں)۔ اس لیے غلطی اجزائے ضربی میں سے ایک  $ن = ۱$  کے لیے اور ایک (صرفاً دو صغرا یا فرما =  $۱$ )  $۲ = ۱$  کے لیے معدوم ہوتے ہیں۔

اس کا یہ مطلب ہے کہ ہم تکملوں (۱) اور (۳) کو اور نیز (۲) اور (۳) کو ملا تے ہیں پنانچہ اس طرح دو درمیانی تکملے  
 $ع + لا - ما = ف$  (ق -  $۲ لا + ما$ )  
 اور  $ع + لا - ما = فا$  (ق -  $لا + ما$ )  
 حاصل ہوتے ہیں۔

مثال (۳)  $۲ مار + (ع لا + ق ما) م + لا ت - لا ما (رت$  (۱۸۶)  
 $- م = ۲ - ع ق$

لہ میں دو درجہ  
 $ل لا ما ع ق - ل نا ما (ع لا + ق ما) + لا ما =$

ہے جس سے  $ل = \frac{ما}{ع} یا \frac{لا}{ق}$

دفعہ مابین کی مساواتوں (۷) اور (۸) میں درجہ کرنے سے اور  
 فقصر کرنے سے

ما فرع - فر لا + ع فر ما = ..... (۵)  
 $۲ ما فر ما - ع لا فر لا - لا ما فرق = ..... (۶)$   
 $ق ما فر ما + لا فر لا - لا ما فرع = ..... (۷)$   
 $۲ فر ما + ق فر لا + لا فرق = ..... (۸)$  اور  
 (۵) اور (۸) کے واضح تکملوں کو ملائے سے  
 $ما ع - لا = ف - (ما + ق لا)$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱ ۳۷۱ دو اور اس سے اعلیٰ رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں

لیکن (۶) اور (۷) غیر تکمل پذیر ہیں کیونکہ ان میں ع اور ق اس طرح واقع ہیں کہ تکمل نہیں کیا جاسکتا۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ لہ کی دو اصلیں مختلف ہیں لیکن صرف ایک درمیانی تکملہ حاصل ہوتا ہے۔

## حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کا ایک درمیانی تکملہ (یا دو اگر ممکن ہو) معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ۳ + ر + س + ت + (رت - س^۲) = ۱$$

$$(۲) \quad ر + ت - (رت - س^۲) = ۱$$

$$(۳) \quad ۲ + ر + ت - (رت - س^۲) = ۲$$

$$(۴) \quad رت - س^۲ + ۱ = -$$

$$(۵) \quad ۳ + س + (رت - س^۲) = ۲$$

$$(۶) \quad ق + ل + ر + (لا + ل) + س + ع + مات + لا + (رت - س^۲) =$$

$$۱ - ع + ق$$

$$(۷) \quad (ق - ۱) + ر - ۲ + ع + ق + ی + س + (ع - ۱) + ی + ت$$

$$+ ی + (رت - س^۲) = ع + ق - ۱$$

۱۵۸۔ درمیانی تکملوں کا فرض تکمل۔

مثال (۱) دفعہ ۱۵۷ مثال (۱) میں حاصل شدہ درمیانی تکملہ

$$ما - ع = ف (لا - ق)$$

پر غور کرو۔

$$ہم \quad لا - ق = ۱$$

اور رکھ کر ایک ”کامل“ تکملہ کو حاصل کر سکتے ہیں جس میں ا و ب، ج اختیاری مستقل ہونگے۔

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۲ ۳۷۲ دو اور اس سے اعلیٰ رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں

پس فری = ع فرلا + ق فرما = (ما - ب) فرلا + (لا - ا) فرما

اور ی = لا ما - ب لا - ا ما + ج

عام تر شکل کا ایک تکملہ یہ فرض کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے کہ  
اختیاری تفاعل جو درمیانی تکملہ میں واقع ہے خطی ہے، چنانچہ

ما - ع = م (لا - ق) + ن  
اس کو لگراج کے طریقہ سے تحلیل کرنے پر

ی = لا ما + فہ (ما + م) - ن لا

مثال (۲) دفعہ ۱۵، مثال (۲) کے دو درمیانی تکملوں

ع + لا - ما = ف (ق - ۲ لا + ما)

ع + لا - ما = فا (ق - لا + ما) اور

پر غور کرو۔

(۱۸۴) اگر ہم ان ہمزاد مساواتوں کو اُسی طرح استعمال کریں جس طرح  
ہم نے مثال (۱) کی واحد مساوات کو کیا ہے تو

ق - ۲ لا + ما = ع

ق - لا + ما = ب

ع + لا - ما = ف (ع)

ع + لا - ما = فا (ب)

اگر بائیں جانب کی رقمیں مستقل ہیں تو یہ لغو نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ  
لا، ما، ع، ق سب مستقل ہیں۔

لیکن اب فرض کرو کہ ع اور ب مستقل نہیں ہیں بلکہ مبدل  
اور تغیر پذیر ہیں۔

ان چار مساواتوں کو حل کرنے سے

لا = ب - ع

ما = ف (ع) - فا (ب)

ع = ما - لا + ف (ع)

ق = لا - ما + بہ  
 فری = ع فرلا + ق فرما جن سے  
 = (ما - لا) (فرلا - فرما) + ف (ع) فرلا + بہ فرما  
 = - ۱/۲ فر (لا - ما) + ف (ع) فر بہ - ف (ع) فر ع  
 + ب ف (ع) فر ع - ب فا (ب) فر بہ  
 یعنی ی = - ۱/۲ (لا - ما) - م ف (ع) فر ع - م بہ فا (ب) فر بہ + ب ف (ع) فر ع  
 وہ نتیجہ جو تکملوں کی علامتوں سے پاک ہو حاصل کرنے کے لیے رکھو  
 م ف (ع) فر ع = ف (ع) اور م فا (ب) فر بہ = سا (ب)  
 تو م بہ فا (ب) فر بہ = بہ فا (ب) - م فا (ب) فر بہ تکمل بالحصص سے  
 = بہ سا (ب) - سا (ب)  
 پس ی = - ۱/۲ (لا - ما) - ف (ع) - بہ سا (ب) + سا (ب) + بہ ف (ع) ع  
 یا بالآخر ی = - ۱/۲ (لا - ما) - ف (ع) + سا (ب) + بہ ما  
 لا = بہ - ع  
 ما = ف (ع) - سا (ب)  
 ان تین مساواتوں سے ایک سطح کی مساوات کی تبدیلی مشکل  
 حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ حل میں دو اختیاری مستقل شریک ہیں اس لیے  
 اس کو عام سے عام ممکن شکل سمجھا جاسکتا ہے۔  
**حل طلب مثالیں**  
 مقررہ بالا طریقوں سے تکمل کرو:  
 (۱) ع + لا - ما = ف (ق - لا + ما ۳)



تفرقی مساوتیں۔ باب ۳۷۴ دو اور اس سے اعلیٰ تہوں کی خبری تفرقی مساوتیں

(۲) ع - لا = ف (ق - ما) (۳) ع - کو = ف (ق - ما)  
 (۴) ع - ما = ف (ق + لا) (۵) ع - ما = ف (ق - لا)  
 ع + ما = ف (ق - لا) ع - ما = ف (ق - لا)  
 (۶) ع - لا = ف (ق - ما) (۷) ع - لا = ف (ق - ما)  
 (۸) (۴) کا ایک خاص حل 'ف' (ع) =  $\frac{1}{4}$  ع +  $\frac{1}{4}$  سا (ب) =  $\frac{1}{4}$  یہ  
 رکھ کر اور ع اور ب کو راقط کر کے حاصل کرو۔

## چودھویں باب پرتفرق مثالیں

(۱)  $۲ = ما$  (۲) لوکس = لا + ما (۳)  $۲ = ما + ق$  (۱۸۸)

(۴)  $۲ = س + ت$  جب (۲ + لا + ما)  
 (۵)  $لا = ۲ - س + ت + ق = ۰$   
 (۶)  $لا = ۳ - س + لا + ما + ت = ۲ + ق + ما = لا + ۲$   
 (۷)  $ما = ۲ + لا + س + لا + ت + ق = ما$   
 (۸)  $۵ + ۶ + س + ۳ + ت + ۲ = (رت - س) + ۳ = ۰$   
 (۹)  $۲ + ع + ۲ + ق + ت = ۴ + ع + ق = (رت - س) = ۱$   
 (۱۰)  $رت - س = ۲ - س$  (جب لا + جب ما) = جب لا جب ما  
 (۱۱)  $۴ - ۸ - س - ۳ + ت = (رت - س) = ۳۶$   
 (۱۲) وہ سطح معلوم کر دو جو  $۶ + لا + ۲$  کو پورا کرے اور  $لا = ۳ + ما$  کو اس کی اس تراش پر سس کرے جو مستوی  $لا + ما + ۱ = ۰$  سے منقطع ہوتی ہے۔  
 (۱۳) وہ سطح معلوم کر دو جو  $۲ - س + ت = ۶$  کو پورا کرے اور زائدی سکافی غای = لا + ما کو اس کی اس تراش پر سس کرے جو مستوی  $ما = لا$  سے منقطع ہوتی ہے۔

تفرقی مساواتیں - باب ۱۲ ۳۷۵ دو اور اس سے اعلیٰ تر ہو چکی تفرقی مساواتیں

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو  $r + t =$  کو پورا کرتی ہے اور  
 $لا + ی^۱ = ا$  کو اس کی اس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی  $ما = ۰$  سے  
 منقطع ہوتی ہے۔ اس کی مساوات کو شکل  
 $ی^۱ (لا + ی - ا) = ما (لا + ی^۱)$

میں حاصل کرو۔ [لسدن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

$$۲ + ق + س + لا + ت - لا (رت - س) = ۲$$

پر مونگے کے طریقہ کو استعمال کرنے سے 'لا'، 'ما'، 'ع'، 'ق' میں جو چار خطی  
 تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان میں سے دو مکمل پذیر ہیں جن سے  
 درمیانی تکملہ

$$ع - لا = ف (ق - لا - ۲)$$

مائل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر تکمل پذیر ہیں لیکن تکملہ

$$ع + \frac{۱}{۲} ق - لا = ۱$$

کو حاصل کرنے میں ملانی جاسکتی ہیں۔  
 پس حل

$$ی = \frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۲} م + \frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۲} ف (لا + ۱) + \frac{۱}{۲} م (لا)$$

$$اور ی = ۱ - \frac{۱}{۲} (لا + ۱) + \frac{۱}{۲} لا + \frac{۱}{۲} م + ۱$$

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ ان میں سے ایک دوسرے کی مخصوص صورت ہے۔

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ  $لا = ۰$  کے متوازی کسی مستوی سے

اس کی تراشیں ایک دائرہ ہے جو محور لایں سے گزرتا ہے۔  
 ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:

$$ما + ی + ما ف (لا) + ی فا (لا) = ۰$$

(۲) ع - لا = ف (ق-ما) (۳) ع - کو = ف (ق-ما)  
 (۴) ع - ما = ف (ق+لا) (۵) ع - ما = ف (ق-لا)  
 ع + ما = فا (ق-لا)      ع - ما = نو (ق-لا)  
 (۶) ع - لا = ما = ف (ق-ما) (۷) (ی-ع) = ن (ی-ق-ما)  
 (۸) گا ایک فی ص عل نو (عہ) = پ عہ سا (ب) = پ ب  
 رکھ کر اور عہ اور یہ کو ساتھ کر کے حاصل کرو۔

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۲ ۳۷۵ دو اور اس سے اعلیٰ ترتیب کی جنٹی تفرقی مساواتیں

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو  $r + t = 0$  کو پورا کرتی ہے اور  
 $لا + ی = ۰$  کو اس کی اس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی  $ما = ۰$  سے  
 منقطع ہوتی ہے۔ اس کی مساوات کو شکل  
 $ی^۲ (لا + ی - ۱) = ما^۲ (لا + ی - ۱)$

میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

$۲ + ق + س + لا + ت = ۰$  (س - ت)  $۲ = ۰$   
 پر مونگنے کے طریقہ کو استعمال کرنے سے  $لا$ ،  $ما$ ،  $ع$ ،  $ق$  میں جو چار خطی  
 تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان میں سے دو مکمل پندیل ہیں جن سے  
 درمیانی تکملہ

$ع - لا = ف$  (ق - لا - ۲)  $ما$   
 حاصل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر تکملی پذیر ہیں لیکن تکملہ

$$ع + \frac{۱}{۳} ق - لا = ۰$$

کو حاصل کرنے میں ملائی جاسکتی ہیں۔

پس حل

$$ی = \frac{۱}{۳} لا - \frac{۲}{۳} ما + \frac{۱}{۳} ف (ما + \frac{۱}{۳} م لا)$$

$$اور ی = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۳} لا - \frac{۲}{۳} ما + \frac{۱}{۳} ف = ۰$$

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ ان میں سے ایک دوسرے کی محض ص صورت ہے۔

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ  $لا = ۰$  کے متوازی کسی مستوی سے  
 اس کی تراش ایک دائرہ ہے جو محور  $لا$  میں سے گزرتا ہے۔  
 ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تغا علی اور تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:  
 $ما + ی + ما ف (لا) + ی فا (لا) = ۰$

تفرقی مساوتیں۔ باب ۳۷۴ دو ادوار سے اعلیٰ رتبہ کی جزئی تفرقی مساوتیں

(۲) ع - لا = ف (ق - ما) (۳) ع - جو = ف (ق - ما)  
 (۴) ع - ما = ف (ق + لا) (۵) ع - ما = ف (ق - لا)  
 ع + ما = ف (ق - لا) ع - ما = ف (ق - لا)  
 (۶) ع - لا = ف (ق - ما) (۷) ع - لا = ف (ق - ما)  
 (۸) (۴) کا ایک خاص ص 'ف' (ع) =  $\frac{1}{4}$  ع 'سا' (ب) =  $\frac{1}{4}$  ع  
 رکھ کر اور ع اور ب کو ساقط کر کے حاصل کرو۔

## چودھویں باب پرتفرق مثالیں

(۱) ۲ = ما (۲) لوک س = لا + ما (۳) ۲ = ما + ت = (۱۸۸)

(۴) ۲ = س + ت = جب (۲ + لا + ما)

(۵) لا ۲ = لا س + ت + ق =

(۶) لا ۳ = س لا + ما + ت + ع + لا ۲ + ق ۲ = لا + ما

(۷) ما ۲ + لا ۲ = لا س + لا ت + ع + لا ق + ما =

(۸) ۵ + ۶ = س + ۳ + ت + ۲ (رت - س) = ۳ =

(۹) ۲ + ۲ = ق ت - ۴ ع ق (رت - س) = ۱

(۱۰) رت - س - ۲ = س (جب لا + جب ما) = جب لا جب ما

(۱۱) ۴ - ۸ = س - ۳ + ت + (رت - س) = ۳۶

(۱۲) وہ سطح معلوم کر دو جو ۶ = لا + ۲ کو پورا کرے اور ۱ = لا

+ ما کو اس کی اس تراش پر مس کرے جو مستوی لا + ما + ۱ = سے  
 منقطع ہوتی ہے۔

(۱۳) وہ سطح معلوم کر دو جو ۲ = س + ت = ۶ کو پورا کرے اور

زائدی مکانی غای = لا + ما کو اس کی اس تراش پر مس کرے جو مستوی

ما = لا سے منقطع ہوتی ہے۔

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۲ ۳۷۵ دو اور اس سے اعلیٰ تہ کی جنہی تفرقی مساواتیں

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو ر + ت = کو پورا کرتی ہے اور  
 لا + ی = ا کو اس کی اس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی م = ۰ سے  
 منقطع ہوتی ہے۔ اس کی مساوات کو شکل  

$$y^2 (لا + ی - ۱) = م^2 (لا + ی)$$
  
 میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

$۲ + ق م + لا ت - لا (رت - م) = ۲$   
 پر مونجے کے طریقہ کو استعمان کرنے سے لا، م، ع، ق میں جو چار خطی  
 تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان میں سے دو مکمل پندیل ہیں جن سے  
 درمیانی تکملہ

ع - لا = ف (ق - لا - م)  
 حاصل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر مکمل پندیل ہیں لیکن تکملہ

$$ع + \frac{۱}{۴} ق - لا = ۱$$

کو حاصل کرنے میں ملانی جاسکتی ہیں۔  
 پس حل

$$y = \frac{۱}{۴} لا - ۲ م لا م - \frac{۲}{۳} م لا + ن (۱ + ف) (م + \frac{۱}{۴} م لا)$$

$$y = (ز - \frac{۱}{۴} ب) لا + \frac{۱}{۴} لا + ب م + ع$$

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ ان میں سے ایک دوسرے کی خصوصیت میں صورت ہے۔

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ لا = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے  
 اس کی تراش ایک دائرہ ہے جو محور لائیں سے گزرتا ہے۔  
 ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تفاعلی اور تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:  

$$م + ی + م ف (لا) + ی ف ا (لا) = ۰$$

$$(ما + ی) ت + ۲ (ی - ما ق) (۱ + ق) = ۰$$

$$(۱۷) لا + ر + ۲ ما س + ۲ ت = ۰ کے حل کو شکل$$

$$ی = ف - \left(\frac{۱}{۱۱}\right) + لا + \left(\frac{۱}{۱۱}\right)$$

میں حاصل کرو۔ ثابت کرو کہ یہ مساوات ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی  
تکونین ان نقطوں سے جو محوری کو قطع کرتے ہیں ہوتی ہے۔  
(۱۸) ثابت کرو کہ رت - س = ۰ سے ”کامل“ تکملہ

$$ی = لا + ب + ما + ج$$

حاصل ہوتا ہے۔

(۱۸۹) ثابت کرو کہ وہ ”عام“ تکملہ جو اس سے ماخوذ ہوتا ہے (حسب دفعہ ۱۳۴)  
ایک کشاد پذیر سطح کو تعبیر کرتا ہے (دیکھو اسمتھ کی رسالہ جیومیٹری دفعات  
۲۲۲-۲۲۳)۔

اس سے ثابت کرو کہ سمتی کشاد پذیر سطح کے لئے ق = ف (ع)  
(۱۹) وہ کشاد پذیر سطح معلوم کرو جو

$$ع ق (ر - ت) - (ع - ق) (س + ع - ما - ق لا) (رت - س) = ۰$$

کو پورا کرے۔

[فرض کرو ق = ف (ع)۔ اس کو پوائسن کا طریقہ کہتے ہیں۔] میں  
حاصل ہوگا

$$ق = لا + ع + ق = ب = ۰$$

جن سے ی = ف (لا + ز) یا ی = ب لاجم ع + ب موجب ع + ج  
اں میں سے دوسرا تکملہ ایک مستوی کو تعبیر کرتا ہے جس سے  
وہ کشاد پذیر سطح تکون پاتی ہے جو تناظر ”عام“ تکملہ سے حاصل ہوتی ہے۔  
(۲۰) اگر کا = ع = ما = ق = ۰ سے ع لا + ق = ما - ی

تو ثابت کرو کہ





میں ان خواص کی تصدیق کرو۔

[یہ تفریق مساوات لاپلاس کی مساوات کی دو بعدی شکل ہے جو تہاذیب برقی سکونیات اور ماحرکیات میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔

۷ اور و کو مزدوج تفاضل کہتے ہیں۔ دیکھو ریفرے کی کتاب "ہیڈرو

میکانکس" جلد دوم دفعہ ۴۱]۔

$$۲۲ - \frac{\text{جف}^۲ \text{ م}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} = \frac{۲}{۱} \frac{\text{جف}^۲ \text{ م}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}}$$

(۱۹۰) کامل شکل

$$\text{م} = \frac{۱}{۲} \text{ ف (لا + ت)} + \frac{۱}{۲} \text{ ف (لا - ت)}$$

$$+ \frac{۱}{۲} \int_{\text{لا-ت}}^{\text{لا+ت}} \text{فا (لہ) فرلہ}$$

میں حاصل کرو اگر م = ف (لا) اور  $\frac{\text{جف}^۲ \text{ م}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} = \text{فا (لا)}$  جبکہ ت = ۰۔

[لا متناہی طول کی ایک مرکز دوری کے کسی نقطہ لا کا عرضی ہٹاؤ م ہے جبکہ دوری فا ابتدائی ہٹاؤ ف (لا) اور رفتار فا (لا) ہو۔ دیکھو ریفرے کی ہیڈرو میکانکس جلد دوم دفعہ ۲۴۸]

$$(۲۳) \text{ اگر } \frac{\text{جف}^۲ \text{ م}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} + \frac{۲}{۱} \frac{\text{جف}^۲ \text{ م}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} = ۰$$

کا ایک حل  $\text{م} = \text{ف (لا) (جم (ن ت) + عم)}$  ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف (لا) = (جب م لا + ب جم م لا + ه جبزم لا + گ جہزم لا)}$$

$$\text{جہاں } \text{م} = \sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{و}}}$$

تفرقی مساواتیں۔ باب ۱۱ ۳۷۹ دو ادوار سے اعلیٰ رتبہ کی بڑی تفرقی مساواتیں

[یہ تفرقی مساوات وہ ہے جو ڈنڈوں کے جابجی ارتعاشوں سے تقریباً پوری ہوتی ہے جبکہ گردش جہود کو نظر انداز کیا گیا ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساؤنڈ" دفعہ ۱۶۳]

(۲۴) ثابت کرو کہ

$$ط = (ج ب) \frac{م}{ا} \frac{ن}{ب} \text{ جب } \frac{م}{ا} \frac{ن}{ب} \text{ جم (ع ج ت + ع)}$$

$$\text{سے مساوات } \frac{جف^۲ ط}{جفت^۲} = ج^۲ \left( \frac{جف^۲ ط}{جف^۲ لا} + \frac{جف^۲ ط}{جف^۲ ما} \right)$$

پوری ہوتی ہے اور ط معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$لا = '، ما = '، لا = ا یا ما = ب$$

بشرطیکہ م اور ن صحیح عدد ہوں جو

$$\left( \frac{ن}{ب} \right)^۲ + \left( \frac{م}{ا} \right)^۲ = \left( \frac{ع}{ا} \right)^۲$$

کو پورا کریں۔

[اس سے ایک مرتعش جھلی کی تفرقی مساوات کا ایک حل حاصل

ہوتا ہے جبکہ جھلی کا احاطہ ایک ثابت مستطیل ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب

"ساؤنڈ" دفعہ ۱۹۴ تا ۱۹۹]

(۲۵) ثابت کرو کہ

$$ط = (ج ب) (ن ر) \text{ جم (ن ج ت + ع)}$$

سے مساوات

$$\frac{جف^۲ ط}{جفت^۲} = ج^۲ \left( \frac{جف^۲ ط}{جف^۲ ر} + \frac{جف^۲ ط}{جف^۲ ر} \right)$$

پوری ہوتی ہے جہاں جے، رتبہ صفر کا نیل کا تفاعل ہے [دیکھو دفعہ

۹۷ کے آخر مثال (۲)]

[ اس سے ایک مرتبہ جھلی کی تفرقی مساوات کا حل حاصل ہوتا ہے جبکہ جھلی کا احاطہ ایک ثابت دائرہ ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب ”ساؤنڈ“ دفعہ ۲۰۰ تا ۲۰۶ ]  
(۲۶) ثابت کرو کہ

$$w = (r^n + b r^{-n}) e^{i\theta} \quad (\text{جم طہ})$$

سے مساوات

$$\frac{w}{r} = \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} = 0$$

پوری ہوتی ہے جہاں  $e^{i\theta}$  رتبہ  $n$  کا لیجنڈر کا تفاعل ہے [ لیجنڈر کی مساوات

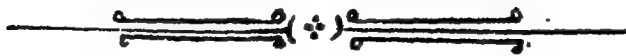
کے لیے دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۹ کے ختم پر ]

[ نوٹ:  $e = \text{جم طہ کو ایک نئے متغیر کے طور پر لو۔ یہ مساوات}$

وہ شکل ہے جو لاپلاس کی قوہ مساوات (تین ابعاد میں) اختیار کرتی ہے

جبکہ یہ معلوم ہو کہ  $w$  ایک محور کے گرد متماثل ہے۔ دیکھو اوٹھ کی کتاب

”اینا لٹیکل اسٹائٹس“ جلد دوم دفعہ ۳۰۰ ]



(۱۹۱)

# پندرہواں باب

## متفرق طریقے

۱۵۹۔ یہ باب چھ حصوں پر مشتمل ہے۔ پہلا حصہ (دفعات ۱۶۰، ۱۶۱) چھٹے باب کا تکملہ ہے۔ اس میں ان مشکلوں سے بحث کی گئی ہے جو نادریوں کے نظریہ میں پیش ہوتی ہیں، نیز لفاف کی تعریف پر غور کیا گیا ہے اور جس طریقہ پر نمیزوں میں مخصوص حل وقوع پذیر ہو سکتے ہیں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔

دوسرے حصہ (دفعات ۱۶۲ تا ۱۶۷) میں ریچی (Riccati)

کی مساوات پر خاص کر مہتمم عام شکل میں بحث کی گئی ہے مثالوں میں ایک سلسلہ ملے گا جس سے یہ معلوم ہوگا کہ کن صورتوں میں ریچی کی اصلی مساوات محدود درجہوں میں بحال کی جاسکتی ہے۔

تیسرے حصہ (۱۶۸ تا ۱۷۰) میں تفرقی مساواتوں پر ہمیشہ مجموعی بحث کی گئی ہے چنانچہ وہ گیارہویں باب کا تکملہ ہے۔ مثالوں میں مساواتوں کے لیے مکمل جزو تفرقی کا استعمال مبتدی کو دلچسپ نظر آئے گا لیکن میر کا طریقہ نظریہ کے لحاظ سے بہت دلچسپ ہے۔ چوتھے حصہ (دفعات ۱۷۱ تا ۱۷۷) میں دوسرے درجہ کی تفرقی مساواتوں سے بحث کی گئی ہے اور ان کا حل ایک سلسلہ میں معلوم کیا گیا ہے۔ یہ نویں اور دسویں باب کا تکملہ ہے۔ دوسرے

اعلیٰ رتبوں کی تفرقی مساواتوں کے چند نتیجے بھی شامل کئے گئے ہیں۔  
 پانچویں حصہ (۷۸ تا ۱۸۱) میں ریاضیاتی طبیعیات کی چند  
 مساواتوں سے خاص کر وہ جو حرکت امواج سے متعلق ہیں بحث  
 کی گئی ہے۔ یہ جو تھے اور جو دہویں بابوں کا تکملہ ہے۔  
 بالآخر چھٹے حصہ (۱۸۲ تا ۱۸۳) میں تفرقی مساواتوں کے  
 حل کے عددی تقریبات پر بحث کی گئی ہے۔ یہ آٹھویں باب کا  
 تکملہ ہے۔ آڈمس کا طریقہ بیان کر دینے کے بعد جو نا حال بہترین  
 طریقہ سمجھا جاتا ہے مصنف کے طریقہ کی چند توسیعات (ای۔ ایمس  
 سے منسوب) کا خلاصہ درج ہے۔

## ۱۶۰۔ نادر حلوں کے نظریہ میں بعض مشکلیں۔ (۱۹۲)

اب ہم چھٹے باب کی تکمیل 'لفاف' نادر حل اور خاص  
 مشکلوں سے متعلق بعض مشکلوں کا ذکر کر کے کریں گے۔  
 منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی پُرانی تعریف یہ ہے کہ  
 وہ متصلہ منحنیوں کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق  
 ہوتا ہے، یہ تعریف چھوڑ دینی پڑے گی کیونکہ اس کی رو سے یہ  
 منحنی نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ایک منحنی اپنے انحناء کے دائروں کا  
 لفاف نہیں ہوتا۔ پوائسن نے لفاف کی یہ تعریف کی ہے کہ وہ

لفافوں کے لیے دیکھو نوٹ کی "Elementary Differential Geometry of Plane Curves"  
 پانچواں باب۔ نادر حلوں کے لیے دیکھو

The Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften II. A 4 and III D 8  
 ۱۷ ایک منحنی کے متصلہ نقطوں اور فن کے متناظر کرانحناء ج اور ج اس منحنی کے برعکس  
 واقع ہوتے ہیں۔ نصف قطر انحناء ج و فن اور ج فن کے درمیان فرق برعکس کی قوس  
 ج ج ہے۔ یہ قوس بالعموم دترج ج سے بڑی ہوتی ہے یعنی اس فاصلہ سے بڑی  
 (بقیہ دیکھو آئندہ صفحہ پر)

منفرد مینر نقطوں کا طریق ہوتا ہے (یعنی ایک منحنی کے ان معمولی نقطوں کا جن کے فاصلے متصلہ منحنیوں سے پہلے رتبہ سے زیادہ چھوٹے ہوں)۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض صورتوں میں یہ تعریف بھی اطمینان بخش نہیں ہے۔ ہمارے مقاصد کے لیے سب سے زیادہ سہولت بخش تعریف غالباً یہ ہے کہ لفاف ایک منحنی ہے جو قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے کسی نہ کسی رکن سے مس ہوتا ہے۔ یہ اس تعریف سے متعلق ہے جو صفحہ ۱۲۶ پر دی جا چکی ہے لیکن اس تعریف کا دوسرا حصہ سرکجا بیان نہیں کیا گیا تھا لیکن بعد والے جملہ میں یہ بات مضمر تھی۔

نادر حل کی کم سے کم تین مختلف تعریفیں ہیں۔ ہماری تعریف (صفحہ ۱۲۶) یہ ہے کہ یہ وہ حل ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ منحنیوں کے قبیل کے لفاف کے متناظر حل

(بقیہ صفحہ گذشتہ) جو انحصار کے مرکوزوں کے درمیان ہے۔ اس طرح ایک دائرہ انحصار دوسرے دائرہ انحصار سے گزرتا ہوتا ہے اور اس لیے حقیقی نقاط تقاطع حاصل نہیں ہوتے۔ دوسری صورتیں جہاں یہ تعریف ناکام رہتی ہے مثال ۱۳ دفعہ ۱۶۱ میں ملیں گی۔

۱۷ دیکھو Neville, Proc Camb. Phil. Soc Vol XXI. P. 97, 1922.

۱۸ یہ وہ تعریف ہے جو اعلیٰ معیار کے مقالوں میں اختیار کی جاتی ہے (دیکھو

Ince's Ordinary Differential Equations

نفا لقصیدہ یکھو صفحہ آئندہ)

۱۔ اعلیٰ رتبوں کی تفرقی مساواتوں کے چند نتیجے بھی شامل کئے گئے ہیں۔  
 پانچویں حصہ (۷۸ تا ۱۸۱) میں ریاضیاتی طبیعیات کی چند  
 مساواتوں سے خاص کر وہ جو حرکت امواج سے متعلق ہیں بحث  
 کی گئی ہے۔ یہ جوئے اور چودھویں بابوں کا تکملہ ہے۔  
 بالآخر چھٹے حصہ (۱۸۲ تا ۱۸۳) میں تفرقی مساواتوں کے  
 حل کے عددی تقریبات پر بحث کی گئی ہے۔ یہ آٹھویں باب کا  
 تکملہ ہے۔ آڈمس کا طریقہ بیان کر دینے کے بعد جو تا حال بہترین  
 طریقہ سمجھا جاتا ہے مصنف کے طریقہ کی چند توسیعات (ای-ایس  
 سے ضمیمہ) کا خلاصہ درج ہے۔

## ۱۶۰۔ نادر حلوں کے نظریہ میں بعض مشکلیں۔ (۱۹۲)

اب ہم چھٹے باب کی تکمیل، لفاف، نادر حل، اور خاص  
 مشکلوں سے متعلق بعض مشکلوں کا ذکر کر کے کریں گے۔  
 منحنیوں کے نسبی قبیل کے لفاف کی پُرانی تعریف یہ ہے کہ  
 وہ متصلہ منحنیوں کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق  
 ہوتا ہے، یہ تعریف چھوڑ دینی پڑے گی کیونکہ اس کی رو سے یہ  
 مضحک نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ایک منحنی اپنے انحناء کے دائروں کا  
 لفاف نہیں ہوتا۔ پوائسن نے لفاف کی یہ تعریف کی ہے کہ وہ

۱۱۔ لفافوں کے لیے دیکھو نوٹ ۱۱ "Elementary Differential Geometry of Plane Curves"

پانچواں باب۔ نادر حلوں کے لیے دیکھو

The Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften II. A 4 and III D 8

۱۲۔ ایک منحنی کے دو متصل نقطوں  $F$  اور  $F'$  کے متناظر انحناء  $J$  اور  $J'$  اس منحنی کے پرچہ  
 واقع ہوتے ہیں۔ نصف قطر انحناء  $J$  اور  $J'$  کے درمیان فرق پرچہ کی قوس  
 $J$  ہے۔ یہ قوس بالعموم وتر  $J$  سے بڑی ہوتی ہے یعنی اس فاصلہ سے بڑی  
 (بقیہ دیکھو آئندہ صفحہ ۳۸۳)

منفرد ممیز نقطوں کا طریق ہوتا ہے (یعنی ایک منحنی کے ان معمولی نقطوں کا جن کے فاصلے متصلہ منحنیوں سے پہلے رتبہ سے زیادہ چھوٹے ہوں)۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض صورتوں میں یہ تعریف بھی اطمینان بخش نہیں ہے۔ ہمارے مقاصد کے لیے سب سے زیادہ سہولت بخش تعریف غالباً یہ ہے کہ لفافہ ایک منحنی ہے جو قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے کسی نہ کسی رکن سے مس ہوتا ہے۔ یہ اس تعریف کے مطابق ہے جو صفحہ ۱۲۶ پر دی جا چکی ہے لیکن اس تعریف کا دوسرا حصہ سر بخوابیان نہیں کیا گیا تھا لیکن بعد والے جملہ میں یہ بات مضمر تھی۔

نادر حل کی کم سے کم تین مختلف تعریفیں ہیں۔ ہماری تعریف (صفحہ ۱۲۶) یہ ہے کہ یہ وہ حل ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ منحنیوں کے قبیل کے لفافہ کے متناظر حل

(بقیہ صفحہ گذشتہ) جو انحناء کے مرکزوں کے درمیان ہے۔ اس طرح ایک دائرہ انحناء دوسرے دائرہ انحناء سے گزرتا ہوتا ہے اور اس لیے حقیقی نقاط تعلق حاصل نہیں ہوتے۔ دوسری صورتیں جہاں یہ تعریف ناکام رہتی ہے مثال ۱۲ صفحہ ۱۶۱ میں ملیں گی۔

۱۵ دیکھو Neville, Proc Camb. Phil. Soc Vol XXI, P. 97, 1922.

۱۶ یہ وہ تعریف ہے جو اعلیٰ معیار کے مقالوں میں اختیار کی جاتی ہے (دیکھو

Ince's Ordinary Differential Equations

(بقیہ صفحہ یکہو صفحہ آئندہ)



ہوتا ہے۔ لیکن بعض سہلے امور توں میں تفاوت ضرور پیش کا ایک  
مخصوص منحنی ہوتا ہے مثلاً اسکا  $y = x^2$  (۱۱-ج) خط یا یہ کہ نقطہ  
(ج) پر سے گزرتا ہے۔ اس سے  $y = x^2$  اور  $y = x^2 + 1$  کے درمیان کا فاصلہ  
ج کو صفر سے جو اتنا کم ہو جتنی  $y = x^2$  سے حاصل ہوتا ہے اور اس میں  
وہ مخصوص منحنی بھی شامل ہوتا ہے  $y = x^2 + 1$ ۔ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے  
ہماری تعریف کی بہرہ جب  $y = x^2$  کو اس میں  $y = x^2 + 1$  کی تفرقی مساوات کا نادر  
حل اور خاص تکملہ دونوں سمجھنا چاہئے (مثال ۶ صفحہ ۱۸۲)۔ لیکن  
بعض علماء اصطلاح "نادر" کو صرف ایسے حل کے لیے استعمال کرتے ہیں جو کامل  
ابتدائی میں واقع شدہ اختیاری مستقل متقل ہو سکیں۔

۱۹۲

مستقل قیمت دینے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔ نادر  
حل کی ایک تیسری تعریف یہ ہے کہ وہ  $y = x^2$  میں واقع ہوتا  
ہے۔ دقت: ۱۱ میں یہ بتلایا جائے گا کہ ایسے حل سے نفاذ کا  
تعبیر ہونا ضروری نہیں ہے۔ وہ ایک خاص حل ہو سکتا ہے یا  
اس کی انتہائی شکل۔  
مگر ہے نائب علم یہ فرض کر لے کہ منحنیوں کے درمیان کا جو  
ایک تبدیل پر منحصر ہو تفاوت ہوتا ہے اور اس میں ہر تفرقی مساوات  
کا جو پہلے رتبہ کی اور پہلے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی ہو ایک نادر حل

(بقیہ مگر گذشتہ صفحہ ۸۴ اور *Differentialgleichungen* ۱۸۲)

صفحہ ۸۵) مختلف ماصوں سے منحنیوں کو بیان کرتے وقت ان تعریفوں کا حوالہ  
دینا ضروری ہے جن پر وہ مبنی ہیں اور نہ بڑا انتشار پیدا ہوگا۔

۱۱ مثال ۱۰ صفحہ ۱۹۱

ہوتا ہے۔ لیکن ایسا نہیں ہے۔ نفاذوں پر بحث کرنے میں ضمنیاً فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ تفاعل جو قبیل کی مساوات میں واقع ہوتے ہیں تسلسل سے متعلق بعض شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔ یہ شرطیں ان مساوات تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائیوں کے لیے بالعموم پوری ہوتی ہیں جو نادر علوں کی ابتدائی بحث میں دی جاتی ہیں لیکن یہ اس واقعہ پر مبنی ہے کہ ایسی مثالوں کو تیار کرنے میں دو اصل کامل ابتدائیوں سے ہی ابتدا کی گئی تھی۔ اگر ہم اسی شکل کی عام ترین تفرقی مساوات سے ابتدا کریں تو یہ فرض کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ کامل ابتدائی ان شرطوں کو جو نفاذ کی موجودگی کے لیے ضروری ہیں پورا کرے گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ نادر عل کی موجودگی کو قاعدہ کے طور پر نہیں بلکہ استثناء کے طور پر سمجھنا چاہئے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نفاذوں کو معلوم کرنے کا معمولی عمل (دفعہ ۵۶) کامل ابتدائی کی ایک شکل کے لیے ناکام ہو سکتا ہے اور دوسری شکل کے لیے کامیاب۔ مثلاً وہ  $\text{لا} + \text{ما} = \text{ج}$  کے لیے یا لا + جب + ما = ج کے لیے تو ناکام رہتا ہے لیکن

$$(\text{لا} + \text{ما} - \text{ج}) = \text{لا} + \text{ما} - \text{ج} = \text{ج} - (\text{ج} - \text{لا})$$

کے لیے موثر

مساوات  $\text{لا} + \text{ما} = \text{ج}$  سے جس سے  $\text{ما} = \text{لا} - \text{ج}$  حاصل

ہوتا ہے ایک اور بات واضح ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات،  $\text{ما} =$  سے پوری ہوتی ہے لیکن  $\text{لا} =$  سے بمشکل پوری ہو سکتی ہے کیونکہ  $\text{ع} = \infty$  حاصل ہوتا ہے اور طرفین غیر متعین ہو جاتے ہیں تاہم  $\text{لا} =$  اور  $\text{ما} =$  دونوں نحیفوں کے (محوروں کو سبز بنوائے مکانی) قبیل کے نقائیں اور

دونوں ما (فرلا) = لا (فرما) کو پورا کرتے ہیں جو ایک تفرقی رشتہ ہے جس سے ہنسی حقایق تفرقی مساوات کی بہ نسبت زیادہ صحت کے ساتھ تعبیر ہوتے ہیں۔ [مقابلہ کرو مثال ۱۵۶ صفحہ ۱۱۱ اور مثال ۱۶۴ کے ساتھ۔ پہلی مثال میں لا = ایک مخصوص منحنی کی انتہائی شکل ہے۔ اور دوسری مثال میں وہ ایک لفاف اور نیز قرن طریق ہے۔] ایسی صورتوں میں ہم لا = کو طوں کی فہرست سے خارج کرنے پر مجبور ہوتے ہیں لیکن اس اخراج کی وجہ یہ سمجھی جاسکتی ہے کہ تفرقی مساوات محور ما کے متوازی سمتوں کو ٹھیک طور پر تعبیر کرنے سے قاصر ہے اور اس کی وجہ یہ نہیں ہے کہ خود لفاف میں کوئی خصوصیت ہے۔

### ۱۶۱۔ مینر۔ خاص حل۔ حدود۔

اس دفعہ میں ہم اپنی توجہ صرف لفاف (لا، ما، ج) = کے کامل ابتدائیوں پر محدود رکھیں گے اس میں ف (لا، ما، ج) ایک کثیر رقمی ہے جو لا، ما، اور ج میں بیان کیا گیا ہے۔ اس کثیر رقمی کو شکل

$$J_0(لا، ما، ج) + J_1(لا، ما، ج) + \dots + J_{n-1}(لا، ما، ج) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n} J_n(لا، ما، ج) + \dots + \frac{1}{n} J_n(لا، ما، ج) =$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ ج مینر ج کی یہ تعریف (الاعدی جزو ضربی کے

کی جاتی ہے کہ وہ  $J_0^{(2)} - J_1^{(2)}$  اور اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل

ضرب ہے،  $J_0^{(2)} - J_1^{(2)}$  کو اس وجہ سے داخل کیا گیا ہے کہ نتیجہ  $J_0^{(2)} - J_1^{(2)}$ ...

1-1-1

$$(\frac{r}{r} - \frac{r}{r} \frac{r}{r}) (\frac{r}{r} - \frac{r}{r} \frac{r}{r}) \sim (\frac{r}{r} \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \frac{r}{r})$$

$$\left( \frac{r}{r} - \frac{1}{r} \frac{r}{r} - \frac{1}{r} \frac{r}{r} - \frac{1}{r} \frac{r}{r} + \frac{1}{r} \frac{r}{r} \right) r = - \left( \frac{r}{r} r + \frac{1}{r} \frac{r}{r} - \frac{1}{r} \frac{r}{r} \right)$$

چوتھے باب کے مطابق لفظ ”میز“ کو نہ صرف تفاعل چ کی تعبیر کے لیے بلکہ مساوات  $\Delta =$  کے لیے اور اس مساوات سے

تعبیر شدہ طریقوں ۱ Locci کے لیے بھی بعض اوقات استعمال کیا جائیگا۔

نادر حلوں کے سوالات حل کرنے میں میمنزوں کو محسوب کرنے کا ایک باقاعدہ طریقہ استعمال کرنا مناسب ہے۔ دو درجیوں، تہجیوں اور چار درجیوں کے لیے اوپر کے نتیجے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ اگر  $\Delta$  کو دفعہ ۵۶ کے مطابق عملِ استقاط سے معلوم کیا جائے تو ممکن ہے

کہ بعض اجزاء ضروری چھوٹ جائیں۔ اس لیے ایسے عمل استقامت کے لیے مناسب یہ ہے کہ سٹوسٹر کا بین تجلیلی طریقہ استعمال کیا جائے۔ اس طریقہ کو یہاں استعمال کرنے میں ہم ف کو ج<sup>۲</sup>-ج<sup>۳</sup>، ج<sup>۴</sup>... ج<sup>۱۰</sup>

سے اور  $\frac{\text{جف ن کو ج}^{\text{ن-۱}} \text{ ج}^{\text{۵-۲}} \dots \text{ ج}^{\text{۱}}}{\text{جف ج}}$  سے ضرب دیتے ہیں

۱۵۔ ان کو استعمال کرتے وقت یہ یاد رہے کہ ۱۔ ہی اصلی سر نہیں ہیں بلکہ ان کے ساتھ شنائی  
عدوی اجزائے ضربی بھی ہیں مثلاً اُچاؤدج کی صورت میں ج کا سر ۱ نہیں بلکہ ۶ ہے۔

اور اس طرح جو (۱-۲) مساوتیں حاصل ہوتی ہیں ان سے ج<sup>۲</sup> - ۵۲ ج<sup>۲</sup> - ۲،  
 ... ج<sup>۲</sup> کو ساقط کرتے ہیں، اس طرح (۱-۲) صفوں اور ستونوں کا  
 ایک مقلعہ حاصل ہوگا۔ دو درجی ج<sup>۲</sup> + ۲ ج<sup>۲</sup> + ۱ = ۰ کے لیے اس  
 طریقہ سے

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (1-2-2) = -3$$

حاصل ہوگا۔ لیکن اس میں جزو ضربی ۱ زائد ہے اور یہ دیکھنا آسان  
 ہے کہ یہی زائد جزو ضربی وقوع پذیر ہوگا خواہ ف کا درجہ کچھ ہی ہو اور اس  
 طرح ٹھیک درجہ (۲-۲) کی بجائے درجہ (۱-۲) کا ایک جملہ  
 حاصل ہوگا۔ اس باب کے آخر میں دی ہوئی مثالوں پر سلسلہ سطر کا طریقہ  
 استعمال کیا جائے تو اس جزو ضربی کو جدا کرنا چاہئے۔

(۱۹۵) ان مثالوں کا پہلا مقصد ان طریقوں کی توضیح کرنا ہے جن میں  
 ج اور ع میزوں سے خاص حل یا انکی انتہائی شکلیں حاصل ہوتی ہیں  
 بعض صورتوں میں حل ایک مخصوص منحنی کے صرف ایک حصہ کے  
 طور پر واقع ہوتے ہیں (مثال ۱)۔ ان کی ہندسی تعبیر مختلف شکلیں  
 اختیار کرتی ہے۔ چنانچہ وہ لفاف ہو سکتے ہیں اور اس لیے نادر حل  
 بھی (مثال ۲) یا عقدہ طریقی ہو سکتے ہیں (مثال ۳) یا قرن طریقی  
 (مثال ۴) یا تماس طریقی (مثال ۵) یا متقارب (مثال ۶) یا تماس  
 جو قبیل کے تمام منحنیوں کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہوں (مثال ۷)  
 وہ صرف خطوط (ماس نہیں) ہو سکتے ہیں جو قبیل کے ایک مشترک نقطہ  
 میں سے گزرتے ہوں (مثال ۷)۔ کلیرو کی شکل کے سلسلہ میں یہ

کہا جاسکتا ہے کہ مذکورہ بالا اعلیٰ لفاف کے انعطافی حماس سے حاصل ہوتے ہیں (مثال ۹)۔

بعض اوقات یہ بیان کیا جاتا ہے کہ جب میمنروں میں خاص

حل وقوع پذیر ہوتے ہیں تو وہ ج مہینرے میں پہلی قوت میں اور ج مہینرے میں تیسری قوت میں واقع ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ کو دفعہ ۶۴ کے قاعدوں کے ساتھ علامتی شکل

ج = ل ع ق خ ' د = ل م ق خ

میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں 'ل'، 'ع'، 'ق'، 'خ' اور 'ہ' علی الترتیب لفافہ عقدہ طریق، قرن طریق، خاص حل اور تناسط طریق کو تعبیر کرتے ہیں۔ یہ قاعدے سادہ صورتوں میں اندازہ لگانے کے لیے مفید ہیں لیکن ایسی مثالیں بہ آسانی بنائی جاسکتی ہیں جن میں یہ قاعدے ناکام رہتے ہیں (مثال ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲)۔

اب ہم خاص حلوں اور دیگر مستثنیٰ طریقوں (Locī) کے اس تخیل کی صراحت کریں گے جو حدود سے متعلق ہے۔ ہم صرف اس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھیں گے جس میں ف (لا، ما، ج) لا، ما، ج میں ایک شے چھپی ہوئی ہے اور ایسا کہ لا، ما کی حقیقی قیمتوں کے ہر زوج کے متناظر ج میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی م اصلیں (فرض کرو) حقیقی مخنیوں کے متناظر اور (ن - م) خیالی اصلیں خیالی مخنیوں کے متناظر ہوتی ہیں نیز ہم یہ

لے یہاں اور دیگر مقاموں پر میں نے اُن قیمتی مشوروں کا بڑا خیال رکھا ہے۔ جن کو سٹرلج۔ بی۔ نیچل سابق پروفیسر یا صہی جامعہ کو لمبیا نیویارک نے دیے تھے لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ اس بحث کا انکو ذمہ دار ٹھہرایا جائے کیونکہ ہم دونوں کے نقطہ نظر میں شامل اختلاف ہے۔

سمجھیں گے کہ یہ اصلیں جو لا اور ما کے تقابل ہیں مسلسل متغیر ہوتی ہیں  
جبکہ لا اور ما مسلسل متغیر ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خاص منحنی ب (لا، ما) = ۰ (جو اضعا فی شکل  
میں نہیں ہے یا متعدد مفرد منحنیوں سے مرکب نہیں ہے) دو علاقوں کے  
درمیان ایک حد ہے اور یہ علاقے ایسے ہیں کہ ان میں سے ایک میں  
م کی ایک خاص قیمت ہے اور دوسرے میں اس کی قیمت صفر ہے۔  
اب خیال کرو کہ نقطہ (لا، ما) پہلے علاقہ میں سے مسلسل حرکت کر کے اس کے باہر  
نکلتا ہے اور حد ب کو عبور کر کے دوسرے علاقہ میں داخل ہوتا ہے تو اس  
دو مان میں حقیقی اور نامساوی اصولوں کا ایک زوج ایک دوسرے کے قریب  
آتا ہے اور حد پر پہنچ کر یہ اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہو جاتی ہیں اور بالآخر دوسرے  
علاقہ میں گزرنے پر یہ اصلیں مزدوج ملتف ہو جاتی ہیں۔ آج جس میں ان اصولوں کے  
مغزوں کا مربع شامل ہے ب پر معدوم ہونا چاہئے۔ اور پھر اس کی علامت  
بدلتی چاہئے کیونکہ دو مزدوج ملتف اصولوں کے فرق کا مربع منفی ہوتا  
ہے۔ ب (لا، ما) کو بھی علامت بدلتی چاہئے جبکہ (لا، ما) اس کو  
عبور کرے۔ اس کو زیادہ عام شکل میں اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے  
کہ اگر م صفر سے صفر ۲ تک بدلے جہاں ایک طاق صحیح

(۱۹۶)

حد ہے تو آج علامت بدلے گا اور ب (لا، ما) آج میں واقع ہوگا  
اور ب (لا، ما) کی قوت ایک طاق عدد ہوگی (لیکن اس عدد کا ر  
ہونا ضروری نہیں ہے، دیکھو مثال ۴۱ جہاں ب (لا، ما) تیسری  
قوت میں واقع ہے لیکن ۱ = ۱)۔ اگر ایک جفت صحیح عدد ہو تو  
ب (لا، ما) ایک جفت قوت میں وقوع پذیر ہوگا۔ اس کے بالعکس  
اگر ب (لا، ما) ایک طاق قوت میں واقع ہو تو ر کو طاق ہونا چاہئے  
لیکن اگر ب (لا، ما) ایک جفت قوت میں واقع ہو اور اس لیے آج کی علامت

نہ بدلے تو رکھا جفت ہونا ضرور نہیں، وہ صفر ہو سکتا ہے جیسا کہ مثال ۱۳ میں جس میں جب ایک لفاف ہے جس کو قبیل کے تمام متغنی عبور کرتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں لفاف کو ایک جفت قوت میں وقوع پذیر ہونا چاہئے جو قاعدہ  $\Delta = \Delta$  ل ع<sup>۲</sup> ف<sup>۲</sup> خ کے خلاف ہے۔ اسی طرح  $\Delta$  پر بحث کی جاسکتی ہے اگر ہم ایک نقطہ میں سے گزرنے والے حقیقی متغنیوں کی تعداد کی بجائے حقیقی سمتوں کی تعداد جو اس میں سے گزرے رکھیں۔ ایک خاص دلچسپ صورت کلیہ کی شکل کی ہے (مثال ۹)۔ لفاف کا انعطافی تماس ع میں دو مساوی اصولوں کے متناظر ہے اور اس لیے  $\Delta = 0$  حاصل ہوتا ہے۔ نیز کلیہ کی شکل میں

$$\Delta = \Delta, \Delta = 0$$

نادر طوں کی تحقیق کا متبادل ہندسی طریقہ یہ ہے کہ ع کی بجائے رکھا جائے اور اس طرح تفرقی مساوات کو ایک سطح کی جبر یہ مساوات میں تبدیل کیا جائے۔ اسی طرح کامل ابتدائی میں ج کی بجائے ی رکھا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ میں سطحوں کے علم ہندسہ سے اچھی طرح واقف ہونے کی ضرورت ہے۔

نادر طوں کے نظریہ میں اس وقت بھی مشکلیں پیش آتی ہیں جبکہ تفرقی مساواتوں کے سر لا اور مائیں کثیر رقمی ہوں اور جب سر علوی تغالعات ہوتے ہیں تو ان مشکلوں میں بڑا اضافہ ہو جاتا ہے۔

Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften III D 8

Goursat's Cours d'Analyse Mathematique, Vol. II. 4th. ed. Art. 485

M. J. M. Hill, Proc. Lond. Math. Soc., Series 2, Vol. 17, 1918. P. 149



## حل طلب مثالیں

[ہم کامل ابتدائی 'ج' مینز 'ع' مینز اور نادرجل کو علی الترتیب گ۔ ا، د، د، اور ن۔ ح سے تعبیر کریں گے۔ دج اور دج کو اوپر کے ضابطوں سے حاصل کیا گیا ہے لیکن عددی اجزائے ضربی ترک کئے گئے ہیں۔]

طالب علم کو خام تیرہیں (لا اور ما کی ٹھیک قیمتیں محسوب کئے بغیر) کھینچی جائیں جن سے ٹھنیوں کے قبیل کے چند ارباب کی شکل معلوم ہوگی اور نیز ان طریقوں کے لحاظ سے ان کا محل معلوم ہوگا جو مینزوں سے حاصل ہوتے ہیں۔]

(۱) گ۔ ا، ما (لا + ج) + ج = دج۔ دیا گیا ہے تفرقی مساوات  
لا + ع + ما (لا - لا - ما) + ع + ما = دج۔

نیز دج = ما (لا - لا - ما) + ع = دج = ما (لا - لا - ما) حاصل کرو۔

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے گ۔ ا قائم زائدوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے۔ ان سب زائدوں کا ایک متقارب ما = ہے اور نیز وہ خاص نکتہ لا ما = کا ایک حصہ ہے جس کو گ۔ ا سے ج = دج رکھ کر حاصل کیا گیا ہے۔ لہذا ما = لا ہے (جو ایک ن۔ ح ہے)۔ قاعدے دج = ل ع ق خ

دج = ل م ق خ درست رہتے ہیں۔ مستوی کو چار علاقوں میں تقسیم

کیا جاسکتا ہے جن میں سے دو میں قبیل کے حقیقی ٹھنیوں کی تعداد جو کسی نقطہ

میں سے گزرتے ہیں دو ہے لیکن دوسرے دو علاقوں میں یہ تعداد صفر ہے۔

ان علاقوں کے درمیان حدود وہ طریق ہیں جو مینزوں سے حاصل ہوتے ہیں

اور یہ دونوں مینز طاق قوتوں میں وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ ہمارے حدود کے نظریہ کے مطابق ہے کیونکہ اس صورت میں م = ۲، م = ۲، اسیلے ر = ا جو طاق ہے۔]

(۲) گ۔ ا، ج (لا - ج) + ج = دج۔ تفرقی مساوات

ع = لا ما ع + ما = دج

نیز دج = ما (لا - لا - ما) + ع = دج = ما (لا - لا - ما) حاصل کرو۔

(۱۹۷)

[میزوں کو محسوب کرنا: راجست نامب ہے۔ ما = عقدہ طریق ہے اور خاص حل بھی ہے۔ لا = تمام تخینوں کا مجموعہ۔ مثلاً ایک کماں ہے الا اس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰۔ (دیکھو مثال ۸) لا = ۶۴ مالفاٹ ہے۔ یہ سمجھنے کے لیے کہ مختلف اجزائے ضربی میزوں میں اضافہ یا جفت قوتوں میں کیوں وقوع پذیر ہوتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ان علاقوں کے درمیان ایک عدد ہے جہاں کسی نقطہ میں سے گزرنیوالے حقیقی تخینوں کی تعداد صفر سے زیادہ بڑھتی ہے لیکن لفاٹ ان علاقوں کے درمیان حد ہے جہاں یہ تعداد صفر سے چار تک بڑھتی ہے۔ ما = پر یہ چار درودو کر کے منطبق ہوتے ہیں لیکن مثبت حصہ کی ہر جانب اس کے اور لفاٹ کی ایک شاخ کے درمیان تعداد دو ہی چار ہے قاعدے کے ل = ع ق خ، ع = ل م ق خ، طریقوں Loni لا = اور ما = کی ہندی تعبیر بیان کرنے میں ناکام رہتے ہیں۔]

(۴) گ - ۱ = ۴ = ۲ (ج - لا - ج) ہے۔ تفرقی مساوات

$$ما = ۳ - لا + ع + ۲ = ۰$$

نیز  $ج = ما - لا = ع$  (ما - لا) حاصل کرو۔

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے گ - ۱ نیم کعبی مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جس کے قرن ما = ۰ پر ہیں جو قرن طریق اور نیز ایک خاص مل ہے۔ ما = لا ایک لفاٹ ہے (ایک ن - ج) - قاعدوں کے ل = ع

ق خ، ع = ل م ق خ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ما = ۰ قرن طریق ہے لیکن ان قاعدوں سے یہ نہیں معلوم ہوتا کہ ما = ۰ ایک خاص حل بھی ہے]

(۵) گ - ۱ = ۴ = ۲ (ج - لا - ج) ہے۔ تفرقی مساوات

$$ما = ۴ - لا + ع + ۲ = ۰$$

نیز  $ج = ما - لا = ع$  (ما - لا) حاصل کرو۔

(۱۹۸)

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے گ۔ ۱) یکا فیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جس کا محور  $\alpha = 0$  ہے اور اس محور کا ہر نقطہ قبیل کے دو مکا فیوں کا راس ہے جن کے تقعر مخالف سمتوں میں ہیں۔  $\alpha = 0$  - طریق اور نیز ایک خاص حل ہے۔  $\alpha = 0$  لافات ہے (ن-ج)۔  $\alpha = 0$  ج (۳-لا-ج) لاف کو نقطوں {ج<sup>۲</sup> ± ج<sup>۲</sup>} پر مرس کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج منفی ہے

اور وہ لافات کو نقطوں {ج<sup>۱</sup> ± ج<sup>۱</sup>} پر قطع کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج مثبت ہے۔ ثابت ہے کہ  $\alpha = 0$  لافات کا پتہ چلتا ہے لیکن خاص میں یہ نہیں آتا۔

(۶) ثابت کر دو کہ م کی غیر صفر تمام قیمتوں کے لیے

$$\alpha^2 - \epsilon^2 = 1 \text{ کا کامل ابتدائی } \alpha = 0 \text{ م (لا + ج) ہے۔}$$

-۴-

ثابت کر دو کہ تین صورتوں (۱) م طاق مثبت صحیح عدد جو ایک سے بڑا ہو (۲)  $\alpha = 1$  اور (۳) م طاق منفی صحیح عدد ہیں ج اور ج علی الترتیب

$$\begin{matrix} \alpha & \epsilon & \alpha & \epsilon \\ \alpha & \epsilon & \alpha & \epsilon \\ \alpha & \epsilon & \alpha & \epsilon \end{matrix}$$

اور

ہیں بشرطیکہ ان میزروں کو ایسی مساواتوں سے حاصل کیا گیا ہو جنکو م کی کم سے کم قوت سے جو منفی قوتوں کو خارج کرنے کے لیے ضروری ہیں ضرب دیا گیا ہو۔

[ $\alpha = 0$  پہلی صورت میں قرن طریق ہے اور دوسری میں لاف (ن-ج) اور تیسری میں خاص حل کی انتہائی شکل جو اتمام منحیوں کا متعارف ہے جو کامل ابتدائی میں شامل ہیں۔  $\alpha = 0$  سے  $\alpha = 0$  حاصل ہوتا ہے اگر

منفی ہے، اس لیے خاص نمبر کی اس انتہائی شکل میں حل ما =۔ بالعموم  
اضعافی شکل میں آتا ہے۔ اگر م =۔ اتو خاص حل ان قوتوں میں وقوع پذیر

ہوتا ہے جو قاعدوں  $\Delta = \text{ل} \text{ع} \text{ق} \text{خ} \text{ع} = \text{ل} \text{م} \text{ق} \text{خ} \text{ع}$  سے

حاصل ہوتے ہیں۔ ان قاعدوں سے قرن طریق کی قوتیں صرف م = ۳ کی  
صورت میں صحیح طور پر حاصل ہوتی ہیں]

(۷) گ - ۱ = ما = لا (لا + ج) ہے۔ تفرقی مساوات

$$\text{لا} \text{ع}^2 - ۲ \text{لا} \text{ما} \text{ع} + \text{ما}^2 - ۴ \text{لا} \text{ما} = ۰$$

نیز  $\Delta = \text{لا} \text{ما} = \Delta = \text{لا} \text{ما}$  حاصل کرو

ثابت کرو کہ ما =۔ لفاف (ن - ح) ہے اور لا =۔ خاص  
حل کی ایک انتہائی شکل ہے لیکن وہ خود حل نہیں ہے۔

[مبدأ پر جو قبیل کے تمام منحیوں میں ایک مشترک نقطہ ہے

میزوں کے معدوم ہونے کی بیش قیاسی کی جاسکتی ہے۔ کیونکہ مبدأ

پر قبیل کی مساوات ج کی کسی قیمت کے لیے پوری ہوتی ہے ج کی ہر قوت

کے سر اور نیزہ رقم جس میں ج نہیں ہے اس نقطہ پر معدوم ہوتے ہیں

اس لیے  $\Delta =$ ۔ کیونکہ اس کی ہر رقم معدوم ہوتی ہے۔ چونکہ مشترک نقطہ

منحیوں کے مختلف حاس ہیں اس لیے اس نقطہ پر تفرقی مساوات ع

کی کسی قیمت کے لیے پوری ہوتی ہے اور اس لیے اسی استدلال سے

جو  $\Delta$  کے لیے استعمال ہوا  $\Delta =$ ۔ (دیکھو مثال صفحہ ۱۵۶)۔

(۸) ثابت کرو کہ ج کی تمام غیر صفر قیمتوں کے لیے قبیل ما

= لا (لا + ج) کے منحنی لا =۔ کو مبدأ پر مس کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات

$$۴ \text{ لا } \text{ع}^۱ - ۴ \text{ لا } \text{ما} \text{ع} + \text{ما}^۲ - ۴ \text{ لا}^۳ = ۰$$

$$\text{نیز } \Delta = ۴ \text{ لا } \text{ما}^۲ = \Delta \text{ع}^۱ = \Delta \text{لا}^۳ \text{ حاصل کرو۔}$$

ثابت کرو کہ  $\text{ما} = ۰$ ۔ قرن طریق ہے اور  $\text{لا} = ۰$ ۔ خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے (اگرچہ وہ خود حل نہیں ہے) اور نیز وہ ایک ایسا خط ہے جو تمام منحنیوں کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہے (الٹا منحنی کے جس کے لیے  $\text{ع} = ۰$ ۔) (ایسا خط لفاف کی ہماری تعریف کو پورا نہیں کرتا)۔

[مثال ۷ کی طرح  $\Delta$  کو مبداء پر معدوم ہونا چاہیے۔  $\Delta$  بھی معدوم ہوتا ہے (اگرچہ یہاں منحنی مختلف ماس نہیں رکھتے)۔ (دیکھو مثال ۹ صفحہ ۱۵۶)]

(۹) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات (کلیر کی شکل)  
 $(\text{ما} - ۴ \text{ لا}) \text{ع}^۲ = ۴ \text{ع}^۳$

$$\text{کے لیے } \Delta = \text{ما}^۲ = (\text{ما} - ۴ \text{ لا}) \text{ع}^۲ = \Delta \text{ع}^۳$$

[ $\text{ما}^۲ = ۴ \text{ لا}^۳$  لفاف ہے (ن-ح)۔ خاص حل  $\text{ما} = ۰$  ہے اور لفاف کے انعطافی ماس کو تعبیر کرتا ہے۔ اب کسی نقطہ میں سے  $\text{ما}^۲ = ۴ \text{ لا}^۳$  کے تین ماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ یہ سب اس علاقہ میں جو پہلے ربع میں منحنی اور  $\text{ما} = ۰$  کے درمیان ہے حقیقی ہیں اور نیز اس شاہ علاقہ میں جو تیسرے ربع میں ہے۔ دوسرے علاقوں میں ان میں سے دو ماس خیالی ہیں  $\text{ما} = ۰$  پر کے کسی نقطہ کے لیے دو ماس منطبق ہوتے ہیں اس لیے  $\text{ما} = ۰$  ممیزوں میں واقع ہونا چاہیے۔ اسی طرح جب کبھی کلیر کی شکل کی کسی دوسری تفرقی مساوات کا لفاف حل انعطافی ماس رکھے تو وہ ممیزوں میں واقع ہوں گے۔]

(۱۰) تفرقی مساوات

$$\text{ف} (\text{لا}^۴ \text{ما}^۲ \text{ع}^۱) = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

دی گئی ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ

$$(۲) \dots = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{فرع جف ف}}{\text{فر لا جف ع}} = \dots$$

اگر ع حینر سے حاصل شدہ حل کے لیے

$$(۳) \dots = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}$$

تو اوپر کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ اس حل پر کے کسی نقطہ کے لیے

$$(۴) \dots = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{فرع جف ف}}{\text{فر لا جف ع}} = \dots$$

مساواتیں (۱)، (۳) اور (۴) نادر حل کے لیے ضروری شرطیں ہیں۔ کلیہ کی شکل کے لیے ف (لا، ما، ع) = م - ع - لا - فا (ع) ایسے مساوات (۴) متماثل پیری ہوتی ہے۔ لیکن بالعموم کوئی وجہ نہیں کہ ان تینوں مساواتوں کا حل ایک ساتھ حاصل ہو، اس لیے بالعموم تفرقی مساوات کا نادر حل نہیں ہوتا۔

[اس کو مثال (۱) صفحہ ۱۴۰ پر استعمال کرنے سے تین شرطیں

$$ع^۲ (۲ - ۳) = ۴ (۱ - ۳) ع^۲ (۲ - ۳) = ۴ (۳ - ۲) = ۴$$

$$ع = \{ ۱ - ۳ \} ع^۲ (۲ - ۳) + ۴ = ۴$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۱ - ۳ = ۴ جس سے ع = ۴ حاصل ہوتا ہے ان تین شرطوں کو پورا

کرتا ہے، لیکن ۲ - ۳ = ۴ پہلی شرط کو پورا نہیں کرتا۔ [

(۱۱) [اس مثال میں نادر حل کی تیسری تعریف (دفعہ ۶۰) کو استعمال

کرنا چاہئے۔ مثال ۱۰ تمام تعریفوں کے لیے درست ہے۔]

اگر ایک منحنی موجود ہو جس کے ہر نقطہ کے لیے تین مساواتیں

$$ف (لا، ما، ل) = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ل}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ل}} = \dots$$

$$۴ لا'ع - ۴ لا ما ع + ما' - ۴ لا' =$$

$$نیز \quad \Delta = لا ما' \quad \Delta' = لا' حاصل کرو۔$$

ثابت کرو کہ ما' = . قریب طریق ہے اور لا' = . خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے (اگرچہ وہ خود حل نہیں ہے) اور نیز وہ ایک ایسا خط ہے جو تمام منحنیوں کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہے الا اس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰۔ (ایسا خط لفاف کی ہماری تعریف کو یو را نہیں کرتا)۔

[مثال ۷ کی طرح  $\Delta$  کو مبدأ پر معدوم ہونا چاہیے۔  $\Delta$  بھی معدوم ہوتا ہے (اگرچہ یہاں منحنی مختلف حماس نہیں رکھتے)۔ (دیکھو

مثال ۹ صفحہ ۱۵۶)]  
(۹) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات (کلیرو کی شکل)  
(ما - ع لا) = ع' = ع

$$کے لیے \quad \Delta = ما' - ما' (۴ لا - لا) = \Delta$$

[ $۴ ما' = ۴ لا$  لفاف ہے (ن - ح)۔ خاص حل ما' = ۰ ہے اور لفاف کے انعطافی حماس کو تعبیر کرتا ہے۔ اب کسی نقطہ میں سے  $۴ ما' = ۴ لا$  کے تین حماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ یہ سب اس علاقہ میں جو پہلے ربع میں منحنی اور ما' = ۰ کے درمیان ہے حقیقی ہیں اور نیز اس شاہ علاقہ میں جو تیسرے ربع میں ہے۔ دوسرے علاقوں میں ان میں سے دو حماس خیالی ہیں ما' = ۰ پر کے کسی نقطہ کے لیے دو حماس منطبق ہوتے ہیں اس لیے ما' = ۰ ممیزوں میں واقع ہونا چاہیے۔ اسی طرح جب کبھی کلیرو کی شکل کی کسی دوسری تفرقی مساوات کا لفاف حل انعطافی حماس رکھے تو وہ ممیزوں میں واقع ہوں گے۔]

(۱۰) تفرقی مساوات

$$ف (لا، ما، ع) = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

لہ میں ایک مشترک حل رکھتی ہیں تو ثابۃ: یہ کہ اگر وہ اس منحنی پر  

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} \text{ فر لا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \text{ فر ما} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لہ}} \text{ فر لہ} = ۰$$
  
 اور اس لیے

$$- \text{لہ} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \text{ فر لا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \text{ فر ما} = ۰$$

(۲۰۰)

پس ثابت کرو کہ اگر  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \neq ۰$  تو لہ = ع اور منحنی تفرقی مسالۃ

ف (لا، ما، ع) = کا نادر حل ہے، لیکن اگر  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = ۰$  تو  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = ۰$ ۔

[اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نادر حل کے لیے ضروری شرطیں جو

مثال ۱۰ میں دی گئی ہیں شرط  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \neq ۰$  کے اضافہ سے کافی ہو جاتی

ہیں۔ لیکن یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے۔ مثال ۲ میں  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = ۱۶$  ما

۴ لا ع۔ یہ ایک لفاف ما = کے لیے صفر ہے لیکن دوسرے ۲ ما

= ۴ لا کے لیے صفر نہیں ہے۔]

(۱۲) ثابت کرو کہ ان منحنیوں کے نقاط انعطاف کا طریق جو مثال

۱۰ کی مساوات (۱) کے کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں مثال (۱۰)

کی مساوات (۴) کو پورا کرتا ہے اور اس لیے وہ اُس نتیجہ میں شامل ہوگا

جو ان مساواتوں سے ع کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

یہ عمل مثال ۷ کی مساواتوں پر استعمال کرو اور عمل اسقاط کی تکمیل

سلو سٹر کے طریقہ سے کرو اور لا ما (۴ ما - لا) = کو حاصل کرو۔ [دیکھو

کہ ۷ کے تمام طریق شامل ہیں اور انعطافوں کا طریق ۴ ما = لا بھی شامل ہے]



(۱۳) ثابت کرو کہ مساواتوں  $ما^۲ = (لا - ج)^۲$ ،  $ما = (لا - ج)^۳$ ،  
 $لا^۳ + ما^۳ = ج^۳$  سے منحنیوں کے ایسے قبیل تعبیر ہوتے ہیں جن میں متصلہ منحنی  
 حقیقی نقطوں میں متقاطع نہیں ہوتے اور اس کے باوجود ایک لفاف  
 $ما = ۰$  موجود ہے۔ [تیسری صورت میں  $لا = ۰$  بھی ایک لفاف ہے۔]  
 متناظر تفرقی مساواتیں

$$۸ع = ۲۷ما، ۲۷ع = ۲۷ما، لا ع = ۰ = ما$$

ج ممیز  $ما^۴، لا^۴، (لا - ما)^۴ (لا + ما)^۴$   
 اور ع ممیز  $ما^۴، لا^۴، لا ما$   
 حاصل کرو۔

[ان تمام صورتوں میں لفاف ایک جفت قوت میں واقع ہوتا ہے  
 اور اس کی وجہ وہی ہے جو اس بحث میں بیان ہو چکی ہے جو ممیزوں کے  
 طریقوں (حدود کے طور پر) سے متعلق ہے۔ پہلے اور تیسرے قبیلوں کے  
 لیے لفاف قرن طریق بھی ہے اور اس لیے معمولی قاعدے یہاں درست  
 ہیں لیکن دوسرے قبیل کے لیے ایسا نہیں ہے۔ طریق  $لا - ما = ۰$ ،  
 $لا + ما = ۰$  ہیں جہاں دو خیالی منحنی جو تیسرے قبیل کی مساوات میں ج کو  
 منفی قیمت دینے سے حاصل ہوتے ہیں منطبق ہو جاتے ہیں۔]  
 (۱۴) ثابت کرو کہ  $ما = (لا - ج)^۳$  سے منحنیوں کا ایک ایسا قبیل  
 تعبیر ہوتا ہے جو اپنے لفاف  $ما = ۰$  کے ساتھ چار نقطہ تماس رکھتا ہے۔

$$متناظر تفرقی مساوات  $۸ع = ۲۷ما$  اور ممیز  $ع = ۰، ما = ۰$$$

حاصل کرو۔

[لفاف پھر ایک سے بڑی قوت میں وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یہاں  
 اس کی قوت طاق ہے اور یہ ہونا چاہئے کیونکہ کسی نقطہ میں سے گزرنے والے

تفرقی منحنیوں کی تعداد لفظ کی ایک جانب دو ہے اور دوسری جانب صفر ہے۔]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساواتوں  $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$ ،  $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$ ،

( $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$ ) =  $\dot{M}$  لا  $\dot{M}$  (  $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$  ) =  $\dot{M}$  لا  $\dot{M}$  میں سے ہر ایک مکافوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کا محور مشترک ہے اور زاویہ لا  $\dot{M}$  کی تفسیف کرتا ہے اور نتیجہ یہ کہ انسانی لا  $\dot{M}$  اور  $\dot{M}$  ہیں ثابت کرو کہ پہلی اور دوسری شکلوں میں  $\dot{J}$  کو معلوم کرنے کی کوشش نام رہتی ہے (یا اس سے  $\dot{M}$  حاصل ہوتا ہے جو لا  $\dot{M}$  ہی پر کے خط کی مساوی ہے جو تمام مکافوں کو سس کرتا ہے) لیکن تیسری شکل کے لیے  $\dot{J} = \dot{L} + \dot{M}$  اور چوتھی شکل کے لیے  $\dot{J} = \dot{L} + \dot{M}$  (  $\dot{L} + \dot{M}$  ) حاصل ہوتا ہے۔

[  $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$  ایک خاص منحنی ہے جو  $\dot{J} = \dot{M}$  کے متناظر ہے۔ نیز وہ بدبخت کرتے وقت ہمیں پہلی اور دوسری کی مانند شکلوں سے بچنا چاہئے جن میں  $\dot{J}$  نہیں واحد قیمتی نہیں ہیں اور نیز چوتھی کی مانند شکل سے بھی جس میں  $\dot{J}$  کی ( نہ کہ خود  $\dot{J}$  کی ) مختلف قیمتوں کے متناظر مختلف منحنی حاصل ہوتے ہیں ]

۱۶۲۔ ریکی (Riccati) کی مساوات۔ یہ نام ابتداء تفرقی مساوات ہے

$\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$   $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$   $\dot{L} + \dot{M} = \dot{J}$  کو دیا گیا تھا جس میں  $\dot{J}$  اور  $\dot{M}$  مستقل ہیں۔  $\dot{M}$  کی مخصوص قیمتوں کے ایک خاص جٹ کے لیے اس تفرقی مساوات کو محدود رقموں میں مکمل

لے لائقوں سے لا کے لحاظ سے تفرق تعبیر کئے گئے ہیں۔

کیا جاسکتا ہے [دیکھو مثالیں ۷ تا ۱۴ دفعہ ۱۶۴ کے آخر میں]۔ لیکن عام طور پر حل میں ایک لامتناہی سلسلہ کی ضرورت ہوتی ہے جو بیسیل کے تفاعلوں کے ساتھ بہت قریب کا تعلق رکھتا ہے۔

ریکٹی کی مساوات سے اب حسب ذیل عام شکل مراد لی جاتی ہے:

$$1 = f + q + m + n \dots (1)$$

جہاں 'ف'، 'ق' اور 'م'، 'ن' کے تفاعل ہیں۔ یہ مساوات تفرقی علم ہندسہ میں کچھ اہمیت رکھتی ہے۔

۱۶۳۔ ریکٹی کی مساوات کو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تحویل کرنا۔

$$\text{رکھو } m = -\frac{q}{r}, \text{ اس سے حاصل ہوگا } 1 = -\frac{q}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \frac{q^3}{r^3} + \dots$$

جب ہم مساوات (۱) میں اندراج کرتے ہیں تو  $\frac{q}{r}$  کی ہمیں خارج ہو جاتی ہیں پس  $\frac{q}{r}$  سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$-r = q + \frac{q^2}{r} = f + q + m + n \dots$$

۱۷۔ ریکٹی کی مساوات اور بیسیل کے تفاعلوں کے ساتھ اس کے تعلق کا تذکرہ ڈارباؤ کی

"Theory of Bessel Functions" صفحات ۲ تا ۸۵ اور ۹ میں ملے گا۔

۱۸۔ ڈارباؤ (Darboux) کی کتاب "Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces"

کے اشاریہ میں ریکٹی کے ۲۰ والے ہیں۔ نیز دیکھو (Eisenhart's Differential Geometry) صفحات

۲۵، ۸، ۱۵، ۲۴، ۲۹، ۴۲ اور فورسائٹھ کی Differential Geometry صفحات ۲۰ اور

۳۸۳۔

۱۹۔ اوپر کا ابدال اختیار کرنے کا اصلی سبب ہے۔ اگر وہ ذہن میں نہ رہے

تو اس خاصیت سے اس پر پہنچ سکتے ہیں۔

یعنی  $سرا = (ق سرا + ع) + ف سرا = ۶$  ..... (۲)  
 جو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات ہے۔ خاص صورتوں میں  
 (مثلاً ذیل کی مثالوں میں) اس کو محدود درجوں میں تحلیل کیا جاسکتا  
 ہے لیکن عام طور پر حل کو ایک سلسلہ میں معلوم کرنا ہوگا۔ ہر  
 صورت میں حل مندرجہ ذیل شکل

$$۶ = (ق سرا + ع) + ف سرا$$

ہوگی اور اس سے حاصل ہوگا

$$۱۶ = ۴ - \frac{۱۶}{سرا} = \frac{(ق سرا + ع) + ف سرا}{سرا} = \frac{۱۶}{سرا}$$

$$= \frac{ج سرا + ف سرا}{ج سرا + ف سرا}$$

جہاں  $\frac{۱}{سرا}$  کی جگہ ج رکھا گیا ہے۔

اس سے یہ اہم نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ریختی کی مساوات کا عام  
 تکملہ، تکمیل کے مستقل کا ایک ہم رسم تفاعل ہوتا ہے۔

(۲-۲)

اس کے بالعکس یہ آسانی سے ثابت ہوتا ہے (جیسا کہ مندرجہ ذیل

مثال میں بتلایا گیا ہے) کہ شکل

$$۱۶ = \frac{ج سرا + ف سرا}{ج سرا + ف سرا}$$

کی کسی مساوات سے اختیاری مستقل ج کو ساقط کرنے سے ریختی کی  
 مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۱۶۴۔ ریختی کی مساوات کے کسی چار مخصوص تکملوں کی

جلیبی نسبت لا پر غیر منحصر ہوتی ہے۔

ہم ان چار تکملوں کو ب (لا) ق (لا) ر (لا) س (لا) لے سکتے ہیں۔ یہ تکملے ج گ (لا) + گ (لا) سے ج کو چار خاص قیمتیں عہ بہ جہ، ج ف (لا) + ف (لا) ضہ دیکر حاصل کئے گئے ہیں۔ اب

$$\text{ب۔ ق} = \frac{\text{عہ گ} + \text{گ}}{\text{ع ف} + \text{فا}} - \frac{\text{بہ گ} + \text{گ}}{\text{ب ف} + \text{فا}}$$

$$= \frac{(\text{عہ۔ بہ})(\text{گ۔ ف۔ گ})}{(\text{ع ف} + \text{فا})(\text{ب ف} + \text{فا})}$$

اور اسی طرح اس کے مشابہ جلیے ب ق، ر س میں سے کسی دو کے درمیان فرقوں کے لیے حاصل ہوتے ہیں۔ جب ہم ان کی جلیبی نسبت لیتے ہیں تو وہ سب اجزائے ضربی جن میں لا آتا ہے کٹ جاتے ہیں اور

$$\frac{(\text{ب۔ ق})(\text{ر۔ س})}{(\text{ب۔ س})(\text{ق۔ ر})} = \frac{(\text{عہ۔ بہ})(\text{جہ۔ ضہ})}{(\text{عہ۔ ضہ})(\text{جہ۔ بہ})} = \text{ج (فرض کرو)}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ج لا پر منحصر نہیں ہے۔

۱۶۵۔ حل کا طریقہ جبکہ تین مخصوص تکملے معلوم ہوں۔

$$\text{فرض کرو کہ یہ تکملے ق (لا) ر (لا) س (لا) ہیں۔ تب پچھلے نتیجے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عام حل}$$

$$\text{ج} = \frac{\{ \text{ما۔ ق (لا) } \} \{ \text{ر (لا)۔ س (لا) } \}}{\{ \text{ما۔ س (لا) } \} \{ \text{ق (لا)۔ ر (لا) } \}}$$

ہے جہاں ب (لا) کی بجائے ما درج کیا گیا ہے۔ اس لیے اس صورت میں عام حل کو اعمال تکمل کے بغیر حاصل کیا گیا ہے۔

۱۶۶۔ حل کا طریقہ جبکہ دو مخصوص تکملے معلوم ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تکملہ ق (لا) اور ر (لا) ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{تب} \quad \text{ما} &= \text{ف} + \text{ق} + \text{ما} + \text{ما}^2 \\ \text{اور} \quad \text{ق} &= \text{ف} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ما}^2 \text{ق}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ما} - \text{ق} = (\text{ما} - \text{ق}) \{ \text{ق} + (\text{ما} + \text{ق}) \text{ما} \}$$

$$\text{اسی طرح} \quad \text{ما} - \text{ر} = (\text{ما} - \text{ر}) \{ \text{ق} + (\text{ما} + \text{ر}) \text{ما} \}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{ما} - \text{ق}}{\text{ما} - \text{ق}} = \frac{\text{ما} - \text{ر}}{\text{ما} - \text{ر}} = \frac{\text{ق} - \text{ر}}{\text{ق} - \text{ر}} = \text{ما}$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لو کہ} \quad \frac{\text{ما} - \text{ق}}{\text{ما} - \text{ر}} = \text{ج} + \text{ج} (\text{ق} - \text{ر}) \text{ما}$$

پس اس صورت میں عام حل کے لیے ایک عمل تک لڑنا ضرورت ہے۔

۱۶۷۔ حل کا طریقہ جبکہ ایک مخصوص تکملہ معلوم ہو۔ (۲۰۲)

فرض کرو کہ یہ تکملہ ق (لا) ہے۔

$$\text{ما} = \text{ق} (لا) + \frac{1}{\text{ج}} \text{درج کرنے سے مساوات (۱)}$$

$$\text{ق} - \frac{1}{\text{ج}} = \text{ف} + \text{ق} + \left( \frac{1}{\text{ج}} + \text{ق} \right) \text{ق} + \left( \text{ق}^2 + \frac{2}{\text{ج}} \text{ق} + \frac{1}{\text{ج}^2} \right) \text{ما}$$

میں مستحیل ہوتی ہے۔ لیکن چونکہ ق (لا) ایک تکملہ ہے اس لیے

$$\text{ق} = \text{ف} + \text{ق} + \text{ق}^2 + \text{ما}^2$$

اسی طریقہ بنا دینی معلوم ہوتا ہے زیادہ فطری (لیکن زیادہ طویل) طریقہ میں پہلے ما = ق (لا) + ۶ رکھا جاتا ہے جس سے ریاضی کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہوگی جس میں ف کی بجائے صفر ہوگا۔ لیکن یہ برنولی کی مساوات کی ایک خاص صورت ہے (دفعہ ۲۱) اور حل کے معمولی طریقہ میں اندراج  $\frac{1}{\text{ج}}$  کی ضرورت ہوتی ہے۔ ان دونوں اندراجات کو ملانے سے ہمیں متن میں دیا ہوا اندراج حاصل ہوتا ہے۔

تفریق کرنے اور ی<sup>۲</sup> سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$- ی_۱ = ی_۱ ق + (۲ ی_۱ ق + ۱) م$$

$$یا ی_۱ + (ق + ۲ ق م) ی_۱ = - م$$

$$\{ م (ق + ۲ ق م) فرلا \}$$

یہ ایک خطی مساوات ہے جس کو ایک متکمل جزو ضربی ہو

کے استعمال سے حل کیا جاسکتا ہے۔ اس جزو ضربی کو معلوم کرنے میں ایک عمل تکمیل کی ضرورت ہے اور حل کو مکمل کرنے کے لیے دوسرے کی اور اس طرح کل دو مثال تکمیل کی ضرورت ہے۔

**حل طلب مثالیں -**

مثلاً اتنا ۵ میں طالب علم کو ابتدائی اصولوں پر کام کرنا چاہئے اور اوپر کے طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے۔ وہ صرف نتیجوں کو بیان نہ کرے اور صرف اندراج سے کام نہ لے۔

(۱) ایک خطی مساوات میں تخیل کر کے ثابت کرو کہ

$$۱ م - ۲ م - ۵ م - ۲ م$$

$$۲ م (ج + ۱) = - (ج + ۲) م$$

کامل

ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ  $۱ م - ۲ م - ۵ م - ۲ م = ۰$

$$۱ م (ج + ۱) = - (ج + ۲) م$$

کامل

ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ  $۱ م + ۱ م - ۵ م - ۲ م = ۰$  اس کا ایک تکملہ مس لا ہے اور اس لیے

اس کے حل کو عام شکل

$$۱ م (ج - ۱) = - (ج + ۲) م$$

میں حاصل کرو۔

(۴) ثابت کرو کہ مستقل ک کی دو قیمتیں ہیں جن کے لیے لا (ما

+ ما) = ۲ کا ایک تکرار ہے اور اس لیے عام حل حاصل کرو۔

$$[ک = ۲ - ۱ - ۱، ما = (ج لا - لا) = ۲ ج لا + ۱]$$

(۵) ثابت کرو کہ لا (لا - ۱) ما + لا - (لا - ۱) ما = ۰

کے تین تکرارے 'لا' لا ہیں اور اس لیے عام حل

$$ما = (لا + ج) لا + ج لا$$

حاصل کرو۔

$$(۶) مساوات ۱ = \frac{ج گ (لا) + گ (لا)}{ج ف (لا) + ف (لا)}$$

(۲۰۴)

سے اختیاری مستقل ج ساقط کر کے ریختی کی مساوات

$$(گ ف - گ ف) ما = (گ گ - گ گ)$$

+ (گ ف - گ ف) ما = (گ ف - گ ف) ما + (گ ف - گ ف) ما

حاصل کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ریختی کی مساوات

$$ما + ب ما = ج لا$$

محدود رقموں میں تکمیل کی جاسکتی ہے جبکہ م = ۰

$$[ماک (۱ + ۱) = ج (۱ + ۱) - (۱ - ۱) ج] جہاں ک = (ب ج) اگر ب ج$$

مثبت ہو۔

$$ماک = ج مس (ک لا) جہاں ک = - ب ج اگر ب ج منفی ہو۔$$

$$ما = ج لا + ۱، اگر ب = ۰$$



$$[ (ب + لا) = ۱، اگر ج = ۰ ]$$

(۸) ثابت کرو کہ استعمالہ  $ما = \frac{ی}{لا}$  سے ریختی کی مساوات

$$لا ی - ی + ب ی = ج لا^{۲+۲}$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس لیے ثابت کرو کہ یہ آخری مساوات محدود رقموں میں مکمل کی جاسکتی ہے اگر  $م = ۰$ ۔

[ مثال، کا نتیجہ استعمال کرو۔ ]

(۹) اندراج  $ی = ما$  سے مساوات

$$لا ی - ی + ب ی = ج لا^{۲+۲}$$

$$لا^{۲+۲} ما + ب ما = ج لا^{۲+۲}$$

کو مستحیل کرو۔

ایک مزید اندراج  $لا = لا$  سے ریختی کی شکل کی ایک مساوات

حاصل کرو جس میں  $ب، ج، م$  کی بجائے علی الترتیب  $\frac{ب}{۱}$ ،  $\frac{ج}{۱}$ ،  $\frac{۱۲-ن}{۱}$

ہوں۔ اس لیے ثابت کرو کہ اس مثال کی پہلی مساوات کو محدود رقموں میں مکمل کیا جاسکتا ہے اگر  $ن = ۱۲$ ۔

(۱۰) ثابت کرو کہ اندراج  $ی = \frac{۱}{ع} + \frac{لا}{ع}$  سے مثال (۹) کی

پہلی مساوات مشابہ شکل کی مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں

$لا، ب، ج$  کی بجائے علی الترتیب  $ن + ۱$ ،  $ج$ ،  $ب$  ہوتے ہیں۔

اس لیے ثابت کرو کہ ان میں سے کسی مساوات کو محدود رقموں میں مکمل

کیا جاسکتا ہے اگر  $ن = ۱۲$  یا  $ن = ۲(ن + ۱)$ ۔ اس استدلال کو دہرا کر ثابت کرو کہ مثال (۹) کی پہلی مساوات محدود رقموں میں مکمل پذیر

ہے اگر  $n = 2$  (س ن + ۱) جہاں س (ذیل کی مثالوں میں بھی) صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ اندراج  $y = \frac{n}{x}$  سے مثال (۹) کی مساوات

مشابہ شکل کی ایک مساوات میں تبدیل ہوتی ہے لیکن اس میں  $x$ ،  $y$  کی بجائے علی الترتیب  $n$ ،  $x$ ،  $y$  ہوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان میں سے کسی مساوات کو محدود رقموں میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اگر

$n = 2$  (س ن - ۱) کے نتیجوں سے ثابت کرو کہ ریختی کی مساوات محدود رقموں میں تبدیل پذیر ہے اگر  $m = 2 + 2$  (س + ۲)  $\pm 2$ ۔

ثابت کرو کہ یہ نتیجہ  $m = \frac{1}{1 \pm 2}$  کے مثال ہے جہاں س کی طرح بھی صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا  $\frac{2}{2 + m}$  ہے جو ایک طاق صحیح عدد (مثبت یا منفی) ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ اندراجات  $a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ،  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  (۲۰۵)

سے ریختی کی مساوات مشابہ شکل کی دوسری مساوات میں تبدیل ہوتی ہے لیکن اس میں  $b$ ،  $c$  کی بجائے علی الترتیب  $\frac{1}{b}$ ،  $\frac{1}{c}$  مندرج ہوئے ہیں۔ اس سے یہ اخذ کرو کہ اگر  $m$  کی شکل  $\frac{1}{1 - m}$  ہو تو اس استحالہ سے  $m$ ،  $m$  بدل جاتا ہے۔ اس کے ایسے استحالوں پر غور کر کے ثابت کرو کہ اس صورت میں ریختی کی مساوات محدود رقموں میں تبدیل پذیر ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ اندراجات  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$  کا  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$  سے ریختی کی مساوات مشابہ شکل کی دوسری مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ب 'ج' 'م' کی بجائے علی الترتیب  $\frac{a}{1+a}$ ،  $\frac{b}{1+b}$ ،  $\frac{c}{1+c}$  کے مندرج ہوتے ہیں۔ اس سے اند کرو (مثال ۳ کا نتیجہ استعمال کر کے) کہ ریختی کی مساوات محدود رقموں میں تکمیل پذیر ہے اگر م شکل -  $\frac{m}{1+m}$  کا ہو۔

۱۶۸۔ کل تفرقی مساوات  $f + f' + f'' + \dots$  کو تکمیل کرنے کے دو طریقے۔

ہم گیارہویں باب میں اس مساوات کے تکمیل پذیر ہونے کی ضروری اور کافی شرط بیان کر چکے ہیں اور نیز تکملہ کو حاصل کرنے کا ایک عام طریقہ بیان کر چکے ہیں جبکہ یہ شرط پوری ہو۔ اب ہم دو اور طریقے درج کریں گے۔ ان میں سے ایک میں (جس میں تکمیل جزو ضروری سے کام لیا جاتا ہے) یہ نقص ہے کہ اس کو صرف بعض متجانس مساواتوں کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے لیکن ان مساواتوں کے لیے غالباً یہ طریقہ سادہ ترین ہے۔ دوسرا (میر کا طریقہ) بالکل عام ہے اس میں صرف ایک عمل تکمیل کی ضرورت پڑتی ہے اور اس لیے اس میں دوسرے عام طریقہ (دفعہ ۱۱۷) کی بہ نسبت ایک نظری فائدہ ہے۔ لیکن مبتدی کو اس کے استعمال کا مشورہ نہیں دیا جاسکتا کیونکہ اس میں عمل تکمیل کی اس میں ضرورت پڑتی ہے اس کو (ان جملوں کے عدم تشاکل کی وجہ سے جو واقع ہوتے ہیں) عمل میں لانے کے لیے ان دو اعمال تکمیل کی بہ نسبت جو دفعہ ۱۱۷ کے طریقے میں مطلوب ہوتے

ہیں اکثر زیادہ دقتیں پیش آتی ہیں۔ اس کے علاوہ اگر اس طریقہ کو بعض شرطوں کا کافی لحاظ رکھے بغیر استعمال کیا جائے تو ایسے نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں جو بالکل غلط ہوں۔

## ۱۶۹۔ متجانس تفاعلوں کے لیے مشکل جزو ضربی۔

فرض کرو کہ

ف فرلا + ق فرما + س فری = ..... (۱)  
ایک تکمیل پذیر مساوات ہے جس میں 'ف' 'ق' 'س' ایک ہی درجہ ن کے 'لا' 'ما' 'ی' میں متجانس تفاعل ہیں یعنی 'ف' 'ق' 'س' کو شکلوں

لا<sup>ن</sup> ف (ء، و) لا<sup>ن</sup> گ (ء، و) لا<sup>ن</sup> ہ (ء، و)

میں علی الترتیب بیان کیا جاسکتا ہے جہاں  $\frac{ق}{ف} = \frac{س}{لا}$  اور  $\frac{ی}{ف} = \frac{ہ}{لا}$

اب فرما = ع فرلا + لا فرء، فری = و فرلا + لا فرو  
اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

لا<sup>ن</sup> { ف (ء، و) فرلا + گ (ء، و) (ع فرلا + لا فرء) }

+ ہ (ء، و) (و فرلا + لا فرو) } =

یعنی لا<sup>ن</sup> { (ف + ع گ + و ہ) فرلا + لا (گ فرء + ہ فرو) } =

اس کو لا<sup>ن</sup> { (ف + ع گ + و ہ) } سے تقسیم کرو اور اگر یہ جملہ صفر نہ ہو تو حاصل ہوگا

فرلا + لا<sup>ن</sup> { (ف + ع گ + و ہ) } = ..... (۲)

اب چونکہ مساوات (۱) تکمیل پذیر ہے اس لیے مساوات (۲) بھی تکمیل پذیر ہے خواہ فوری یا ایک مشکل جزو ضربی سے ضرب

دینے کے بعد۔ مساوات (۲) کی پہلی رقم میں صرف لا شامل ہے اور دوسری رقم میں صرف متغیر  $x$  اور  $y$ ۔ ایک متغیر دوسرے متغیروں سے جدا کیا ہوا ہے اور یہ جدائی جو عمل مکمل کے لیے مناسب ترین شکل ہے کسی جزو ضربی (الّا صرف ایک مستقل کے) سے ضرب دینے پر باقی نہیں رہنے گی۔ اس لیے کسی مشکل جزو ضربی کو تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور مساوات (۲) اپنی اس شکل میں ٹھیک ہے۔ لیکن متغیروں کی تبدیلی کے علاوہ مساوات (۲) کو مساوات

(۱) سے جزو ضربی لا<sup>۱</sup> + (ف + ع + گ + و) سے تقسیم کر کے

حاصل کیا گیا تھا۔ یہ جزو ضربی ف لا + ق ما + سری کے مساوی ہے۔

اس لیے تکمیل پذیر تجاؤں مساوات

ف فر لا + ق فر ما + سرا فری =

کا مشکل جزو ضربی  $\frac{1}{\text{ف لا + ق ما + سری}}$  ہے الا آنکہ ف لا + ق ما

+ سری = ۰۔

اس کے مشابہ مسئلہ مساوات

ف فر لا + ف فر لا + ..... + ف فر لا =

کے لیے درست ہے۔

مثال۔ (ما + می) فر لا + (ی لا + ی) فر ما + (ما لا + ما) فری =

یہاں ف لا + ق ما + سری = لا ما + لا می + لا می + می

+ می - لا می

= (لا ما + لا می + می + می)

= (ما لا + می) (ما + می)

ہیں اکثر زیادہ دقتیں پیش آتی ہیں۔ اس کے علاوہ اگر اس طریقہ کو بعض شرطوں کا کافی لحاظ رکھے بغیر استعمال کیا جائے تو ایسے نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں جو بالکل غلط ہوں۔

## ۱۶۹۔ متجانس تفاعلوں کے لیے متکمل جزو ضربی۔

فرض کرو کہ

ف فرلا + ق فرما + س فری = ..... (۱)  
ایک متکمل پذیر مساوات ہے جس میں 'ف' 'ق' 'س' ایک ہی درجہ ن کے 'لا' 'ما' 'ی' میں متجانس تفاعل ہیں یعنی 'ف' 'ق' 'س' کو شکلوں

لا<sup>ن</sup>ف (ء، و) لا<sup>ن</sup>گ (ء، و) لا<sup>ن</sup>ھ (ء، و)

میں علی الترتیب بیان کیا جاسکتا ہے جہاں ے = لا اور و = ی

اب فرما = ے فرلا + لا فرء، فری = و فرلا + لا فرو  
اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

لا<sup>ن</sup>{ف (ء، و) فرلا + گ (ء، و) (ے فرلا + لا فرء)  
+ ھ (ء، و) (و فرلا + لا فرو)} = ۰

یعنی لا<sup>ن</sup>{(ف + ے گ + و ھ) فرلا + لا (گ فرء + ھ فرو)} = ۰

اس کو لا<sup>ن</sup>{(ف + ے گ + و ھ) سے تقسیم کرو اور اگر یہ جملہ صفر نہ ہو تو حاصل ہوگا

فرلا + لا<sup>ن</sup>{(ف + ے گ + و ھ) فرء + ھ فرو} = ۰ ..... (۲)

اب چونکہ مساوات (۱) متکمل پذیر ہے اس لیے مساوات (۲) بھی متکمل پذیر ہے خواہ فوری یا ایک متکمل جزو ضربی سے ضرب

(۲۰۶)

دینے کے بعد۔ مساوات (۲) کی پہلی رقم میں صرف لا شامل ہے اور دوسری رقم میں صرف متغیر  $x$  اور  $y$ ۔ ایک متغیر دوسرے متغیروں سے جدا کیا ہوا ہے اور یہ جدائی جو عمل مکمل کے لیے مناسب ترین شکل ہے کسی جزو ضربی (یا صرف ایک مستقل کے) سے ضرب دیتے پر باقی نہیں رہے گی۔ اس لیے کسی مشکل جزو ضربی کو تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور مساوات (۲) اپنی اس شکل میں ٹھیک ہے۔ لیکن متغیروں کی تبدیلی کے علاوہ مساوات (۲) کو مساوات

(۱) سے جزو ضربی لا<sup>۱</sup> (ف + ع + گ + و) سے تقسیم کر کے حاصل کیا گیا تھا۔ یہ جزو ضربی ف + لا + ق + م + س + ی کے مساوی ہے۔ اس لیے تکمیل پذیر متجانس مساوات

$$ف + لا + ق + م + س + ی = ۰$$

کا مشکل جزو ضربی  $\frac{۱}{ف + لا + ق + م + س + ی}$  ہے الا آنکہ ف + لا + ق + م + س + ی = ۰۔

اس کے مشابہ مسئلہ مساوات

$$ف + لا + ق + م + س + ی + لا + ق + م + س + ی + لا + ق + م + س + ی = ۰$$

کے لیے درست ہے۔

مثال۔ (م + مای) فرلا + (ی + لای) فرما + (ما + لام) فری = ۰

یہاں ف + لا + ق + م + س + ی = لا + م + لای + لام + مای + مائی

+ مائی۔ لامای

$$= (لا + م + لای + ی + مای)$$

$$= (ما + ی) (لا + ی)$$

اس لیے متکمل جزو ضربی  $\frac{1}{(لا+ی)(ما+ی)}$  ہے۔

تفرقی مساوات کو اس متکمل جزو ضربی سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$= \frac{فرلا}{لا+ی} + \frac{ی فرما}{(ما+ی)} + \frac{(لا-ما) فری}{(لا+ی)(ما+ی)}$$

یعنی

$$= \frac{فرلا}{لا+ی} + \frac{ما\{فرما-(ما+ی)\}}{(ما+ی)} + \frac{\{فرما-(ما+ی)\} فری}{(لا+ی)(ما+ی)}$$

یا

$$= \frac{فرلا}{لا+ی} + \frac{فرما}{ما+ی} - \frac{فری}{لا+ی} - \frac{فری}{ما+ی}$$

یا

$$= \frac{فرلا+فری}{لا+ی} - \frac{فرما}{ما} - \frac{فرما+فری}{ما+ی}$$

∴ لوک (لا+ی) + لوک ما - لوک (ما+ی) = لوک ج

∴ ما (لا+ی) = ج (ما+ی)

### حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں پر یہ طریقہ استعمال کرو :

مثال (۲) صفحہ ۲۷۱، مثال (۱۰)، (۱۰)، ۲ اور مثال ۱۱ صفحہ ۲۸۵

۷۰۔ ۱۔ میر کا طریقہ - کلی تفرقی مساوات کو شکل

فری = ف (لا، ما، ی) فرلا + ق (لا، ما، ی) فرما

میں لکھو۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر تکمل پذیری کی بشرط (دفعات

(۲۰۷) ۱۱۸ اور ۱۱۹ پوری ہو اور اگر تفاعل ف اور تفاعل ق ایک

نقطہ (لا، ما، ی) کے قریب میں کل شکل Holomorphic ہیں تو تفرقی مساوات کا





جہاں تحمل کے مستقل کا تعین اس شرط کے ذریعہ کیا گیا ہے کہ  $y = y$  جبکہ  $z = z$ ۔

مساوات (۳) ایک اسطوانہ کو جس کے مکوں محور  $z$  کے متوازی ہیں) تعبیر کرتی ہے جو مستوی (۲) اور مطلوبہ سطح کے تقاطع کے منحنی میں سے گزرتا ہے۔

مساواتوں (۲) اور (۳) سے  $m$  کو ساقط کیا جائے تو سطح کی مساوات  $y - y = z + z$  حاصل ہوتی ہے۔

یہ مساوات (۱) کا عام حل ہے اگر  $y$  کو اختیاری مستقل کے طور پر لیا جائے۔

مثال (۲) فری =  $\frac{y^3}{z} - \frac{y^2}{z} - \frac{y}{z}$  ..... (۴)

مکمل پذیری کی شرط

$\frac{y^3}{z} - \left(\frac{y^2}{z} - \frac{y}{z}\right) - \left(\frac{y^3}{z} - \frac{y^2}{z} - \frac{y}{z}\right) = 0$

ہے جو پوری ہوتی ہے۔ ہم  $z = 0$ ،  $y = 0$  نہیں لے سکتے کیونکہ اس سے تفاعل  $\frac{y^3}{z}$  اور  $\frac{y^2}{z}$  لامتناہی ہو جاتے ہیں۔ لیکن  $z = 1$  اور  $y = 1$  لیے جاسکتے ہیں۔

(۲۰۸) رکھو  $m + 1 = m(1 - z) + 1$  ..... (۵)

مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$\text{فری} = \frac{y^3}{z} - \frac{y^2}{z} - \frac{y}{z} = \frac{y^3}{m+1} - \frac{y^2}{m+1} - \frac{y}{m+1}$$

∴ لوک  $y = 3$  لوک  $z = 2$  لوک  $\{m + 1\}$   $\{1 - z\}$

∴  $y = \{m + 1\} z = y^3$  ..... (۶)

(۵) اور (۶) سے م کو ساقط کرنے پر مطلوبہ حل  
 $y = 2, y = 4$

حاصل ہوتا ہے -  
 یہ قابل ذکر ہے کہ اس قبیل کی تمام سطحیں نقطہ (۰، ۰، ۱) میں سے  
 گذرتی ہیں -

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ اوپر کی مثال (۲) کو حل کرنے کی سعی جبکہ نقطہ  
 (۰، ۰، ۱) کو ثابت نقطہ کے طور پر لیا گیا ہو ناکام ہو جاتی ہے جبکہ  
 ہم مساوات (۶) کے متناظر اسطوانہ کو اس نقطہ میں سے گزارنے کی  
 کوشش کرتے ہیں -

(۲) حل کرو  $2y = 4x + (1 - y)$  فرما  
 [ثابت نقطہ کو (۰، ۰، ۱) کے طور پر منتخب کرنے سے صحیح نتیجہ

ما (۱ - ی) = ما (۱ - ی) + لا  
 حاصل ہوتا ہے - نقطہ (۰، ۰، ۱) کے انتخاب سے غیر صحیح نتیجہ  
 ی - ی = ما حاصل ہوگا -

(۳) حل کرو  $(1 + لا) فری = (1 + مای) فرلا + لا(ی - لا) فرما$   
 [نتیجہ  $ی = لا + ی(1 + لا)$ ]

## ۱۷ - دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتیں -

حسب ذیل بحث (دفعات ۱۷ تا ۱۹) نویں اور دسویں باب کا تتمہ  
 ہے - لا کے لحاظ سے تفرقوں کو تعبیر کرنے کے لیے لاحق استعمال  
 کئے جائیں گے -  $لا(ک)$ ،  $لا(ز)$ ،  $لا(ھ)$ ،  $لا(ک)$  (لا) سے  
 یا صرف  $ھ$ ،  $ک$ ،  $ز$  اور  $ک$  سے لا کے ایسے تفاعل تعبیر ہوں گے جو مبداء  
 پر کل شکلی ہیں، یعنی ان کو قوت کے ایسے سلسلوں

میں پھیلا یا جاسکتا ہے جو ایک کافی چھوٹے دائرہ کے اندر جس کا مرکز مبداء  
 پر ہو مستقیم ہیں اور نیز ان تفاعلوں میں یہ خاصیت ہے کہ وہ مبداء پر  
 معدوم نہیں ہوتے۔ ان کے متکافی بھی کل شکلی ہوں گے  
 اور اسی طرح ان کے لوکار بھی مشتق مثلاً

$$u, (1)$$

$$v, (2)$$

بھی کل شکلی ہوں گے۔  
 جب ہمیں ہم نادر نقطوں کا کر کریں تو یہ سمجھا جائے گا کہ یہ نقطے  
 منفرد ہیں یعنی یہ کہ کافی چھوٹے نصف قطر کا ایک دائرہ جس کا  
 مرکز ان میں سے کوئی نقطہ ہو کھینچا جائے تو دوسرے تمام نقطے  
 اس کے باہر ہونگے۔

۱۷۲۔ باقاعدہ تکملے - صفحہ ۲۱۶ پر یہ بیان کیا گیا تھا کہ

فرائیس کی شکلوں کے حلوں کو باقاعدہ تکملے کہا جاتا ہے۔ اب ہم نو  
 کریں گے کہ اس کا کیا مفہوم ہے۔ فرض کرو کہ ہم ان جوابوں کی شکلوں کا  
 امتحان کرتے ہیں جو نویں باب کی مثالوں سے حاصل ہوئے ہیں۔ اگرچہ  
 ہم نے حل کے عمل میں چار صورتوں سے میں امتیاز کرنا پسند نہیں کیا لیکن حقیقت

(۲۰۹)

۱۔ دیکھو براہ موعج کی کتاب *Infinite Series* دوسرا ایڈیشن صفحات ۵۴ اور ۸۴ -  
 ۲۔ م ویں رتبہ کی مساواتوں کے لیے فرائیس کے طریقے میں (دیکھو  
 Crelle Vol. LXXVI یا فورسائٹھ کی کتاب "مساواتوں کا نظریہ" جلد چہارم  
 صفحہ ۸ تا ۹۳) یا اس کی کتاب "معمولی تفرقی مساواتیں" صفحہ ۳۹ تا ۴۰ (نظری  
 بحث کے لیے صرف دو صورتوں میں تمیز کرنا سہولت بخش ہے، ان میں سے دوسری  
 صورت میں ہماری (۲) (۳) اور (۴) صورتیں شامل ہیں۔ پس دوسری صورت کو حل کرنے میں  
 اس سلسلہ کو جس کے سرچ کے تفاعل ہیں  $f(1+j)$  و  $f(2+j)$  ...  
 (ملاحظہ ہو تہیہ بر صفحہ آئیندہ)

کابل ابتدائی  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$  کی صرف دو مختلف شکلیں تھیں۔ ایک مکملہ (فرض کرو) ہمیشہ شکل  $(۱)$  کا تھا۔ دوسرا مکملہ، وچند مثالوں میں اس کے مشابہ شکل کا تھا، مثلاً شکل  $(۲)$  کا دفعات  $۹۵$  اور  $۹۹$  ہیں، دوسری مثالوں میں مثلاً دفعات  $۹۷$  اور  $۹۸$  ہیں اس کی شکل

$\{ (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) \}$

تھی جہاں اس ایک مثبت یا منفی صحیح عدد تھا (مثلاً دفعہ  $۹۷$  میں  $۲۴$ ، مثال  $۱$  دفعہ  $۹۵$ )۔ ہم ان شکلوں کو (دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے) ان شکلوں کی تعریض قرار دیتے ہیں جو مبداء پر باقاعدہ ہیں صرف

(بقیہ صفحہ گذشتہ) ... ف (ج + ر) سے ضرب دیا جاتا ہے جہاں ف (ج) = قوت ثانی مساوات ہے اور ر جس کی اصلوں میں سے کسی دو کے درمیان بڑے سے بڑا فرق ہے جہاں یہ اصلیں اس جٹ سے متعلق ہیں جن میں صحیح عددوں کا فرق ہے (دیکھو ہمارا طریقہ صورت (۳) کے لیے)۔ اس سلسلہ میں اور ج کے پورا سے اس کے متواتر جزئی تفرقی سروں میں علی الترتیب اصلوں کو درج کیا جاتا ہے جو اس طرح مرتب ہوتے ہیں کہ کسی ایک آل اور اصل مابعد کے درمیان فرق ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے یا صفر لیکن مثالوں کو اس طریقہ سے حل کرنے میں بہت زیادہ توجہ دینی کام انجام دینا پڑتا ہے اور اس لیے نویں باب میں ہم نے اس میں بہت کچھ ترمیم کی ہے باخضوص صورت (۴) میں۔

۱۔ مبداء سے مختلف نقطوں پر دفعہ  $۵$  میں بحث کی گئی ہے۔ بد قسمتی سے لفظ "باقاعدہ" کا مفہوم تفرقی مساواتوں میں مختلف اور تفاعلوں کے نظریہ میں مختلف ہے جس میں یہ کل شکلی کے مرادف ہے۔ مثلاً ایک جملہ جس میں لوک لایا لا شامل ہو (جہاں ع صفر یا مثبت صحیح عدد نہیں ہے) مبداء کے باقاعدہ مکملہ ہو سکتا ہے لیکن اس نقطہ پر باقاعدہ تفاعل نہیں ہو سکتا۔

اس نرمیم کے ساتھ کہ اس صفر بھی ہو سکتا ہے۔ اس ترمیم سے کوئی حقیقی فرق پیدا نہیں ہوگا کیونکہ اگر اس صفر ہے تو شککہ

$$\{ (1) \text{ ک } + (2) \text{ لوک } \} = 0$$

کی بجائے ہر تہمکوں کا خطی اجتماع

$$و۔ \frac{ک(۰)}{ک(۰)} = \frac{لا(لا) کوک لا + ک(لا)}{ک(۰)} - \frac{ک(۰)}{ک(۰)}$$

رکھ سکے ہیں جس کی شکل مشابہ ہے سوائے اس کے کہ ک (لا) کی بجائے ایک نیا شکل تفاعل ہے جس کا ایک جزو ضروری لا ہے۔ اس طرح و کی پہلی شکل میں یعنی لا ک (لا) میں ہم ہمیشہ عہ اور بہ کو غیر

مساوی فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو وہ کی بجائے  $\frac{k(1)}{h(1)}$ ۔

رکھا جاسکتا ہے جس کا ایک جزو ضروری لا<sup>ع</sup> ہے۔

میں رتبہ کی خطی تعزاتی مساوات کے لیے مبدا پر باقاعدہ تکملہ کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ شکل

$$\{ (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n) \}$$

کا ہوتا ہے جہاں س اور صفر یا کوئی صحیح عدد (مثبت یا منفی) ہیں اور قیمتوں '۱'، '۲'، '۳'، '۴'، '۵' میں سے کوئی اختیار کر سکتا ہے۔

اس طرح پہلے رتبہ کی مساواتوں کے لیے باقاعدہ تکملوں سے لوگ انہیں اسکتا۔ دوسرے رتبہ کے لیے لوگ ارم یا تو خطی طور پر و نوع

پذیر ہو گا یا بالکل موجود ہی نہ ہو گا۔ اس کو دسویں باب سے  
حسب ذیل طریقہ پر اخذ کیا جا سکتا ہے: دفعہ ۷۰۷ میں دونوں  
تکینہ نوکارتوں سے پاک تھے۔ دفعہ ۱۱۰ میں ہم نے دوسرا تکملہ

شکل لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> لا کے ایک سلسلہ کو ج کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کر کے حاصل کیا جہاں سب لا<sup>ج</sup> کے تفاعل ہیں اور پھر تفرق کے بعد ج کی بجائے ب رکھا۔ نتیجہ (۱۱۰ میں بیان نہیں کیا گیا)

لا<sup>ج</sup> { لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> } + لا<sup>ج</sup> { لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> }

ہے جس کی شکل لا<sup>ج</sup> { لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> } + لا<sup>ج</sup> { لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> (ب) لا<sup>ج</sup> } ہے۔

اگر سروں لا<sup>ج</sup> (ب) میں سے پہلے لہ سر صفر ہوں اور سروں جف لا<sup>ج</sup> (ب) میں سے پہلے لہ سر بھی صفر ہوں تو ع = ب + لہ اور س = مہ - لہ۔  
یہ بات توجہ سے کہ لوک لا کا ہم جزو ضروری خود ایک تکملہ ہے۔ اس کو بلا واسطہ ثابت کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ تفرقی مساوات

ب + م ف (لا) = م ف (لا) = ۰ . . . (۱)

ہے جہاں ف (لا) اور ق (لا) مبداء کے قریب ایکساں<sup>لہ</sup> یعنی وحیداً یقیناً ہیں۔

اگر اس مساوات کی دائیں جانب ہم م کی بجائے تکملہ لا<sup>ج</sup> { لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> لا<sup>ج</sup> (لا) } = ع لوک لا + ط (فرض کرو) درج کریں تو نتیجہ کو تکملہ کی تعریف کی رو سے متماثلاً صفر ہونا چاہئے۔

لہ اس تفرقی مساوات میں وہ مساواتیں مخصوص صورتوں کے طور پر شامل ہیں جو نویں اور دسویں باب میں زیر بحث آچکی ہیں۔

اس نتیجہ میں لوک لا کا ہم جزو ضربی (ع + ع + ف + ع ق) ہے۔  
 نتیجہ میں یہ اور دوسری تمام قسمیں، الا لوک لاکے، لا اور ایک ایکساں تفاعل  
 کے حاصل ضرب ہیں کیونکہ ع اور ط اور اس لیے ع، ع، ط، ط، اس  
 قسم کے حاصل ضرب ہیں اور ف اور ق ایکساں ہیں۔ اگر ہم لوک لا  
 کے ہم جزو ضربی سے اس متانکہ کو تقسیم کر سکتے تو یہ لغو نتیجہ حاصل ہوتا کہ غیر  
 یکساں تفاعل لوک لا دو ایکساں تفاعلوں کا خارج قسمت ہے یعنی  
 خود ایک ایکساں تفاعل ہے۔ اس لیے یہ تقسیم ناجائز ہے اور یہ صرف  
 اس صورت میں ہو سکتی ہے کہ ہم جزو ضربی صفر ہو، یعنی ع خود ایک  
 تکملہ ہو۔

اس کے مشابہ سلسلہ لوک لا کی اعلیٰ ترین قوت کے ہم جزو ضربی  
 کے لیے جوم ویں رتبہ کی مساوات (جس کے سرمبداء کے قریب ایکساں  
 ہوں) کے باقاعدہ تکملہ میں وقوع پذیر ہو درست ہے۔ اس طرح  
 ہر اس صورت میں جس میں باقاعدہ تکملے ہوں کم از کم ایک کو لوکار تمول  
 سے پاک ہونا چاہئے اور شکل لا<sup>۲</sup>ھ (لا) کا ہونا چاہئے۔

(۲۱۱) ۱۷۳۔ فوش (Fuch) کا مسئلہ۔ دوسرے رتبہ

کی ایک خطی تفرقی مساوات کے سرمبداء کے قریب  
 ایکساں ہیں۔ وہ ضروری اور کافی شرط کہ اس کے  
 تمام تکملے مبداء پر باقاعدہ ہوں یہ ہے کہ یہ مساوات  
 شکل

$$\text{لا}^۲ + \text{لا} \text{ باف} (\text{لا}) + \text{ماق} (\text{لا}) = ۰$$



میں بیان ہو سکے جہاں ف اور ق مبداء پر کل شکلی ہیں۔

فراینیس کے طریقہ کی بحث (دفعات ۱۰۶ تا ۱۱۰) سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ یہ شرط کافی ہے۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ ضروری ہے۔ دفعہ ۷۲ کی رو سے کم از کم ایک تکملہ شکل لا عھ (لا) کا ہے۔

اس کو ع (لا) سے تعبیر کرو۔  $ما = ع ی$  فر لا رکھو اور دفعہ ۷۲ کی

مساوات (۱) میں اندراج کرو۔ وہ رقمیں جن میں تکمل کی علامت آتی ہے جزو ضربی (ع<sup>۲</sup> + ع<sup>۱</sup> ف + ع<sup>۱</sup> ق) رکھتی ہیں اور اس لیے معدوم ہوتی ہیں کیونکہ ع ایک تکملہ ہے، پس حاصل ہوتا ہے

$ع^۲ ی + ع ی + ف ع ی = ۰$  ..... (۲)  
اب تکملہ ما کی شکل

لا چک (لا) یا لا عھ (لا) لوک لا + لا س (لا) {

ہوگی۔ اس لیے

$$\frac{ما}{ع (لا)} = لا - عھ = \frac{ک (لا)}{عھ (لا)} یا لوک لا + لا س ک (لا)$$

$$= لا - عھ (لا) ' یا لوک لا + لا س عھ (لا) ' فرض کرو$$

$$= ی = \frac{فرض (ما)}{عھ (لا)} = لا - عھ - عھ (لا) = لا - عھ (لا) + لا س (لا)$$

$$یا = لا + لا س - عھ (لا) = لا س (لا) + لا س (لا)$$

دونوں صورتوں میں ہم ی کو شکل لا چک (لا) میں لکھ سکتے ہیں

لے پہلی صورت میں ج = ع - عھ - عھ (لا) دوسری صورت میں ج = ع - عھ - عھ (لا) یا س - عھ (لا) جو جب اس کے کس مثبت ہے یا منفی۔



حاصل کرو جو اس لیے دوسرے رتبہ کی ایک خطی تفرقی مساوات ہے جس کے تمام تکملے مبدا پر باقاعدہ ہیں لیکن اس کو اس شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا جو فوش کے مسئلہ میں مذکور ہے۔

[اس مثال سے اس مفروضہ کی اہمیت معلوم ہوتی ہے کہ تفرقی مساوات کے سرمبدا کے قریب ایکساں ہونے یا نہیں۔ حقیقت میں اس سے ایک سخت قید عائد ہوتی ہے کیونکہ شکل

$$= \{ \text{لا} \} + \{ \text{ب لا} \} + \{ \text{لا} \} \text{لوک لا} + \{ \text{لا} \} \text{ک لا} \}$$

کے تمام کامل ابتدائی خارج ہو جاتے ہیں الا اس خاص صورت کے جہاں لا ز (لا) لا سم (لا) کا صرف ایک عدد ہی ضعیف ہو۔]

۴۷۱۔ معمولی اور نادار نقطے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ ف اور

ق مبدا پر معدوم ہوں (بہ خلاف دوسرے گزرتے ہوئے)۔ اگر ف اور ق لا سے (ز، ہ، گ کے)۔ بالخصوص اگر ف لا سے اور ق لا سے تقسیم پذیر ہو تو مساوات کی ابتدائی شکل (۱) میں ف اور ق برابر آئے یہ کئی شکلیں ہیں۔ اس صورت میں مبدا کو ایک معمولی نقطہ کہا جاتا ہے اور فرامیس کا طریقہ استعمال کرنے پر ایک قوت ثنائی مساوات حاصل ہوگی جس کی اصلیں صفر اور ایک ہونگی اور ان سے (حسب دفعہ ۹۹) ایک غیر متعین سر اور بالآخر دو خطی طور پر متبوع تکملے حاصل ہوں گے جو دونوں قوت کے سلسلے ہوں گے۔

نہ لوکاریم واقع ہو سکتے ہیں نہ ایسے قوت ناجوہر تا عددوں (یا صفر) سے مختلف ہوں۔ لیکن یہ ہو سکتا ہے کہ قوت ثنائی مساوات کی اصلیں صفر اور ایک ہوں اور مبدا ایک معمولی نقطہ نہ ہو جیسا کہ دفعہ ۹۸ کی مثال ۲ میں۔

وہ نقطے جو معمولی نہ ہوں نادر کہلاتے ہیں۔ اگر ایک نادر نقطہ (جس کے قرب میں مساوات کے سرایکساں ہیں) تمام تکملے باقاعدہ ہوں تو اس کو باقاعده نادر نقطہ کہتے ہیں۔  
 یہ تعریفیں خود تفرقی مساوات کے نادر نقطوں سے متعلق ہیں یعنی اس کے سروں سے جبکہ مساوات کو شکل (۱) میں لکھا گیا ہو۔ معمولی نقطوں کی بحث سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تکملوں کی ندرتیں مساوات کی ندرتیں ہی ہیں لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔ مثلاً  $ما = لا$  اور  $ب لا$  سے اختیاری مستقلوں (۱) اور (۲) کو ساقط کرنے سے

$$لا ما - (م + ن - ا) لا ما + م ن ما = .$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر م اور ن نامساوی مثبت صحیح عدد ہیں یا اگر ایک صفر ہے اور دوسرا ۱ سے مختلف کوئی دوسرا مثبت صحیح عدد تو مبداء مساوات کی ندرت ہے لیکن تکملوں کی نہیں۔ جب ہر تکملہ ایک نقطہ پر جو مساوات کے لئے نادر ہے کلی شکلی ہو (جیسا کہ یہاں ہے) تو ندرت کو ظاہری کہا جاتا ہے۔ باقی سب صورتوں میں ندرت کو حقیقی کہتے ہیں۔ ظاہری ندرت پر یہ ضروری ہے کہ قوت غائی مساوات کی اصلیں نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر اور ایک سے بڑا مثبت صحیح عدد ہوں۔ یہ بھی ضروری ہے کہ چھوٹی اصل سے ایک غیر متعین سر حاصل ہو (دفعہ ۹۹ کے مطابق)۔

### حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ وہ ضروری (مگر ناکافی) شرط کہ مبداء مساوات

$$لا ما + لا با ف (لا) + ما ق (لا) = .$$

کی ظاہری ندرت ہو جہاں ف (لا) اور ق (لا) مبداء پر شکل شکلی ہیں یہ ہے کہ



وہ نقطے جو معمولی نہ ہوں نادر کہلاتے ہیں۔ اگر ایک نادر نقطہ (جس کے قریب میں مساوات کے سر ایکساں ہیں) تمام تکملے باقاعدہ ہوں تو اس کو باقاعدہ نادر نقطہ کہتے ہیں۔ یہ تعریفیں خود تفرقی مساوات کے نادر نقطوں سے متعلق ہیں یعنی اس کے سروں سے جبکہ مساوات کو شکل (۱) میں لکھا گیا ہو۔ معمولی نقطوں کی بحث سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تکملوں کی ندرتیں مساوات کی ندرتیں ہی ہیں لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔ مثلاً  $ما = لا$  اور  $ب لا$  سے اختیاری مستقلوں (۱) اور  $ب$  کو ساقط کرنے سے

$$لا ما - (م + ن - ا) لا ما + م ن ما = .$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر  $م$  اور  $ن$  نامساوی مثبت صحیح عدد ہیں یا اگر ایک صفر ہے اور دوسرا ۱۔ سے مختلف کوئی دوسرا مثبت صحیح عدد تو مبداء مساوات کی ندرت ہے لیکن تکملوں کی نہیں۔ جب ہر تکملہ ایک نقطہ پر جو مساوات کے لئے نادر ہے کل شکلی ہو (جیسا کہ یہاں ہے) تو ندرت کو ظاہری کہا جاتا ہے۔ باقی سب صورتوں میں ندرت کو حقیقی کہتے ہیں۔ ظاہری ندرت پر یہ ضروری ہے کہ قوت غائی مساوات کی اصلیں نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر اور ایک سے بڑا مثبت صحیح عدد ہوں۔ یہ بھی ضروری ہے کہ چھوٹی اصل سے ایک غیر متعین صر حاصل ہو (دفعہ ۹۹ کے مطابق)۔

(۲۱۳)

### حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ وہ ضروری (مگر ناکافی) بشرط کہ مبداء مساوات

$$لا ما + لا با ف (لا) + ما ق (لا) = .$$

کی ظاہری ندرت ہو جہاں  $ف (لا)$  اور  $ق (لا)$  مبداء پر شکل شکلی ہیں یہ ہے کہ



اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مساوات (۱) میں تفاعل  $\frac{1}{f}$  اور  $\frac{1}{q}$  ہر محدود نقطہ پر الایند نقطوں  $\frac{1}{p}$ ،  $\frac{1}{b}$ ،  $\frac{1}{c}$  کے کل شکلی ہوں تو نقطے  $\frac{1}{p}$ ،  $\frac{1}{b}$ ،  $\frac{1}{c}$  ہی صرف ممکن محدود نادر نقطے ہوں گے۔ اس طرح ہم ان نقطوں کو صرف معائنہ سے یہ دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں کہ کہاں  $f$  اور  $q$  متغیر کی تبدیلی کے بغیر کل شکلی نہیں رہیں مثلاً اگر

$$f = \frac{2 + \lambda}{\lambda(3 - \lambda)} \text{ اور } q = \frac{1 + \lambda}{\lambda^2(3 - \lambda)(3 - \lambda - 3)} = \frac{1 + \lambda}{\lambda^2(3 - \lambda)^2}$$

تو ممکن محدود نادر نقطے صرف  $\lambda = 0$ ،  $\lambda = 3$  سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس کے علاوہ اگر یہ امتحان کرنا ہو کہ آیا کوئی نادر نقطہ  $\lambda = 1$  باقاعدہ ہے یا نہیں تو صرف یہ دیکھنا ہو گا کہ آیا  $(1 - \lambda)$ ،  $f$  اور  $(1 - \lambda)$   $q$  دونوں  $\lambda = 1$  پر کل شکلی ہیں۔ اوپر کی مثال میں صرف اور  $3$  باقاعدہ نادر نقطے ہیں لیکن  $2$  بے قاعدہ ہے کیونکہ  $(2 - \lambda)$   $q$   $\lambda = 2$  پر کل شکلی نہیں ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ  $(2 - \lambda)$   $q$   $\lambda = 2$  پر کل شکلی نہیں ہے۔

لہذا اتنا ہی پر کے نقطہ  $\lambda = \infty$  پر متغیر کو تبدیل کر کے بحث کیجا سکتی ہے۔ (۳۱۴)

اگر کسی مساوات کے (جس کے سر ہر جگہ ایکساں ہوں) تمام نادر نقطے باقاعدہ ہوں تو مساوات کو فوشی نمونہ کی مساوات کہتے ہیں۔

## حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ زائد ہندسی مساوات

$$\lambda(1 - \lambda) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - (1 + b + 1) \lambda + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$$

کے لیے نادر نقطے صرف  $0$ ،  $1$  اور  $\infty$  ہیں جو باقاعدہ ہیں۔



(۲) ثابت کرو کہ لیجنڈر کی مساوات

$$(1 - \lambda) \left( \frac{1}{\lambda} - 2 \right) \lambda + n(1 + \lambda) = 0$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۱، -۱ اور  $\infty$  ہیں جو باقاعدہ ہیں۔  
(۳) ثابت کرو کہ بیسل کی مساوات

$$\lambda \left( \frac{1}{\lambda} - 2 \right) + n(1 - \lambda) = 0$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۰ اور  $\infty$  ہیں جن میں سے پہلا باقاعدہ ہے  
لیکن دوسرا نہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ریمان کی ف مساوات

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{لا} & \text{جہ} & \text{عہ} \\ & \text{جہ} & \text{عہ} \end{array} \right\} = \text{ف}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{\lambda} + \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} \right) + \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{2(1 - \lambda)}{1 - \lambda} = \frac{1 + 2(1 - \lambda)}{1 - \lambda} = \frac{3 - 2\lambda}{1 - \lambda}$$

$$= \frac{3 - 2\lambda}{(1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 1)}$$

کے لیے 'ا'، 'ب'، 'ج' باقاعدہ نادر نقطے ہیں اور باقی دوسرے سب نقطے

بشمول  $\infty$  معمولی نقطے ہیں بشہرہ لیکہ  $\text{عہ} + \text{جہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{جہ} = 1 -$   
متغیر کو تبدیل کر کے ثابت کرو کہ نقطہ 'ا' کے متناظر قوت نامی  
مساوات کی اصلیں  $\text{عہ}$  اور  $\text{عہ}$  ہیں۔

(۵) ثابت کرو کہ مثالوں ۱، ۲، ۳ اور ۴ کی مساواتیں فوشی نمونہ  
کی ہیں لیکن مثال ۳ اس نمونہ کی نہیں ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات فوشی نمونہ کی ہے:

$$۲ + \frac{۱}{۲} \frac{۱}{سا} + \frac{۱}{۲} \frac{۱}{سا} = ۱$$

جہاں مساوی اجزاء (۱-لا)، (۱-لا-ب)، (۱-لا-ج) ... کی کسی تعداد (فرض کروں) کا حاصل ضرب ہے جن میں سے کوئی دو مساوی نہیں ہیں اور ف اور ق، لا کے کثیر رقی ہیں جن کے درجے علی الترتیب (۱-ا) اور (۲-ن) سے بڑے نہیں ہیں۔

### ۱۷۶۔ ممیز نمایندہ - مساوات

$$۲ + لا ف (لا) + لا ق (لا) = ۱$$

پر غور کرو جہاں لہ اور مہ مثبت صحیح عدد ہیں یا صفر، اور ف اور ق لا کے کئی شکلی تفاعل ہیں جو صفر نہیں ہوتے جبکہ لا = ۰۔ اگر ہم اس کو فرابینس کے طریقہ سے حل کرنے کی سعی کریں تو ماکي بجائے لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ کو (جولائے شروع ہو) درج کرنے اور تفرقی مساوات کی دائیں جانب سے جو نتیجہ حاصل ہو اُس میں لا کی کم ترین قوت کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے قوت نمائی مساوات ماضل ہوگی۔ اس کی پہلی، دوسری، اور تیسری رقموں سے لا کی کم ترین قوتیں علی الترتیب ج، ۲، ج، لہ، ا اور ج۔ مہ ہوئی۔ تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

- (۱) اگر ان میں سے پہلا عدد باقی دو میں سے کسی سے بڑا نہیں ہے تو قوت نمائی مساوات دوسرے درجہ کی ہوگی۔
- (۲) اگر ان میں سے دوسرا عدد پہلے سے کم لیکن تیسرے سے بڑا نہیں ہے تو قوت نمائی مساوات پہلے درجہ کی ہوگی۔
- (۳) اگر ان میں سے تیسرا عدد سب سے کم ہو تو قوت نمائی

(دیکھو مثال ۲ اور صفحہ ۲۳۳)۔

مساوات کا درجہ صفر ہوگا۔ (دیکھو صفحہ ۲۳۲ مثال)۔  
 پہلی صورت (۱) میں  $\leq$  اور  $\geq$  اس لیے فوش کے مسئلہ کی رُو سے دو باقاعدہ تکملے ہونے چاہئیں۔  
 دوسری صورت (۲) میں ایک باقاعدہ تکملہ ہو سکتا ہے۔  
 لیکن اگر حاصل شدہ واحد سلسلہ لاکی تمام قیمتوں کے لیے متع ہو (جیسا اکثر ہوتا ہے) دیکھو مثال ۴ صفحہ ۲۳۳ تو کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہوگا۔  
 تیسری صورت (۳) میں کوئی سلسلہ نہیں ہے اور اس لیے کوئی باقاعدہ تکملہ بھی نہیں ہے۔  
 ممیز نمایندہ وہ عدد ہے جو اس صورت کو تعبیر کرتا ہے جو پیدا ہوتی ہے اگر ابتداً صفر سے کی جائے چنانچہ صورت (۱) کے لیے صفر، صورت (۲) کے لیے (۱) اور صورت (۳) کے لیے (۲) اس تعریف کو اور قوت نمائی مساوات کے بڑے سے بڑے ممکن درجہ کی بحث کو بڑی آسانی سے کسی رتبہ کی مساواتوں پر اطلاق پذیر کیا جاسکتا ہے چنانچہ حسب ذیل نتیجہ برآمد ہوتا ہے: رتبہ م اور ممیز نمایندہ کی ایک خطی تفرقی مساوات کے باقاعدہ تکملے م۔ ر سے زیادہ نہیں ہو سکتے۔

۱۔ طبعی اور تحت طبعی تکملے۔ دفعہ ۱۰۰ میں یہ معلوم

ہوا تھا کہ فریبیس کا طریقہ ایک ایسا تکملہ دریافت کرنے میں ناکام رہا جس کا ایک جزو ضربی فو ہو۔ یہ طبعی تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے جس کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ شکل فو کا ہوتا ہے جہاں ی کا ایک کثیر رقمی ہے (سادہ ترین صورت میں یہ تفاعل  $\frac{1}{2}$  کا

ایک عددی ضعف ہوتا ہے اور 'لا' کا ایک ایسا تفاعل ہے جیسا کہ باقاعدہ  
سلسلہ میں واقع ہوتا ہے۔ تحت طبعی تکملوں اور طبعی  
تکملوں میں صرف یہ فرق ہے کہ اول الذکر میں 'لا' کی بجائے اس کا جذر المربع  
ہوتا ہے (یا اس کا جذر الکعب یا اس سے اعلیٰ جذر جبکہ تفرتی  
مساواتیں دوسرے رتبہ سے اعلیٰ رتبہ کی ہوں)۔  
طبعی اور تحت طبعی تکملوں کو حاصل کرنے کا طریقہ  
حسب ذیل مثالوں میں بتلایا گیا ہے:

مثال (۱)  $۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$

یہاں توت نمائی مساوات کی کوئی اصلیں نہیں ہیں اور اس لیے کوئی  
باقاعدہ نتیجہ نہیں ہیں (یعنی میسر نمایندہ ۲ ہے) اس کی وجہ ماکے سر میں  
رقم - ۴ 'لا' کی موجودگی ہے۔  
رکھو  $۱ = ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ۱۱ + ۱۲ - ۱۳ + ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ - ۱۷ + ۱۸ - ۱۹ + ۲۰ - ۲۱ + ۲۲ - ۲۳ + ۲۴ - ۲۵ + ۲۶ - ۲۷ + ۲۸ - ۲۹ + ۳۰ - ۳۱ + ۳۲ - ۳۳ + ۳۴ - ۳۵ + ۳۶ - ۳۷ + ۳۸ - ۳۹ + ۴۰ - ۴۱ + ۴۲ - ۴۳ + ۴۴ - ۴۵ + ۴۶ - ۴۷ + ۴۸ - ۴۹ + ۵۰ - ۵۱ + ۵۲ - ۵۳ + ۵۴ - ۵۵ + ۵۶ - ۵۷ + ۵۸ - ۵۹ + ۶۰ - ۶۱ + ۶۲ - ۶۳ + ۶۴ - ۶۵ + ۶۶ - ۶۷ + ۶۸ - ۶۹ + ۷۰ - ۷۱ + ۷۲ - ۷۳ + ۷۴ - ۷۵ + ۷۶ - ۷۷ + ۷۸ - ۷۹ + ۸۰ - ۸۱ + ۸۲ - ۸۳ + ۸۴ - ۸۵ + ۸۶ - ۸۷ + ۸۸ - ۸۹ + ۹۰ - ۹۱ + ۹۲ - ۹۳ + ۹۴ - ۹۵ + ۹۶ - ۹۷ + ۹۸ - ۹۹ + ۱۰۰$

(۲۱۶)

تو  $۱ = ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ۱۱ + ۱۲ - ۱۳ + ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ - ۱۷ + ۱۸ - ۱۹ + ۲۰ - ۲۱ + ۲۲ - ۲۳ + ۲۴ - ۲۵ + ۲۶ - ۲۷ + ۲۸ - ۲۹ + ۳۰ - ۳۱ + ۳۲ - ۳۳ + ۳۴ - ۳۵ + ۳۶ - ۳۷ + ۳۸ - ۳۹ + ۴۰ - ۴۱ + ۴۲ - ۴۳ + ۴۴ - ۴۵ + ۴۶ - ۴۷ + ۴۸ - ۴۹ + ۵۰ - ۵۱ + ۵۲ - ۵۳ + ۵۴ - ۵۵ + ۵۶ - ۵۷ + ۵۸ - ۵۹ + ۶۰ - ۶۱ + ۶۲ - ۶۳ + ۶۴ - ۶۵ + ۶۶ - ۶۷ + ۶۸ - ۶۹ + ۷۰ - ۷۱ + ۷۲ - ۷۳ + ۷۴ - ۷۵ + ۷۶ - ۷۷ + ۷۸ - ۷۹ + ۸۰ - ۸۱ + ۸۲ - ۸۳ + ۸۴ - ۸۵ + ۸۶ - ۸۷ + ۸۸ - ۸۹ + ۹۰ - ۹۱ + ۹۲ - ۹۳ + ۹۴ - ۹۵ + ۹۶ - ۹۷ + ۹۸ - ۹۹ + ۱۰۰$   
مساوات (۱) کو تقسیم کرنے کے بعد  
 $۱ = ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ۱۱ + ۱۲ - ۱۳ + ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ - ۱۷ + ۱۸ - ۱۹ + ۲۰ - ۲۱ + ۲۲ - ۲۳ + ۲۴ - ۲۵ + ۲۶ - ۲۷ + ۲۸ - ۲۹ + ۳۰ - ۳۱ + ۳۲ - ۳۳ + ۳۴ - ۳۵ + ۳۶ - ۳۷ + ۳۸ - ۳۹ + ۴۰ - ۴۱ + ۴۲ - ۴۳ + ۴۴ - ۴۵ + ۴۶ - ۴۷ + ۴۸ - ۴۹ + ۵۰ - ۵۱ + ۵۲ - ۵۳ + ۵۴ - ۵۵ + ۵۶ - ۵۷ + ۵۸ - ۵۹ + ۶۰ - ۶۱ + ۶۲ - ۶۳ + ۶۴ - ۶۵ + ۶۶ - ۶۷ + ۶۸ - ۶۹ + ۷۰ - ۷۱ + ۷۲ - ۷۳ + ۷۴ - ۷۵ + ۷۶ - ۷۷ + ۷۸ - ۷۹ + ۸۰ - ۸۱ + ۸۲ - ۸۳ + ۸۴ - ۸۵ + ۸۶ - ۸۷ + ۸۸ - ۸۹ + ۹۰ - ۹۱ + ۹۲ - ۹۳ + ۹۴ - ۹۵ + ۹۶ - ۹۷ + ۹۸ - ۹۹ + ۱۰۰$   
میں ستمیل ہوتی ہے۔  
رقم - ۴ 'لا' کو خارج کرنے کے لیے 'ی' کو 'لا' کو جہاں  $۱ = ۲ \pm$  تو  
مساوات (۲)

$$۱ = ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ۱۱ + ۱۲ - ۱۳ + ۱۴ - ۱۵ + ۱۶ - ۱۷ + ۱۸ - ۱۹ + ۲۰ - ۲۱ + ۲۲ - ۲۳ + ۲۴ - ۲۵ + ۲۶ - ۲۷ + ۲۸ - ۲۹ + ۳۰ - ۳۱ + ۳۲ - ۳۳ + ۳۴ - ۳۵ + ۳۶ - ۳۷ + ۳۸ - ۳۹ + ۴۰ - ۴۱ + ۴۲ - ۴۳ + ۴۴ - ۴۵ + ۴۶ - ۴۷ + ۴۸ - ۴۹ + ۵۰ - ۵۱ + ۵۲ - ۵۳ + ۵۴ - ۵۵ + ۵۶ - ۵۷ + ۵۸ - ۵۹ + ۶۰ - ۶۱ + ۶۲ - ۶۳ + ۶۴ - ۶۵ + ۶۶ - ۶۷ + ۶۸ - ۶۹ + ۷۰ - ۷۱ + ۷۲ - ۷۳ + ۷۴ - ۷۵ + ۷۶ - ۷۷ + ۷۸ - ۷۹ + ۸۰ - ۸۱ + ۸۲ - ۸۳ + ۸۴ - ۸۵ + ۸۶ - ۸۷ + ۸۸ - ۸۹ + ۹۰ - ۹۱ + ۹۲ - ۹۳ + ۹۴ - ۹۵ + ۹۶ - ۹۷ + ۹۸ - ۹۹ + ۱۰۰$$

ہو جاتی ہے جس کا میسر نمایندہ ہے۔ اسی لیے ایک باقاعدہ کمزور و سکتا  
اس کو معلوم کرنے کے لیے فرابینس کا طریقہ استعمال کیا جائے تو اس کی دونوں

قیمتوں کے لیے سادہ نتیجہ ۶ = لا حاصل ہوتا ہے۔ قوت ناجز و ضربی سے ضرب دینے پر آخر الامر دو طبعی تکلیف لا قوت اور لا قوت حاصل ہوتے ہیں۔

**مثال (۲)**  $m + m^2 + m^3 + \dots + m^{n-1} = \frac{m^n - m}{m - 1}$

یہاں بھی کوئی باقاعدہ تکنیک نہیں ہے۔ مثال (۱) کی طرح عمل کرنے سے

$$1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 3, \bar{3}, 4, \bar{4}, 5, \bar{5}, 6, \bar{6}, 7, \bar{7}, 8, \bar{8}, 9, \bar{9}, 10, \bar{10}, 11, \bar{11}, 12, \bar{12}, 13, \bar{13}, 14, \bar{14}, 15, \bar{15}, 16, \bar{16}, 17, \bar{17}, 18, \bar{18}, 19, \bar{19}, 20, \bar{20}, 21, \bar{21}, 22, \bar{22}, 23, \bar{23}, 24, \bar{24}, 25, \bar{25}, 26, \bar{26}, 27, \bar{27}, 28, \bar{28}, 29, \bar{29}, 30, \bar{30}, 31, \bar{31}, 32, \bar{32}, 33, \bar{33}, 34, \bar{34}, 35, \bar{35}, 36, \bar{36}, 37, \bar{37}, 38, \bar{38}, 39, \bar{39}, 40, \bar{40}, 41, \bar{41}, 42, \bar{42}, 43, \bar{43}, 44, \bar{44}, 45, \bar{45}, 46, \bar{46}, 47, \bar{47}, 48, \bar{48}, 49, \bar{49}, 50, \bar{50}, 51, \bar{51}, 52, \bar{52}, 53, \bar{53}, 54, \bar{54}, 55, \bar{55}, 56, \bar{56}, 57, \bar{57}, 58, \bar{58}, 59, \bar{59}, 60, \bar{60}, 61, \bar{61}, 62, \bar{62}, 63, \bar{63}, 64, \bar{64}, 65, \bar{65}, 66, \bar{66}, 67, \bar{67}, 68, \bar{68}, 69, \bar{69}, 70, \bar{70}, 71, \bar{71}, 72, \bar{72}, 73, \bar{73}, 74, \bar{74}, 75, \bar{75}, 76, \bar{76}, 77, \bar{77}, 78, \bar{78}, 79, \bar{79}, 80, \bar{80}, 81, \bar{81}, 82, \bar{82}, 83, \bar{83}, 84, \bar{84}, 85, \bar{85}, 86, \bar{86}, 87, \bar{87}, 88, \bar{88}, 89, \bar{89}, 90, \bar{90}, 91, \bar{91}, 92, \bar{92}, 93, \bar{93}, 94, \bar{94}, 95, \bar{95}, 96, \bar{96}, 97, \bar{97}, 98, \bar{98}, 99, \bar{99}, 100, \bar{100}, 101, \bar{101}, 102, \bar{102}, 103, \bar{103}, 104, \bar{104}, 105, \bar{105}, 106, \bar{106}, 107, \bar{107}, 108, \bar{108}, 109, \bar{109}, 110, \bar{110}, 111, \bar{111}, 112, \bar{112}, 113, \bar{113}, 114, \bar{114}, 115, \bar{115}, 116, \bar{116}, 117, \bar{117}, 118, \bar{118}, 119, \bar{119}, 120, \bar{120}, 121, \bar{121}, 122, \bar{122}, 123, \bar{123}, 124, \bar{124}, 125, \bar{125}, 126, \bar{126}, 127, \bar{127}, 128, \bar{128}, 129, \bar{129}, 130, \bar{130}, 131, \bar{131}, 132, \bar{132}, 133, \bar{133}, 134, \bar{134}, 135, \bar{135}, 136, \bar{136}, 137, \bar{137}, 138, \bar{138}, 139, \bar{139}, 140, \bar{140}, 141, \bar{141}, 142, \bar{142}, 143, \bar{143}, 144, \bar{144}, 145, \bar{145}, 146, \bar{146}, 147, \bar{147}, 148, \bar{148}, 149, \bar{149}, 150, \bar{150}, 151, \bar{151}, 152, \bar{152}, 153, \bar{153}, 154, \bar{154}, 155, \bar{155}, 156, \bar{156}, 157, \bar{157}, 158, \bar{158}, 159, \bar{159}, 160, \bar{160}, 161, \bar{161}, 162, \bar{162}, 163, \bar{163}, 164, \bar{164}, 165, \bar{165}, 166, \bar{166}, 167, \bar{167}, 168, \bar{168}, 169, \bar{169}, 170, \bar{170}, 171, \bar{171}, 172, \bar{172}, 173, \bar{173}, 174, \bar{174}, 175, \bar{175}, 176, \bar{176}, 177, \bar{177}, 178, \bar{178}, 179, \bar{179}, 180, \bar{180}, 181, \bar{181}, 182, \bar{182}, 183, \bar{183}, 184, \bar{184}, 185, \bar{185}, 186, \bar{186}, 187, \bar{187}, 188, \bar{188}, 189, \bar{189}, 190, \bar{190}, 191, \bar{191}, 192, \bar{192}, 193, \bar{193}, 194, \bar{194}, 195, \bar{195}, 196, \bar{196}, 197, \bar{197}, 198, \bar{198}, 199, \bar{199}, 200, \bar{200}, 201, \bar{201}, 202, \bar{202}, 203, \bar{203}, 204, \bar{204}, 205, \bar{205}, 206, \bar{206}, 207, \bar{207}, 208, \bar{208}, 209, \bar{209}, 210, \bar{210}, 211, \bar{211}, 212, \bar{212}, 213, \bar{213}, 214, \bar{214}, 215, \bar{215}, 216, \bar{216}, 217, \bar{217}, 218, \bar{218}, 219, \bar{219}, 220, \bar{220}, 221, \bar{221}, 222, \bar{222}, 223, \bar{223}, 224, \bar{224}, 225, \bar{225}, 226, \bar{226}, 227, \bar{227}, 228, \bar{228}, 229, \bar{229}, 230, \bar{230}, 231, \bar{231}, 232, \bar{232}, 233, \bar{233}, 234, \bar{234}, 235, \bar{235}, 236, \bar{236}, 237, \bar{237}, 238, \bar{238}, 239, \bar{239}, 240, \bar{240}, 241, \bar{241}, 242, \bar{242}, 243, \bar{243}, 244, \bar{244}, 245, \bar{245}, 246, \bar{246}, 247, \bar{247}, 248, \bar{248}, 249, \bar{249}, 250, \bar{250}, 251, \bar{251}, 252, \bar{252}, 253, \bar{253}, 254, \bar{254}, 255, \bar{255}, 256, \bar{256}, 257, \bar{257}, 258, \bar{258}, 259, \bar{259}, 260, \bar{260}, 261, \bar{261}, 262, \bar{262}, 263, \bar{263}, 264, \bar{264}, 265, \bar{265}, 266, \bar{266}, 267, \bar{267}, 268, \bar{268}, 269, \bar{269}, 270, \bar{270}, 271, \bar{271}, 272, \bar{272}, 273, \bar{273}, 274, \bar{274}, 275, \bar{275}, 276, \bar{276}, 277, \bar{277}, 278, \bar{278}, 279, \bar{279}, 280, \bar{280}, 281, \bar{281}, 282, \bar{282}, 283, \bar{283}, 284, \bar{284}, 285, \bar{285}, 286, \bar{286}, 287, \bar{287}, 288, \bar{288}, 289, \bar{289}, 290, \bar{290}, 291, \bar{291}, 292, \bar{292}, 293, \bar{293}, 294, \bar{294}, 295, \bar{295}, 296, \bar{296}, 297, \bar{297}, 298, \bar{298}, 299, \bar{299}, 300, \bar{300}, 301, \bar{301}, 302, \bar{302}, 303, \bar{303}, 304, \bar{304}, 305, \bar{305}, 306, \bar{306}, 307, \bar{307}, 308, \bar{308}, 309, \bar{309}, 310, \bar{310}, 311, \bar{311}, 312, \bar{312}, 313, \bar{313}, 314, \bar{314}, 315, \bar{315}, 316, \bar{316}, 317, \bar{317}, 318, \bar{318}, 319, \bar{319}, 320, \bar{320}, 321, \bar{321}, 322, \bar{322}, 323, \bar{323}, 324, \bar{324}, 325, \bar{325}, 326, \bar{326}, 327, \bar{327}, 328, \bar{328}, 329, \bar{329}, 330, \bar{330}, 331, \bar{331}, 332, \bar{332}, 333, \bar{333}, 334, \bar{334}, 335, \bar{335}, 336, \bar{336}, 337, \bar{337}, 338, \bar{338}, 339, \bar{339}, 340, \bar{340}, 341, \bar{341}, 342, \bar{342}, 343, \bar{343}, 344, \bar{344}, 345, \bar{345}, 346, \bar{346}, 347, \bar{347}, 348, \bar{348}, 349, \bar{349}, 350, \bar{350}, 351, \bar{351}, 352, \bar{352}, 353, \bar{353}, 354, \bar{354}, 355, \bar{355}, 356, \bar{356}, 357, \bar{357}, 358, \bar{358}, 359, \bar{359$$

$$= f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$$

رقم۔ ۴۔ لا کو خارج کرنے کے لیے یہی رقم ب لا کا موجود ہونا

فرض کرو جہاں ب = +۲۔ اگر ی = ۱ لّا + ب لّا تو ع کے سر میں لا<sup>۵</sup>  
والی کوئی رقم نہیں ہوگی بشرطیکہ ا کو ایسا منتخب کیا گیا ہو کہ م ب  
+ ۱۲ ب = ۰ یعنی ۱ = -۲-

انتخاب ی =  ${}^2_2\text{L} + {}^3_2\text{L}$  سے مساوات

$$= e^{\mu_-} \cup \mu_-, e^{\mu_+} \cup \mu_+, e$$

حاصل ہوگی جس کا ایک باقاعدہ تکمیل = ۷۰ ہے۔

دوسرے انتخاب ی = ۲ - لا - لا سے مساوات

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{u} du + \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2} du$$

حاصل ہوگی۔ اس کا کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہے کیونکہ صرف سلسلہ

$$(\dots + \int \frac{\partial x^{\mu} x^{\lambda}}{r^{\mu}} + \int \frac{x^{\lambda}}{r^{\mu}} + \int \frac{1}{r^{\mu}} + 1) \int$$

حاصل ہوتا ہے جو منفع ہے۔

پس ابتدائی مساوات کا ایک طبعی نمونہ لاؤ  $(\bar{L}^2 - \bar{L}^1)$  ہے۔

مثال (۳)  $\bar{L}^1 + \bar{L}^2 - (\bar{L}^3 + \bar{L}^4) + \bar{L}^5 = 0$ ۔  
یہاں ممیز نمایندہ ہے۔ قوت نمائی مساوات پہلے درجہ کی  
ہے لیکن (جیسا کہ مثال ۴ صفحہ ۴۳۳ میں بتایا گیا ہے) محصلہ سلسلہ متع ہے۔  
حسب سابق عمل کرنے پر

$$\bar{E}^1 + (\bar{L}^1 + \bar{L}^2 + \bar{L}^3 + \bar{L}^4 - \bar{L}^5) + \bar{E}^2 + \bar{E}^3 + \bar{E}^4 + \bar{E}^5 = 0$$

چونکہ ابتدائی مساوات میں تکلیف دہ رقم  $\bar{L}^1$  کے سر میں  $\bar{L}^2$  آتی  
اور  $\bar{L}^3$  کا سر صرف ایسا تھا جو تکملوں کے باقاعدہ ہونے کی صورت میں  
واقع ہوتا ہے اس لیے شاید یہ مناسب معلوم ہو گا کہ  $\bar{E}^1$  کے سر کو  $\bar{L}^2 = \frac{1}{4} \bar{L}^2$   
لیکر سادہ بنایا جاسکتا ہے۔ لیکن اس کی وجہ سے  $\bar{E}^1$  کے سر میں  $\bar{L}^2$  میں ایک  
رقم داخل ہوگی اور ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جس کے کوئی باقاعدہ  
نمونہ نہیں ہوں گے۔

فرض کرو کہ ہم دوسری مساوات کو جس کا ممیز نمایندہ ۱ ہو  
اس امید میں حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ متناظر سلسلہ شاید مستقیم ہو۔ رکھو

$$\bar{E}^1 = \bar{L}^1 - \bar{E}^2 \text{ کا سر } \bar{L}^2 \text{ والی رقموں سے پاک ہو گا اگر } \bar{L}^1 - \bar{E}^2 = 0 \text{ یعنی} \quad (۲۱۴)$$

$$\bar{L}^1 = 0 \text{ یا } \bar{L}^1 = 1 \text{ لیکن } \bar{L}^1 = 0 \text{ سے ابتدائی مساوات حاصل ہوتی ہے اور}$$

$$\bar{L}^1 = 1 \text{ سے مساوات}$$

$$\bar{E}^1 + (\bar{L}^1 + \bar{L}^2) + \bar{E}^2 + \bar{E}^3 + \bar{E}^4 + \bar{E}^5 = 0$$

ملتی ہے جس کا باقاعدہ تکملہ  $= \bar{L}A$  ہے اور اس لئے طبعی تکملہ  $= \bar{L}A$  کو حاصل ہوتا ہے۔

مثال (۴)  $\bar{L}A + \frac{1}{\bar{L}A} - \bar{L}A^3 = 0$

اس مساوات کے کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہیں حسب سابق عمل کرنے سے

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) + \bar{L}A^2 - \bar{L}A^3 - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

$$= \bar{L}A + \left( \frac{1}{\bar{L}A} + \bar{L}A^3 \right) - \bar{L}A^2 + \bar{L}A^2 = 0$$

ہیں۔

## حل طلب مثالیں

صوبہ ذیل مساواتوں (۱) تا (۵) کے تحت طبعی ٹیکے معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ۲\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱ ]$$

$$(۲) \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{d} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱, \bar{d} = ۱ ]$$

$$(۳) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

$$(۴) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

$$(۵) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

صفحہ ۲۲۴ پر ہے

$$(۶) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

$$(۷) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

$$(۸) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

$$(۹) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

حاصل ہوتا ہے

$$(۱۰) \quad \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = ۰ \quad [ \text{جواب: } \bar{a} = ۱, \bar{b} = ۱, \bar{c} = ۱ ]$$

مستحیل کرو اور احتمال شدہ مساوات کے طبعی ٹیکے معلوم کرنے کی کوشش

کرو۔ ثابت کرو کہ محصلہ سلسلے متعین ہیں۔ ابتدائی متغیر کی طرف رجوع کر کے سلسلہ



$$\left\{ -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} + \dots \right\} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \dots$$

اور اس کے مشابہ سلسلہ جس میں  $x$  کی علامت بدلی ہوئی ہو حاصل کرو۔

[بیسل کی مساوات کی استعمال شدہ شکل مثال اصفیٰ کے جواب میں دی گئی ہے۔]

یہ سلسلے اگرچہ متنوع ہیں لیکن بہت کارآمد ہیں۔ ان کو متقارب سلسلے کہتے ہیں۔ لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے لیے جو کافی بڑی ہو ان سلسلوں سے ایک تقرب حاصل ہوتا ہے جس کی خطا کو مناسب طور پر کم کیا جاسکتا ہے لیکن اس کو لا انتہا صغیر نہیں بنایا جاسکتا۔ دیکھو وینٹگر اور واٹسن کی کتاب (۲۱۸) *Modern Analysis* چوتھا ادیشن دفعات ۸۱ تا ۳۲۲ اور ۸۵ اور ۸۶

(۷) دھینکر کی مجموعہ تراشد ہندسی مساوات

$$1 = \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{k}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \dots$$

سے سلسلہ (مثال ۶ کے عمل سے)

$$\left\{ \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{k}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \dots \right\} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \dots$$

حاصل کرو۔

[یہ سلسلہ عام طور پر اس تفاعل کا متقارب پھیلاؤ ہے جو  $\frac{1}{x}$  (لا) سے

تبدیل کیا جاتا ہے، لیکن اگر  $\left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{k}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$  ایک مثبت صحیح عدد ہو تو یہ سلسلہ ختم ہوتا ہے اور ایک تکمد محدود رقموں میں حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے سلسلے

جی، م (لا) سلسلہ جی، م (لا) سے ک اور لا کی علامتیں بدل کر حاصل

کیا جاسکتا ہے۔] ۱۷۸۔ مرتبہ دُوریوں کی مساوات۔ یہ مساوات

$$\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{1}{\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}}} \dots \dots \dots (1)$$

ہے جہاں 1 ایک مستقل ہے۔

$$\text{رکھو لا} = \text{لا} - 1 \text{ت} \text{، ت} = \text{ت} + 1 \text{لا}$$

$$\text{تو } \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} = \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \left( \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} \right) = \left( \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} \right) \left( \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} \right)$$

$$+ \left( \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} \right) = \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}}$$

$$\text{اسی طرح } \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} = \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}}$$

$$= 1 - \left( \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} \right)$$

$$\text{اور } \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} = 1 - \left( \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}} \right) + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ت}}$$

مساوات (۱) میں مندرجہ کرنے پر

$$= \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}}$$

جس سے  $\frac{\text{جف و}}{\text{جفت}} = \text{فہ (ت)}$

اور  $\text{و} = \text{ف (لا)} + \text{فہ (ت)}$  فرت

یا  $\text{و} = \text{ف (لا)} + \text{قا (ت)}$

یعنی  $\text{و} = \text{ف (لا - ا ت)} + \text{قا (لا + ا ت)} \dots (۲)$

جہاں ف اور قا انتہائی تفاعل ہیں۔

(۲۱۹) ف (لا - ا ت) نہیں بدلتا اگر لا میں ا کا اور ت میں ا کا اضافہ کیا جائے اس لیے اس سے ایک موج تغیر ہوتی ہے۔ جو محور لا کی سمت پر رفتار ا سے حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح فا (لا + ا ت) سے ایک موج تغیر ہوتی ہے جو اسی خط پر اسی رفتار سے مخالف سمت میں حرکت کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو حل کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ دفعہ ۱۴۵ میں بیان کردہ غائب نتیجہ کو استعمال کیا جائے اور لا، ما، ی کی بجائے علی الترتیب ت، لا، و کو رکھا جائے۔ مساوات کو

$$\left( \frac{\text{جف}^2}{\text{ت}^2} - \frac{\text{جف}^2}{\text{لا}^2} \right) \text{و} =$$

$$\text{یا} \quad (\text{عف}^2 - \text{عف}^2) \text{و} =$$

لکھنے سے اعدادی مساوات م۔ لا۔ و۔ حاصل ہوگی جس کی اصلیں۔ لا۔ ہیں اور اس سے

$$\text{و} = \text{ف (لا - ا ت)} + \text{قا (لا + ا ت)}$$

صوب سابق حاصل ہوگا۔

۱۷۹۔ موج کی مساوات کے خاص حل۔ مساوات

$$\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ی}} = \frac{1}{\text{جف}^2 \text{ت}} \quad (۳)$$

ہے جہاں 'ل' ایک مستقل ہے۔ یہ ایک بعدی مساوات (۱) کی سہ بعدی نظیر ہے۔ فرض کرو کہ ہم (۲) کے مشابہ حل معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں لیکن 'لا' 'ت' کی بجائے 'لا' 'ما' 'ی' 'ت' کے ساتھ۔

$$\text{رکھو } \text{و} = \text{ف} (\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ما} + \text{ن} + \text{نی} + \text{ت}) + \text{فال} \text{لا}$$

$$+ \text{م} + \text{ما} + \text{ن} + \text{نی} + \text{ت} \quad (۴)$$

جہاں 'ل' 'م' 'ن' مستقل ہیں۔ مساوات (۳) پوری ہوتی ہے اگر

$$\text{ل} = \text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 = 1$$

اس صورت میں 'ل' 'م' 'ن' ایک خاص خط کے حقیقی سمتی جیوب التمام ہیں۔ پہلا تفاعل نہیں بدلتا اگر 'لا' 'ما' 'ی' 'ت' میں علی الترتیب 'ل' 'م' 'ن' 'ل' کا اضافہ کیا جائے اس لیے اس سے ایک مستوی موج (جس کے عماد کے سمتی جیوب التمام 'ل' 'م' 'ن' ہیں) تعبیر ہوتی ہے جو خود اپنے متوازی رفتار 'ل' سے حرکت کرتی ہے۔ دوسرے تفاعل سے ایک متوازی موج تعبیر ہوتی ہے جو اسی رفتار سے مخالف سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس لیے مساوات (۴) مستوی موجوں کی اشاعت کو تعبیر کرتی ہے۔ یہ موج کی مساوات کا ایک خاص حل ہے۔

کروئی موجوں کے لیے حل حاصل کرنے میں مساوات (۳) کو کروئی قطبی محدودوں میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ یہ کام اصولاً لاپلاس کی مساوات کا استعمال ہے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}^2} \frac{\text{جف}}{\text{جف}^2 \text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}^2} \frac{\text{جف}}{\text{جف}^2 \text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}^2} \frac{\text{جف}}{\text{جف}^2 \text{ر}} = \frac{1}{\text{جف}^2 \text{ط}} \quad (\text{جب } \text{جف}^2 \text{ط} = \text{جف}^2 \text{و})$$

لہ دیکھو ایڈورڈ کا "تفرقی احصاء" دفعہ ۵۳۲ یا کسی سادہ طریقہ کے لیے جس میں گاس کا مسئلہ استعمال کیا جاتا ہے سکونیات تحلیلی پر کوئی کتاب۔

(۵)  $\frac{1}{r} \frac{جفا}{جف} = \frac{1}{r} \frac{جفا}{جف} + \dots$  (۵)  
 اس حل کے لیے جو مبداء کے گرد تمام سمتوں میں متشاکل ہو یعنی  
 طہ اور فہ پر متضاد ہو یہ مساوات

(۶)  $\frac{1}{r} \frac{جف}{جف} = \left( \frac{ر}{جف} \right) \frac{جفا}{جف} + \dots$  (۶)  
 میں تحویل ہوتی ہے۔

استعمال  $ع = ر و$

$$\frac{جف}{جف} = \frac{جفا}{جف} + \frac{و}{ر} \frac{جف}{جف}$$

اور  $\frac{جفا}{جف} = \frac{جفا}{جف} + \frac{و}{ر} \frac{جف}{جف} = \frac{جفا}{جف} + \frac{و}{ر} \frac{جف}{جف}$   
 اس لیے مساوات (۶) کو ر سے ضرب دینے کے بعد وہ

$$\frac{جفا}{جف} = \frac{جفا}{جف} + \frac{و}{ر} \frac{جف}{جف}$$

ہو جاتی ہے جس سے

$$ع = ف (ر - ۱) + فا (ر + ۱)$$

یعنی  $\frac{۱}{ر} = \frac{ف (ر - ۱) + فا (ر + ۱)}{ر}$  (۷)

ماصل ہوتا ہے۔ اس سے دو کروی موجیں تعمیر ہوتی ہیں جن کی رفتار  
 وہی ۱ ہے اور ان میں سے ایک مبداء سے پرے، دُستی جاتی ہے  
 اور دوسری مبداء کے قریب آتی جاتی ہے۔ جزو ضربی  $\frac{۱}{ر}$  سے یہ  
 معلوم ہوتا ہے کہ ظل کی شدت گھٹتی ہے جبکہ مبداء سے فاصلہ بڑھتا ہے

۱۸۰۔ پوائسن (یا لیولی) کا عام حل۔ اس سے



دونوں صفر ہیں کیونکہ دونوں محدود پر جب طہ معدوم ہوتا ہے۔ (۲۲۱)  
 اور  $\frac{جف}{جف} = ۱$  سے  $\frac{جف}{جف}$  کی وہی قیمت حاصل ہوتی ہے جو  $\frac{جف}{جف}$  سے (جو فی الواقع وہی حاصل ہے)۔ مساوات (۵) کی پہلی اور چوتھی قیمتیں  
 معدوم نہیں ہوتیں۔ ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} \dots (۸)$$

اس لیے

$۱ = \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۹)$   
 $= \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۱۰)$   
 اگر ت کی تمام قیمتوں کے لیے مبداء  $(۰ = ۱)$  پر محدود ہوتو

$$\frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۱۰)$$

پس مساوات (۱۰) سے

$۱ = \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۱۱)$   
 جہاں لاحقہ صفر اس نتیجہ کو تعبیر کرتا ہے جو  $\frac{جف}{جف}$  سے حاصل ہوتا ہے  
 مساوات (۹) سے

$$\frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۱۱)$$

اور  $\frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۱۱)$

اس لیے  $\frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \frac{جف}{جف} = \frac{۱}{جف} \left( \frac{۲}{جف} \frac{جف}{جف} \right) \dots (۱۱)$

۱ اور ت کی تمام قیمتوں کے لیے - ت = ۰ رکھنے اور ابتدائی شرطوں کو استعمال کرنے سے

$$۲ \text{ فَا (ر)} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} (\text{رگ}) + \frac{\text{رگ}}{۱}$$

اس لیے ر کو خاص قیمت ۱ ت دینے اور مساوات (۱۱) کو استعمال کرنے سے

$$\text{و} = \frac{\text{جف}}{\text{جف (۱ ت)}} (\text{۱ ت گ}) + \text{ت گ}$$

لیکن  $\text{و}$  جو صفر نصف قطر کے کرہ پر و کی اوسط قیمت ہے صفر ہے۔

$$\text{اس لیے و} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ت}} (\text{ت گ}) + \text{ت گ}$$

اس مل کی شکل سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ بوقت ت کسی نقطہ ف پر و کی قیمت صفر ان نقطوں پر کے ابتدائی خلل پر منحصر ہوتی ہے جو مرکز ف اور نصف قطر ۱ ت کے کرہ کی سطح پر واقع ہیں۔ (۲۲۲)  
دھماکہ میں ابتدائی خلل بالعموم ایک ایسے علاقہ میں محدود ہوتا ہے جو ایک بند سطح سے گھرا ہوا ہو۔ اگر ف اس سطح کے باہر ہے اور ف سے مں تک کم سے کم فاصلہ ۱ ہے تو وقت ۱ گزرنے تک

ف پر کوئی اثر پیدا نہیں ہوگا کیونکہ اس سے پیشتر متعلقہ کرہ صرف ایسے علاقوں میں سے گزرے گا جہاں کوئی ابتدائی خلل نہیں ہے کسی وقت ت پر ناہیبہ موج (ان نقطوں کا طریق جہاں خلل عین ابھی پہنچا ہو) ایک ایسی سطح ہے جو سطح مں سے اس کے تمام باہر وار عمادوں کو فاصلہ ۱ ت تک خارج کر کے حاصل کی گئی ہے۔  
موج کی مساوات کے دیگر عام حل کیرخوف (Kirchhoff) نے



جس کے حل کی شکل علم المناظر میں اہمیت رکھتی ہے اور وہ ہینیکر اور بیٹ میان (Bateman) نے حاصل کئے ہیں۔

### حل طلب مثال

تصدیق کرو کہ موج کی مساوات کا ایک حل

$$\psi = e^{i(kx - \omega t)} \quad (1)$$

ہے جہاں تفاعل  $\psi$  ایسا ہے کہ تکمل کی علامت کے تحت تفرق جائز ہیں۔  
[یہ دھنیکر کا حل ہے]۔

### ۱۸۱۔ ریاضیاتی طبیعیات کی دیگر تفرقی مساواتیں

ان میں

$$\Delta \psi = 0 \quad \text{لاپلاس کی مساوات}$$

$$\Delta \psi = -\frac{4\pi}{\hbar^2} \psi \quad \text{پوائسن کی مساوات}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{حرارت کے ایصال کی مساوات}$$

$$\Delta \psi = -\frac{2\pi m}{\hbar^2} \psi \quad \text{تیلغرافی کی مساوات}$$

اور شرڈنگر Schrodinger کی مساوات

$$\Delta \psi = -\frac{2\pi m}{\hbar^2} \psi \quad \text{جس کا حل}$$

۱۸۱۔ دیکھو دھنیکر اور واٹسن کی کتاب Modern Analysis چوتھا ایڈیشن دفعہ ۱۸۱

۱۸۱۔ ایضاً صفحہ ۴۰۶

شامل ہیں۔ ایک مخصوص صورت میں شرودنگر کی مساوات کا حل اس دفعہ کے ختم پر ایک مثال میں دیا گیا ہے۔

ان مساواتوں پر دو نقطہ ہائے نظر سے بحث کی جاسکتی ہے۔ نظری ریاضی کی کتابوں میں ان مساواتوں کے عام حلوں منطقی بحث کی جاتی ہے لیکن طبیعی اس بحث کی طوالت اور ان عام حلوں کے اطلاق کی مشکلوں سے گھبراتا ہے۔ طبیعیات کی کتابوں میں حلوں کو حاصل کرنے کے لیے جو بالعموم عام کرنے کی بجائے مخصوص ہوتے ہیں منطق اور وجدان دونوں سے کام لیا جاتا ہے۔ ایسے حل ایک طبیعیاتی مفہوم رکھتے ہیں اور وہ کبھی بھی صرف منطق سے حاصل نہیں ہو سکتے۔ ان نتیجوں کے درست ہونے میں بالعموم بہت کم شبہ ہوتا ہے لیکن کوئی ابہام خواہ وہ کتنا ہی خفیف ہو ریاضی داں کو ناگوار ہوتا ہے۔ وہ جانتا ہے کہ نظری ریاضیات میں وجدان پر بھروسہ نہیں کیا جاسکتا چنانچہ وہ اس کے آپس قیمتی اور قابل اعتماد حصہ کو قدر کی نگاہ سے نہیں دیکھتا جس سے طبیعیاتی کام لیا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر نقطہ نظر پر طول طویل بحث کرنیکی ضرورت ہے جسکی یہاں نجائش نہیں ہے۔ [ریاضیاتی طبیعیات کی زیادہ ابتدائی مساواتوں کو اس کتاب کے

۱۔ مثلاً گرسا کی کتاب "Cours d'Analyse Mathématique" بلزوم  
 ۲۔ دیکورین ویر کی کتاب "Parallelle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen"  
 (تازہ ترین ادیشن میں بہت سی تبدیلیاں کی گئی ہیں اور اس کا نام "Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik" رکھا گیا ہے)۔ جیفری کی کتاب  
 "Operational Methods in Mathematical Physics" ہیوی سائڈ کا طریقہ

پکروڈ کی کتاب "Lecons sur Quelques Types Simples d'Equations aux Derivées Partielles avec des Applications a la Physique Mathématique."  
 ویسٹر کی کتاب "Partial Differential Equations of Mathematical Physics."  
 اور ٹمپن کی کتاب "Partial Differential Equations of Mathematical Physics"

مختلف مقامات پر حل کیا گیا ہے مثلاً دیکھو صفحات ۳۳، ۵۱، ۵۲، ۶۸، ۸۰، ۹۲، ۹۴، ۱۱۹، ۱۴۳، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۵۹، ۱۶۹

### حل طلب مثال

مثلاً دو نذر کی مساوات میں ک کی بجائے  $\frac{۳}{۲}$  رکھ کر و کی خاص شکل  
- نذر و فن کر کے کارٹینری محدود کو کر و سی قطبی محدود میں تبدیل کر کے  
اور سا کی بجائے راء (ر) میں (ط) رکھ کر (مقابلہ کر و دفعہ ۹۷ کے  
ساتھ) حاصل کرو

$$\left\{ \frac{۶}{۲} + \frac{۳}{۲} \left( \frac{۲}{ر} + ط \right) \right\} ع \{ س$$

$$+ \frac{۶}{۲} \left\{ \frac{۱}{جب ط جف ط} - \left( \frac{جب ط جف س}{جب ط جف قہ} \right) + \frac{۱}{جب ط جف س} \right\} =$$

ل میں کو لا پلاس کی مساوات کا ایک حل لیکر (اور اس لیے ل + اس پھلی  
مساوات کا ایک حل ہو گا جبکہ م کی بجائے صفر رکھا جائے)  
$$= \frac{۶}{۲} + \left\{ \frac{۳}{۲} م \left( \frac{۲}{ر} + ط \right) - \frac{ل (ل + ۱)}{۲} \right\} ع =$$
  
کو حاصل کرو۔

بالآخر اندراجات

$$سما = \frac{۳}{۲} - \sqrt{\frac{۳}{۲} ط} ، ک = \frac{ز}{۲} \sqrt{\frac{۳}{۲} ط}$$

سے اس کو دشیکر کی جمع زائد ہندسی مساوات (مثال ۷ دفعہ ۷۷ کے آخر)  
میں تحویل کر دیں میں ما، لا، م کی بجائے علی الترتیب ع، س، ل اور (ل + ۱)  
ہوں۔

۱۸۲۔ عددی تقرب۔ آدم کا طریقہ۔ اب ہم آٹھویں باب کے

مضمون کی طرف رجوع کر کے ایک ایسا طریقہ بیان کرتے ہیں جس کے متعلق پروفیسر وہیٹیک کا خیال ہے کہ وہ ان سب طریقوں میں بہترین ہے جن کا امتحان ایڈنبرگ کے ریاضی معمل میں کیا گیا تھا۔ اختصاراً یہ کہہ سکتے ہیں کہ وہ ٹیلر کے مسئلہ اور ایک خاص ضابطہ کو ملا کر استعمال کرنے کے مرادف ہے۔ یہ خاص ضابطہ ذیل میں درج ہے اور اس کا تعلق محدود فرقوں کے علم احصاء سے ہے۔ ٹیلر کا مسئلہ لا کے ایسے اضافوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جو اس قدر چھوٹے ہوں کہ سلسلہ بسرعت مستحق ہو جائے۔ اس طریقہ پر مانی چند قیمتیں (بالعموم چار) حاصل کر لینے کے بعد ہمیں اتنا مواد مل جاتا ہے کہ فرقوں کے ضابطہ سے مزید قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور لا کے بڑے اضافوں کے لیے ٹیلر کے مسئلہ کی ضرورت نہیں پڑتی۔ آخری نتیجہ میں جو خطا پیدا ہوگی اس کی تخمینہ مصرعہ ذیل طریقہ پر کیجا سکتی ہے۔

مثال۔ تفرقی مساوات  $لا \frac{فرما}{فرلا} + ما = لا$  دی گئی ہے

اور ابتدائی قیمتیں  $لا = ۲$ ،  $ما = ۲۵$  معلوم ہیں۔  $لا = ۲۰.۵$ ،  $۲۵.۱$ ،  $۲۵.۵$  اور  $۲۵.۲$ ،  $۲۵.۳$ ،  $۲۵.۴$ ،  $۲۵.۵$  کے متناظر ما کی قیمتیں معلوم کرو اور نتیجوں میں خطاؤں کے رتبہ کی تخمینہ کرو۔

ہم لا کے اضافہ کو  $ھ$  سے،  $(لا + ھ)$  کو لا سے، لا کے متناظر

ما کی قیمت کو مان سے تعبیر کریں گے۔

لا کے لحاظ سے ما کے متواتر تفرقی سروں کو ما، ما، ما، ... سے اور ان کی ابتدائی قیمتوں کو لاحقہ صفر سے تعبیر کیا جائے گا۔

ٹیلر کے سلسلہ

$$ما = با + (لا - ۲) با + \frac{(لا - ۲)^2}{۲!} با + \frac{(لا - ۲)^3}{۳!} با + \dots$$

میں سروں کو معلوم کرنے کے لیے ابتدائی تفرقی مساوات میں اور اس کے متواتر تفرقی سروں میں  $2 = 1$  اور  $25 = 5$  رکھو تو

$$\frac{r}{r} = 1 \quad \therefore = 11 - 6 + 11$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1}{r} \quad \therefore = r - \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، چنانچہ آخر الامر حاصل ہوگا

$$r(r-u)^{\frac{1}{19}} - (r-u)^{\frac{1}{18}} + (r-u)^{\frac{1}{17}} + \frac{1}{17}r = b$$

$$(1) \dots + (r-1) \frac{1}{r^r} - (r-1) \frac{1}{r^r} +$$

اگر ہم اس سلسلہ میں علی التواتر  $24.5$ ،  $24.0$ ،  $23.5$ ،  $23.0$  رکھیں تو اس سلسلہ کی آخری رقم کی قیمت زیادہ سے زیادہ

$$\therefore \dots \Delta = \left( \frac{1}{52} \right) \frac{1}{72}$$

ہوگی اور اس لیے ماکہ متناظر قیمتیں اعشاریہ کے پانچ مقامات تک درست ہوں گی۔  
اس طرح حاصل ہوگا

$$r_{54555} = \frac{1}{p} r_{54512} = \frac{1}{p} r_{54419} = \frac{1}{p} r_{54348} = \frac{1}{p}$$

ابہم فرقوں کا ضابطہ

۱۔ یہ ضابطہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ بین ادراہی ضابطہ

$$Q_n = (1 + r)Q_{n-1} + \Delta Q_{n-1} + \dots$$
 کو عدد و صفر اور ایک کے درمیان رکھے لحاظ سے مکمل کیا جاتا ہے۔ دیکھو شیکر

اور رابن سن کی کتاب "Calculus of Observations" صفحہ ۳۶۵



$$\begin{array}{ccccc} \text{ق} & \Delta \text{ق} & \Delta^2 \text{ق} & \Delta^3 \text{ق} & \Delta^4 \text{ق} \\ \text{ق} = ۰.۳۷۵۰ & & & & \end{array}$$

$$۰.۰۰۰۶۰$$

$$۰.۰۰۰۰۴ -$$

$$\text{ق}_1 = ۰.۳۸۱۰$$

$$۰.۰۰۰۰۰۰$$

$$۰.۰۰۰۰۵۶$$

$$۰.۰۰۰۰۰۱$$

$$۰.۰۰۰۰۰۴ -$$

$$\text{ق}_2 = ۰.۳۸۶۶$$

$$۰.۰۰۰۰۰۱$$

$$۰.۰۰۰۰۵۲$$

$$۰.۰۰۰۰۰۳ -$$

$$\text{ق}_3 = ۰.۳۹۱۸$$

$$۰.۰۰۰۰۰۶$$

$$\text{ق}_4 = ۰.۳۹۶۷$$

اب ہم ان فرقوں کے مختلف رتبوں کی عددی قیمت کا اٹھا کر لیں گے جو اس جدول میں مندرج ہیں۔  $\Delta$  ق سے  $\Delta^4$  ق تک گزرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ بین تخفیف ہے۔ لیکن  $\Delta^2$  ق میں صرف قدرے زیادہ تخفیف ہے اور  $\Delta^3$  ق میں تو کوئی تخفیف ہی نہیں ہے۔ اس سے پتہ چلتا ہے کہ  $\Delta^2$  ق اور  $\Delta^3$  ق غیر صحیح ہیں۔ اس لیے ہم ان کا لحاظ نہیں کرتے اور مساوات (۳) کو تقریبی شکل میں استعمال کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \Delta \text{ق} + \frac{1}{12} \Delta^2 \text{ق}$$

$$۰.۰۰۰۰۱ - ۰.۰۰۰۰۲۵ + ۰.۰۰۳۹۶۷ + ۲۵۶۵۲۵۵ =$$

$$۲۵۶۹۳۴۶ =$$

سلسلہ کی صرف چار رقموں کو لینے سے جو خطا پیدا ہوتی ہے وہ آخری رقم کو رکھنے کی بہ نسبت بہت ہی تخفیف ہے اور اس لیے اعشاریہ کے پانچ مقامات تک اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس کے برخلاف اگرچہ پہلی اور دوسری رقموں کی اصلی قیمتوں کا فرق اس فرق سے جو ان کی (پانچ اعشاریہ والی) تقریبی قیمتوں کے درمیان ہے ۰.۰۰۰۰۰۵ سے زیادہ نہیں ہے

(۲۲۶) لیکن یہ خطائیں زیادہ ناموافق صورت میں  $\Delta$  ق میں دگنی اور  $\Delta$  ق میں پھر دگنی ہو سکتی ہیں۔ اگر ماہ کو محسوب کرنے میں ہر رقم میں بڑی سے بڑی ممکن خطا واقع ہو اور یہ سب خطائیں ایک ہی علامت کی ہوں تو بھی ماہ میں بہ نسبت مجموعی جو خطا پیدا ہوگی وہ ۰.۵۰۰۰۰۲۵ سے کم ہوگی۔

$$\text{اب قہ} = ۰.۵ - \left( \frac{۵}{۱۲} - ۲ \right) = ۰.۵ - ۰.۴۱۶۷ = ۰.۰۸۳۳$$

آہ یہ بھروسہ کر سکتے ہیں کہ وہ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک صحیح ہے کیونکہ ماہ میں ۰.۵۰۰۰۰۲۵ کی خطا چھوٹے عدد  $\frac{۰.۵}{۲۵۲۵}$  سے مضروب ہوگی اور اس لیے وہ ہمارے رتبہ تقریب تک ناقابل التفات ہے۔ قہ کی قیمت کو اوپر کی جدول میں درج کر کے ہم فوراً  $\Delta$  قہ = ۰.۵۰۰۰۰۴ اور  $\Delta$  قہ = ۰.۵۰۰۰۰۴ حاصل کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$۱ = ۱ + ۰.۵ + \frac{۱}{۲} \Delta \text{ قہ} + \frac{۱}{۱۲} \Delta^۲ \text{ قہ}$$

$$۰.۵۰۰۰۰۲ - ۰.۵۰۰۰۰۲۲ + ۰.۵۰۴۰۱۲ + ۲۵۶۹۴۴۶ =$$

$$۲۵۷۳۴۷۸ =$$

(چونکہ  $\Delta$  قہ اور  $\Delta$  قہ دونوں کے لیے آخری ہندسہ طاق ہے اس لیے نصف کرنے میں یہ تصفیہ کرنا پڑتا ہے کہ دو مساوی طور پر اچھے پانچ اعشاروی تقریباتوں میں سے کون سا تقریب منتخب کیا جائے۔ ہم متبادلاً بڑے اور چھوٹے کو منتخب کرتے ہیں اور اس طرح خطاؤں کے جمع ہونے سے بچتے ہیں۔)

اس طریقہ پر عمل کر کے ہم نتیجوں کو حسب ذیل جدول میں حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{array}{c} ۱ \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \end{array} \quad \begin{array}{c} ۱ \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \end{array} \quad \begin{array}{c} ۱ \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \end{array} \quad \begin{array}{c} ۱ \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \\ \Delta \text{ قہ} \end{array}$$

$$۰.۵۰۳۷۵۰ = \text{قہ} \quad ۲۵۵۰۰۰۰ = ۱$$

$$۰.۵۰۰۰۰۶۰$$



[illegible]



## ۱۸۳۔ دفعات ۹ تا ۹۳ کے طریقہ کی لمبیس کی

توسیع۔ ای۔ رمیس (E. Remes) نے عددوں م اور م کیلئے جن کی تعریف دفعہ ۹۲ میں کی گئی ہے مناسب قیمتیں مقرر کرنے کا ایک منظم طریقہ بیان کیا ہے:

صورت (۱) م = ف (۱' ب) م = ف { ۱ + ۱' ب + ۱' م }  
 اگر { ۱' ب + ۱' م + ۱' م }

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} < . \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} < .$$

صورت (۲) م = ف (۱' ب) م = ف { ۱ + ۱' ب + ۱' م }  
 اگر { ۱' ب + ۱' م + ۱' م }

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} < . \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} > .$$

صورت (۳) م = ف { ۱ + ۱' ب + ۱' م }  
 اگر { ۱' ب + ۱' م + ۱' م }

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} > . \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} < .$$

صورت (۴) م = ف { ۱ + ۱' ب + ۱' م }  
 اگر { ۱' ب + ۱' م + ۱' م }

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} > . \frac{\text{جف ف}}{\text{جف م}} > .$$

یہ قیمتیں صفحہ ۲۱۱ کی نامساواتوں (۷) (۸) (۹) (۱۰) کو پورا کرتی ہیں۔ رمیس یہ کہتا ہے کہ اگر ہم م اور م کی تعریفیں ریشتموں  
 $r = \frac{1}{2} \{ \text{ف (۱' ب)} + \text{ف (۱ + ۱' ب + ۱' م)} \}$   
 $s = \frac{1}{2} \{ \text{ف (۱' ب)} + \text{ف (۱ + ۱' ب + ۱' م)} \}$

کے ذریعہ کریں تو بھی یہ نامساواتیں درست رہتی ہیں جبکہ ق کی بجائے  
ر اور ق کی بجائے س کو رکھا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ  $\frac{1}{2}$  سے  $\frac{1}{3}$  (ع + ۲ ق) تبصیر ہوتا ہے اگر  $\frac{\text{جفب}}{\text{فر لا}} > \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}$ ۔ (۲۲۸)

لیکن  $\frac{1}{3}$  (ع + ۲ ق) تبصیر ہوتا ہے اگر  $\frac{\text{جفب}}{\text{فر لا}} > \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}$ ۔

فرض کرو کہ  $\frac{1}{2}$  سے  $\frac{1}{3}$  (س + ۲ ق) تبصیر ہوتا ہے اگر  $\frac{\text{جفب}}{\text{فر لا}} > \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}$ ۔

لیکن  $\frac{1}{3}$  (س + ۲ ق) تبصیر ہوتا ہے اگر  $\frac{\text{جفب}}{\text{فر لا}} > \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}$ ۔

اب ریس یہ ثابت کرتا ہے کہ تقریوں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{3}$  میں خطائیں  
علی الترتیب کم سے کم چوتھے اور تیسرے رتبہ کی (اگر اضافہ کو پہلے رتبہ

کی مقدار لیا جائے) ہوں گی اگر  $\frac{\text{جفب}}{\text{فر لا}} > \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}$ ۔

لیکن علی الترتیب کم سے کم تیسرے اور چوتھے رتبہ کی ہونگی  
اگر  $\frac{\text{جفب}}{\text{فر لا}} > \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}$ ۔

یہ نتیجہ م اور م کے اس  
انتخاب پر منحصر ہے جس کی صراحت اوپر کی گئی ہے۔ صفحہ ۱۰ کی مثال کی

خطا اس سے بہت چھوٹی ہے جس کی توقع اس نتیجہ سے ہو سکتی تھی

لیکن اس کی وجہ غالباً م اور م کا اتفاق یہ اچھا انتخاب ہے جن کو اس

طریقہ سے حاصل نہیں کیا گیا تھا جو ریس کا مجوزہ ہے۔

عام طور پر آڈمس یا گٹا کے طریقے زیادہ بہتر معلوم ہوتے ہیں۔

# ضمیمہ ۱

(۲۳۹)

وہ ضروری اور کافی شرط کہ مساوات مفرلا + ن فرما = ٹھیک ہو۔

(۱) اگر یہ مساوات ٹھیک ہے تو  
مفرلا + ن فرما = ایک کامل تفرقہ = فرت، فرض کرو  
اس لیے م =  $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$  اور ن =  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$

اس لیے  $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}}$   
اس لیے یہ شرط ضروری ہے۔

(ب) اس کے بالعکس، اگر  $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}}$  تو رکھو

= م فرلا جہاں تکمیل کی تکمیل اس مفروضہ پر کی گئی ہے کہ مستقل ہے۔

تب  $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \text{م اور } \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}}$

$\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} =$

اس لیے  $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \left( \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \right) = ۰$

ن۔  $\frac{جف ف}{جف م} =$  مستقل جہاں تک کہ لا کا تعلق ہے یعنی لا کا ایک

تفاعل

= ف (م) فرض کرو

تب  $ن = \frac{جف ف}{جف م} + ف (م)$

اب رکھو  $ف = ف + م ف (م) فرما$

تو  $ن = \frac{جف ف}{جف م}$

نیز  $م = \frac{جف ف}{جف لا} ، ف کی تعریف کی رو سے$

$= \frac{جف ف}{جف لا} ،$  کیونکہ ف اور ف میں صرف م کے ایک تفاعل کا

فرق ہے پس  $م فرلا + ن فرما = \frac{جف ف}{جف لا} فرلا + \frac{جف ف}{جف م} فرما =$  فرق  
ایک کامل تفرق۔

اس لیے مساوات ٹھیک ہے یعنی شرط کافی ہے۔

[آہا۔ مفروضہ  $\frac{جف ف}{جف لا} = \frac{جف ف}{جف م}$

جائز ہے اگر ف اور اس کے پہلے اور دوسرے تفرقی مسلسل ہوں۔  
دیکھو لیمب کا (Infinitesimal Calculus) دوسرا ایڈیشن

دفعہ ۲۱۰ یا تیسرا ایڈیشن دفعہ ۱۹۳]۔

## ضمیمہ ب

(۲۳۰)

مساوات ف (لا، ما، ی) جفب + ق (لا، ما، ی) جفب = جفب

$$+ س (لا، ما، ی) جفب = جفب$$

کے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہوتے جبکہ اس کو چار ابعاد کی سمجھا لیا ہو۔

فرض کرو کہ ع (لا، ما، ی) = ا

و (لا، ما، ی) = ب

مساواتوں فر لا = فر ما = فر ی کے کوئی دو غیر تابع تکملے ہیں تب آسانی سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$ف (جفب ع) + ق (جفب ع) + س (جفب ع) = ۰ \dots (۱)$$

$$اور ف (جفب و) + ق (جفب و) + س (جفب و) = ۰ \dots (۲)$$

مساوات (۱) کی دائیں جانب ا نہیں ہے اور اس لئے صرف رشتہ ع = ا کی وجہ سے معدوم نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اس کو مثلاً معدوم نہ بنانا چاہئے۔ اسی طرح مساوات (۲) مثلاً پوری ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ ابتدائی 'جزئی' تفرقی مساوات کا کوئی 'تکملہ'  $ف = ط (لا، ما، ی)$  ہے تو

$$ف = \frac{جفب ط}{جفب لا} + \frac{جفب ط}{جفب ما} + \frac{جفب ط}{جفب ی} = \dots (۳)$$

یہ دوسری متماثلہ مساوات ہے کیونکہ 'ف' اس میں وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے 'ف'، 'ق'، 'س' کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$جفب (ع، و، ط) = جفب (لا، ما، ی) \text{ متماثلہ}$$

پس 'ط'، 'ع' اور 'و' کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو کہ  $ط = ف (ع، و)$

یعنی 'ف = ط'، عام تکملہ کا حصہ ہے اور چونکہ 'ف = ط' کوئی

'تکملہ' ہے اس لیے کوئی 'مخصوص' تکملہ نہیں ہیں۔

[طالب علم کو اوپر کے بیان سے معلوم ہوا ہوگا کہ تفرقی مساوات کے متماثلہ پورا ہونے کی کیا اہمیت ہے۔ بل نے Proc. London Math. Soc. 1917 کے لگرائج کی خطی مساوات کے تکملوں کی ایک 'نئی' تقسیم کی ہے جس میں اس نازک فرق کو دکھایا گیا ہے جو ایک مساوات کو متماثلہ پورا کرنے والے تکملوں اور ایسی خاصیت نہ رکھنے والے تکملوں کے درمیان ہوتا ہے]



(۲۳۱)

## ضمیمہ ج

وہ جملہ جو پہلے رتبہ کی ایک واحد جزئی تفریق  
مساوات کو جیکو بی کے طریقہ پر حل کرنے سے فری  
کے لیے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۱۲۰) ہمیشہ تکمیل پذیر  
ہوتا ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ

فری = ع، فرلا، + ع، فرلام، + ع، فرلام،  
تکمیل پذیر ہے یہ ثابت کرنا ضروری اور کافی ہے کہ

ل = م = ن = ۰۔  
اب دفعہ ۱۲۰ کی مساواتوں (۸)، (۹)، (۱۰) کو جمع کرنے اور  
رشتہ (فا، فا) = کو استعمال کرنے لیکن (۱) کی صداقت کو تسلیم  
نہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ل = \frac{\text{جف (فا، فا)}}{\text{جف (ع، ع)}} + \frac{\text{جف (فا، فا)}}{\text{جف (ع، ع)}} + \frac{\text{جف (فا، فا)}}{\text{جف (ع، ع)}} = (ب)$$

$$\text{اسی طرح ل} = \frac{\text{جف (فا، فا)}}{\text{جف (ع، ع)}} + \frac{\text{جف (فا، فا)}}{\text{جف (ع، ع)}} + \frac{\text{جف (فا، فا)}}{\text{جف (ع، ع)}} = (ج)$$

$$\text{اور } \frac{\text{جف (فام' فا)} }{\text{جف (ع' ع' م)}} + \frac{\text{جف (فام' فا)} }{\text{جف (ع' ع' م)}} + \frac{\text{جف (فام' فا)} }{\text{جف (ع' ع' م)}} = \text{ن} \quad (د)$$

مساواتوں (ج) (د) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  $\text{یا} = \text{م}$

$\text{ن} = \text{یا} = \text{م}$ ۔ جہاں  $\Delta$  وہ منقطع ہے جس کے اجزائے ترکیبی (ب) (ج) (د) میں  $\text{ل}$ ،  $\text{م}$ ،  $\text{ن}$  کے سر ہیں۔

لیکن یہ سر خود منقطع

$$\text{جے} = \frac{\text{جف (فام' فا)} }{\text{جف (ع' ع' م)}} \quad (ج)$$

کے اجزائے ترکیبی کے ہم جزو ضربی ہیں اور مقطعوں کے نظریہ کی رو سے  $\Delta = \text{جے}^2$ ۔

اب جے معدوم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو ایک تنافلی رشتہ کا وجود لازم آئے گا جس سے دفعہ ۱۴۰ کے اس مفروضہ کی تردید ہوگی کہ

$$\text{فا} = \text{فا} - \text{ل} = \text{فا} - \text{ل} = \text{ل} = \text{ل} = \text{ل}$$

سے  $\text{ع}$ ،  $\text{ع}$ ،  $\text{ع}$  کو  $\text{لا}$ ،  $\text{لا}$ ،  $\text{لا}$  کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{array}{l} \Delta \neq \text{اس لیے} \\ \text{ل} = \text{م} = \text{ن} = \text{اس لیے} \end{array}$$

۱۵۔ اس ضخیمہ کی تمام مساواتیں متماثل پوری ہوتی ہیں۔

## ضمیمہ د

## مزید مطالعہ کیلئے مشورے

(۲۳۲)

اُن تمام کتابوں کی فہرست جو تفرقی مساواتوں پر لکھی گئی ہیں یہاں درج کرنا مقصود نہیں ہے۔ ہم صرف چند اہم ترین کتابوں کے نام ان کو تین جماعتوں میں تقسیم کر کے بیان کریں گے۔ وہ کتابیں جو تحلیلی نقطہ نظر سے دلچسپی رکھتی ہیں (دسویں باب کے سلسلہ میں) :-

(۱) فورسائٹ: "Theory of Differential Equations." مطبع جامعہ کیمبرج، ۱۹۰۷ء اور سنین مابعد۔

یہ اہم تصنیف چھ جلدوں میں ہے اور اس موضوع پر انگریزی میں سب سے زیادہ مکمل کتاب ہے۔ اس کو اس کتاب کے ساتھ غلط ملط نہ کرنا چاہئے جو مبتدیوں کے لیے ایک جلد میں لکھی گئی ہے (چوتھا ایڈیشن ۱۹۱۴ء میکملین اینڈ کو)۔

(ب) گروسا: Cours d'Analyse Mathématique. جلد دوم و سوم

(دوسرا ایڈیشن ۱۹۱۱ء ۱۹۱۵ء، گاتھیرویلیرس۔ انگریزی ترجمہ (Ginn) نے شائع کیا ہے)۔

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen (ج) شیلنگر: }

۱۸۸۵ء ۱۸۹۶ء، ۳ جلدوں میں، 'ہاینس' (۱۹۲۰ء انگلش) Ordinary Differential Equations (د) انس:

Differentialgleichungen

(ع) بیرباخ:

(۱۹۲۷ء لاٹنفس)

۲۔ وہ کتابیں جو کچھ تو فیصلی اور کچھ ہندسہ کی نقطہ نظر سے ہیں۔

(د) گرسا: Differential Equations (1954, Macmillan Co.)

(ب) گرسا: Equations aux dérivées partielles du premier ordre

(۱۸۹۶ء ۲۰۱۸ء جلدوں میں ہرمن ایٹ فلنس)

(ج) بیج: Ordinary Differential Equations from the standpoint of "Lie's Transformation Groups" (1897, Macmillan)

(۱۸۹۷ء سیگیلن)

اس میں تفرقی مساواتوں کے مبادیات پر بہت ہی ابتدائی طریقہ سے بحث کی گئی ہے۔

(د) ڈکسن: Differential Equations from the group standpoint

(۱۹۲۷ء سلیم جاسٹ پرٹنس)

۳۔ وہ کتابیں جو طبیعی نقطہ نظر سے دیسی رکتی ہیں (نیسر اور جوتھے باب کے سلسلہ میں):

(ا) ریمان: "Partielle Differentialgleichungen und"

deren Anwendung auf physikalische Fragen (1869, Vieweg)

(۱۸۶۹ء وی دیگ)

(ب) ریمان و ویبر: (ا) کی نظر ثانی کر کے اور اس میں بہت کچھ اضافہ کر کے شائع کیا گیا ہے:

(۱۸۹۷ء وی دیگ)

(ج) بیٹ میاں: "Differential Equations" (۱۹۱۸ء لاٹنفس)

اس میں تحقیقات جدید کے بہت سے حوالے درج ہیں۔

اصلی مقالوں کا تفصیلی ذکر انکس ہائیگن پروفیسر ایم۔ جے۔ ایم۔ ہل کے وہ مقالے جو Proceedings of the London Mathematical Society میں شائع ہوئے

میں نظر انداز نہیں کئے جاسکتے۔ میں ہل کے مختلف مقالوں کو مشائع

کرنا چاہتا ہوں۔ پہلے دو "لکرائج" کی خطی جزئی تفرقی مساوات کے خاص تکمیلے "Journal of the London Mathematical Society 1939" اور "تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائیوں کی ناکامیت" Math. Gaz. 1939 ہیں۔ میرے مقالہ "خطی تفرقی مساواتوں کے مکملوں کے تحت گردہ" (Tohoku Math. Journal 1937) میں زیادہ وسیع مضمونوں پر بحث کی گئی ہے۔

دیگر حوالے: دفعہ ۸۱ کے حاشیہ میں دیکھو۔ ادب اور فورسائٹ کی کتاب (ایک جلد والی) کے جدید اڈیشنوں میں بہت کم تغیر کیا گیا ہے۔

## متفرق مثالیں پوری کتاب پر

[ لندن ] 
$$(1) \frac{فرا}{فزی} = \frac{۱ + ۳لا}{۲لا + ۶}$$

[ لندن ] 
$$(2) \frac{فرا}{فلا} + ۲لا = ۱ + (۱ + لا)$$

[ لندن ] 
$$(3) مس م + \frac{فرا}{فلا} + مس لا = جم م جم لا$$

[ لندن ] 
$$(4) م = ۲ + \frac{فرا}{فلا} \times ۲لا = ۱ + ۲$$

[ لندن ] 
$$(5) (۱ - لا) \frac{فرا}{فلا} = لا م - ۲لا$$

[ لندن ] 
$$(6) (عف + ۲) م = جب لا$$

[ لندن ] 
$$(7) (عف - ۲) م + ۳عف = لا + ۵ + لا جم لا$$

[ لندن ] 
$$(8) (۱ - عف + لا عف) م = لا + لا + ۱$$

[ لندن ] 
$$(9) جم لا جب لا = \frac{فرا}{فلا} + م + جم لا$$

[ لندن ] 
$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{فرا}{فزی} = لا + م + ۲ جم ت \\ م - لا ۳ = \frac{فرا}{فزی} \end{array} \right.$$

[ لندن ] 
$$(11) م = لا + ۱ + \left( \frac{فرا}{فلا} \right) ۳$$

[ لندن ] 
$$(12) م = ۲ - \left( \frac{فرا}{فلا} \right) ۲ - \frac{۱}{فلا} ۲$$

[ لندن ] 
$$(13) (عف + ۲) م + ۸عف = لا جم لا + ۱۶$$

(۳۳) می آفرماید می آفرماید لا

(۱۵) (ا-ی-ی) قرلا + (لا+ای-ی) قرلا

$(+)(-)(+) = (-)$

(۱۶)  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^n = (\frac{1}{x})^n + n(\frac{1}{x})^{n-1}(\frac{1}{y}) + \dots$

4. (۱-۲-۳-۴) لا مافری = [ التفتت ]

$$(14) \quad \lambda_2 = \lambda_1 + (\lambda_1' - \lambda_2')$$

$$(14) \quad (11+12-13) + 14 = 11 + 14 = 25 \quad \text{[استدلال]}$$

$$(14) \quad \frac{(6y - 5y + 6y)^2}{6y - 5y} + 6y - 5y$$

$$y = (q + m)q + \dots$$

[تذکرہ]

(۲۳)  $\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$  [نکته]

(۲۳۱) - (۱-۲) [تدین]

(۲۳) = ۱۰۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۱۰۰

(25) یی --- س + غ ق س =

(۳۶) لا - لا ما س + ما ت = لا ما

(۳۷)  $(1 + \frac{1}{2})^n = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} + \dots$

4 ت ع (ع 14) = [الملك]

(۳۸)  $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2}$  [نتیجاً میل برای پاس]

[illegible]

$$\left(\frac{2}{13}\right) \frac{17}{213} \text{ is } (29)$$

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$$(۳۰) \frac{فر۲}{فر۲} - \frac{ن}{لا} \frac{فر۲}{فر۲} = ۰ = \frac{لا۲}{لا} + \frac{فر۲}{فر۲}$$

[متھیماٹیکل ٹری پاس]

$$(۳۱) (ی ع + لا) + (ی ق + ما) = ۱$$

[ " " ]

$$(۳۲) \text{ مساوات } \frac{فر۲}{فر۲} - \frac{فر۲}{فر۲} = ۳ = \frac{فر۲}{فر۲} + \frac{لا۲}{لا} = ۲$$

کو<sup>۳</sup> کا حل معلوم

کرو جو معدوم ہو جبکہ لا = ۰ اور نیز جبکہ لا = کوک<sup>۲</sup>

[متھیماٹیکل ٹری پاس]

$$(۳۳) \text{ مساوات } \frac{فر۲}{فر۲} + \frac{فر۲}{فر۲} = ۲ + \frac{فر۲}{فر۲} = (ک۲ + ل۲) لا$$

= اجم ع ت کو حل کرو۔  
ثابت کرو کہ ع کی مختلف قیمتوں کے لیے خاص تکملہ کا محیط  
بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ع = ل۲ - ک۲ اور ثابت کرو کہ اس وقت خاص تکملہ

$$\left( \frac{ل}{ک} \right) (جم ع ت - ع)$$

[لندن]

$$۴ جہاں مس ع = \frac{ع}{ر}$$

$$(۳۴) \text{ مساوات } \frac{فر۲}{فر۲} + \frac{فر۲}{فر۲} = مس لا + ما جم لا = ۰$$

کو ی = جب لا رکھ کر حل کرو۔

$$(۳۵) (۱) \frac{جف۲}{جف۲} + \frac{جف۲}{جف۲} + \frac{جف۲}{جف۲} = \frac{جف۲}{جف۲}$$

کے حل کو شکل

فار (ر + ی) کا یا نہ کر تعامل فا کو معلوم کرو جہاں ر = لا + ما + ی اور  
ی کے لحاظ سے تکمل کر کے حل و = ی کوک (ر + ی) - ر کو اخذ کرو۔



$$(۲) \text{ جف ت } = \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف لا}^۲} \text{ کے ایک حل کو شکل ذہ (ضا) کا}$$

مانکر تفاعل ذہ کو معلوم کرو جہاں ضا =  $\frac{\text{لا}}{\text{ت}}$  اور لا کے لحاظ سے

تفرق کر کے ایک دو سرا حل معلوم کرو۔ [لندن]  
(۳۶) لا، ما، ی کا ایک منطوق صحیح تفاعل و معلوم کرو جو شرط

$$\text{جف و}^۲ + \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف ی}^۲} + \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف لا}^۲} = ۰$$

کو پورا کرے اور نیز ایسا ہو کہ ایک کرہ کی سطح پر کے نقطوں پر اس کی قیمت  
۱ ی ہو جہاں یہ کرہ اکائی نصف قطر کا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔  
[میتھیٹیکل ٹرائی پاس]

(۳۷) ثابت کرو کہ لاپلاس کی مساوات  $\nabla^2 \phi = ۰$  کا ایک حل

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2) \log r \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

ہے جہاں  $r$ ،  $\phi$ ،  $y$  اسطوانی محدد ہیں اور  $(x, y, z)$ ،  $\phi$ ،  $r$  اختیار  
مستقل ہیں۔ [لندن]

$$(۳۸) \text{ ثابت کرو کہ مساوات } \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف لا}^۲} + \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف ی}^۲} + \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف ت}^۲} = ۰$$

کا ایک حل جے (ر)  $(x^2 + y^2 + z^2) \log r$  ہے جہاں  $r$   
اور  $\phi$  قطبی محدد ہیں اور  $(x, y, z)$  اور  $\phi$  اختیار مستقل ہیں۔ [لندن]

$$(۳۹) \text{ بتاؤ کہ مساوات } \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف ت}^۲} = \frac{\text{جف و}^۲}{\text{جف لا}^۲}$$

کے حل سلسلوں میں کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پوری طرح  
سے اس صورت کو حل کرو جس میں

$$۱ = ۶ \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}} = \text{ج جہزت}$$

جبکہ لا = ۰ [لندن]

$$(۴۰) \text{ مساوات } ۴ \frac{\text{فر ۲ ما}}{\text{فر لا}} + ۹ لا = ۰$$

کے دو غیر تابع حل لا کی صعودی قوتوں میں حاصل کرو اور مساوات کے متغیروں کو بدل کر یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ کامل حل کو شکل

$$۰ = ۱ \frac{\text{لا}}{\text{جے}} + \text{ج} \frac{\text{لا}}{\text{جے}} - \text{جے} \frac{\text{لا}}{\text{جے}} \quad (۴۱)$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں ۱ اور ج اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

$$(۴۱) \text{ ثابت کرو کہ مساوات } \frac{\text{فر ۲ ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف} + \text{ق} + \text{ما} = ۰$$

کا کامل حل اندراج  $\text{ما} = ۱ + \frac{۱}{\text{ما}}$  سے حاصل کیا جاسکتا ہے اگر ایک خاص حل  $\text{ما}$  معلوم ہو جہاں  $\text{ف}$ ،  $\text{ق}$  اور  $\text{ما}$  کے تفاعل ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر دو خاص حل  $\text{ما}$  اور  $\text{ما}$  معلوم ہوں تو کامل حل  
لوک  $\left( \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\text{ما} - \text{ما}} \right) = \text{ک} \text{ر} (\text{ما} - \text{ما}) \text{فر لا} + \text{مستقل}$

—

$$\text{مساوات } (۱ - \text{لا}) \frac{\text{فر ۲ ما}}{\text{فر لا}} + لا + ۱ - (۱ + لا) \text{ما} + (۱ - لا) \text{ما} = ۰$$

کا کامل حل معلوم کرو، اس مساوات کے دو خاص حل ہیں اور  
ان کا حاصل ضرب اکائی ہے۔ [لندن]

$$(۴۲) \text{ ثابت کرو کہ تفرقی مساوات } (۱ - \text{لا}) \frac{\text{فر ۲ ما}}{\text{فر لا}} + ۲ + \text{ب} + (۱ - لا) \text{لا} + ۲ + \text{ما} = ۰$$

کا ایک حل شکل (۱+لا) (۱-لا) کا ہے جہاں ف اور ق متعین  
مستقل ہیں۔ اس مساوات کو پوری طرح حل کرو اور اس سے اخذ کرو  
یا کسی طرح ثابت کرو کہ اگر ۱۲ ایک مثبت صحیح عدد ہو تو مساوات  
کا ایک حل 'لا' میں ایک کثیر رقمی ہے جس کا درجہ ن ہے۔  
(۴۳) تصدیق کرو کہ مساوات

(۲۳۶)

لا (۱-لا)  $\frac{فر۲}{فر۱لا} + (۱-لا) (۱+لا۳) \frac{فر۳}{فر۱لا} + ۴لا (۱+لا) = ۰$   
کا ایک خاص حل ۱-لا ہے۔ اس کو پوری طرح حل کرو۔  
مبدلوں کے تغیر کے طریقہ سے یا کسی اور طرح اس مساوات کو  
پوری طرح حل کرو جو اوپر کی مساوات میں بائیں جانب صفر کی بجائے  
(۱-لا)  $۲$  رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ [لندن]  
(۴۴) ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{فر۲}{فر۱لا} + ف \frac{فر۳}{فر۱لا} + ق = ۰$$

کا کامل حل جہاں ف اور ق 'لا' کے دئے ہوئے تفاعل ہیں معلوم ہو سکتا  
ہے اگر مساوات

$$\frac{فر۲}{فر۱لا} + ۶ + ق - \frac{۱}{۲} \frac{فر۳}{فر۱لا} - \frac{۱}{۴} ف = ۰$$

کا کوئی حل معلوم ہو۔

اس سے یا کسی اور طرح مساوات

$$(۱-لا) \frac{فر۲}{فر۱لا} - ۴لا \frac{فر۳}{فر۱لا} + (۳-لا) = ۰$$

[لندن]

کو حل کرو۔

(۴۵) ثابت کرو کہ  $و = ط$  تو  $لا$  رکھنے سے مساوات

$$لا \frac{فر۲}{فر۳} - ۲ن \frac{فرو}{فر۳} + لا و = ۰$$

کے کامل حل کو جہاں  $ن$  ایک صحیح عدد ہے شکل

$$(۱ \text{ جم لا} + ۱ \text{ ب جب لا}) + (۱ \text{ ف لا}) + (۱ \text{ ب جب لا} - ۱ \text{ ب جم لا}) + (۱ \text{ ف لا})$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں  $ف (لا)$  اور  $ذ (لا)$  موزوں کثیر رقمی ہیں۔ [لندن]

(۴۶) اگر مساوات

$ف (لا) - مآ - ف (لا) مآ + ف (لا) مآ + خ (لا) مآ = ۰$   
کے دو غیر تابع حل  $و$  اور  $و$  ہوں جہاں  $ز$  بر  $لا$  کے لحاظ سے تفرق کو بیان کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ کامل حل

$$۱ + ۶ + ب + و + ج + ط ہے جہاں$$

$$ط = و \frac{و (لا) فر لا}{(و - و) (و - و)} - و \frac{و (لا) فر لا}{(و - و) (و - و)}$$

اور  $۱$ ،  $ب$ ،  $ج$  اختیاری مستقل ہیں۔

مساوات

$$لا (لا + ۵) مآ - لا (لا + ۲۵) مآ + (۲۲ لا + ۴۰) مآ - ۳۰ لا مآ = ۰$$

کو حل کرو جس کے حل شکل  $لا$  کے ہیں۔ [لندن]

(۴۷) دو غیر تابع قوت کے سلسلے حاصل کرو جو مساوات

$$(لا - ۲) \frac{فر۲}{فر۳} + ب لا \frac{فر۲}{فر۳} + ج مآ = ۰$$

کے حل ہوں اور ان کے استدقاق کا علاقہ معلوم کرو۔ [لندن]

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$لا (لا - ۱) \frac{فر۲}{فر۳} + (۱ - ۲ لا) \frac{فر۲}{فر۳} - \frac{۱}{۳} مآ = ۰$$

کے دو تکملے

$$(۲۳۷) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right) \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} \log 2$$

ہیں جہاں  $\left\{ \frac{(n+1)}{(1+n)} \right\} = 1$  [لندن]

(۴۹) وہ تفرقی مساوات معلوم کرو جس کا ابتدائی

$$= 1 \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50)$$

ہے جہاں ۱، ۲ اختیار می مستقل ہیں۔  
(۵۰) وہ شرط حاصل کرو کہ مساوات

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{x-1}$$

تکمیل کرنے میں استعمال کرو۔ [لندن]

(۵۱) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{x-1}$$

کا ایک مشترک ابتدائی ہے۔ اس کو معلوم کرو۔ [لندن]

(۵۲) ثابت کرو کہ مساوات

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{x-1}$$

کا کوئی حل مساوات

$$\frac{f^2}{fz} - (f) - \frac{f}{fz} (q) + e = 0$$

کا ایک متکمل جزو ضربی ہے اور اس کے بالعکس یعنی یہ کہ ثانی الذکر مساوات کا کوئی حل اول الذکر کا ایک متکمل جزو ضربی ہے۔ پس ان میں سے پہلی مساوات کو پوری طرح تحمل کرو، یہ دیا گیا ہے کہ

$$\frac{f^2}{fz} - \left(\frac{f}{fz}\right) + \frac{f}{fz} = 0 \quad [لندن]$$

(۵۳) اگر مساوات

$$\frac{f^2}{fz} + f - \frac{f}{fz} + q = 0$$

کا ایک حل جہاں  $f$  اور  $q$ ، لا کے تفاعل ہیں  
 $m = 1$  جب  $(n + لا + عم)$

ہو سکے جہاں  $m$  اور  $e$  اختیاری مستقل ہیں تو  $f$  اور  $q$  کے درمیان  
 رشتہ معلوم کرو۔

$$\frac{f^2}{fz} - \frac{f}{fz} - m = 0 \quad (۵۴)$$

کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ اس کے دو تکملے متکمل

$$m = \frac{1 + b لا}{لا - 1}$$

[لندن]

کے ہیں۔

(۵۵) ثابت کرو کہ اس خطی تفرقی مساوات کو جس کے حل مساوات

$$\frac{f^2}{fz} + f - \frac{f}{fz} + q = 0$$

کے حلوں کے مربع ہیں

(۴۳۳۶)



اس سے مساوات ٹھیک بن جاتی ہے اگر وہ تکمیل پذیر ہو۔

مساوات

$$۱^۲ (لافرلا + ما فرما) + ۱ (لاما + ی) - (لا + ما) ۲ (فرلا + فرما)$$

$$+ (لا + ما) \{ ۱ - ی (لا + ما) - (لا + ما) ۲ \} فری = ۰$$

کو تکمیل کرو اور تکمیل جبر یہ شکل میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۶۰) ثابت کرو کہ اگر مساوات  $ف + فرلا + ق + فرما + فری = ۰$  ٹھیک ہو تو اس کو شکل  $لہ + فرع + مہ + فرو = ۰$  میں تحویل کیا جاسکتا ہے

جہاں  $لہ$  صرف  $ع$  اور  $و$  کا ایک تفاعل ہے اور  $ع = مستقل$

اور  $و = مستقل$  مساواتوں

$$\frac{فرلا}{جف ق - جف س} = \frac{فرما}{جف س - جف ف} = \frac{فری}{جف ف - جف لا}$$

کے دو غیر تابع حل ہیں۔

اس سے یا کسی اور طرح مساوات

$$(ما + ی) (فرلا - لای فرما + لاما فری) = ۰$$

کو تکمیل کرو۔ [لندن]

$$(۶۱) \text{ ثابت کرو کہ } ی = ۲ - لاما$$

$$لا + ما + ی = ۲ - لاما = ف (لا + ما + ی)$$

میں جو

$$\{ ۲ - ی (۲ - لاما - لا) - ۱ \} ی + \{ ۲ - لاما - لا + ۱ - ی (۲ - لاما - لا) \} ی = لا - ما$$



کا عام حل ہے مثال نہیں ہے لیکن اس کے باوجود وہ اس مساوات کا حل ہے۔ [شفیلڈ]  
(۶۲) (۱) بتاؤ کہ ریگنی کی مساوات

$$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{۱} (لا) + \frac{۱}{۱} (لا) + \frac{۱}{۱} (لا) + \frac{۱}{۱} (لا)$$

کو کس طرح دوسرے رتبہ کی خطی مساوات میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔  
اس سے یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ کسی چار تکملوں کی چلیبی نسبت مستقل ہوتی ہے۔

(۲) تصدیق کرو کہ

$$لا \frac{فرما}{فرلا} = لا' - \frac{۱}{۴} + ما'$$

کے تکملے  $\frac{۱}{۴} + لا مس لا' - \frac{۱}{۴}$ ۔ لام لا ہیں اور ابتدائی کو ما خود کرو۔  
[لندن]

$$(۶۳) \frac{فرلا}{فرت} = - - - - - ما'$$

$$\frac{فرما}{فرت} = - - - - - لا$$

کو معمولی طریقہ پر حل کر کے اور نتیجہ سے ت کو ساقط کر کے ثابت کرو کہ  
نقطہ (لا، ما) ایک دائرہ پر واقع ہے۔  
نیز اس کو پہلی مساوات کے لاگنے میں دوسری مساوات کے  
ماگنے کو جمع کر کے ثابت کرو۔

[ان مساواتوں سے ایک نقطہ کی جو زاویہ رفتار سے ایک دائرہ مرتب  
کر رہا ہے رفتاریں، محوروں کے متوازی تحلیل رہے، حاصل ہوتی ہیں]

$$(۶۴) منحنیوں ما' (۱ - لا) = لا'$$

کے قائم مرآة معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ وہ نظام  
 $ز^2 = ب^2 (3 + جم^2 ط)$   
 میں تحویل ہوتے ہیں۔ [شیفیلڈ]

(۶۵)  $\frac{فر لا}{فرت} = ن - ما - م ی$

$\frac{فر ما}{فرت} = ل ی - ن لا$

$\frac{فر ی}{فرت} = م لا - ل ا$

جہاں ل، م، ن مستقل ہیں، ثابت کرو کہ

$ل لا + م ما + ن ی ی$

اور  $\left(\frac{فر لا}{فرت}\right) + \left(\frac{فر ما}{فرت}\right) + \left(\frac{فر ی}{فرت}\right)$

سب مستقل ہیں۔ ان نتیجوں کی تعبیر بیان کرو۔

(۶۶) ایک مستوی منحنی ایسا ہے کہ مثلث فن ت کا رقبہ قطعاً فن کے رقبہ کا 'م' گنا ہے جہاں فن ت کسی نقطہ فن پر کا زیرعاس، فن معین، اور ا مبداء ہے جو منحنی پر ہے۔ ثابت کرو کہ

اس منحنی کی مساوات  $ما^2 - ۱ = ز^2 - ۲$  لا ہے۔

ثابت کرو کہ قطعاً فن کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم مرتسم ہوتا ہے وہ اس مخروط کے حجم کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جو مثلث فن ت کی گردش سے تکوین پاتا ہے۔ [لندن]

(۶۷) اندراج لا = رجم ط، ما = رجب ط استعمال کر کے یا کسی اور طرح تفرقی مساوات (۲۳۰)

$$(لا^۲ + ما^۲) (لا - ع) = ۲(ما - ع) + ۱ = ع^۲$$

کو حل کرو۔

نیز نادر حل معلوم کرو اور نتیجوں کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔ [لندن]  
(۶۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$(لا^۲ + ما^۲ - ۲لا ع) = ۲(ما - ع) + ۱ = ع^۲$$

کلیہ کی شکل میں 'ما'۔ 'لا' کو نیا متنوع متغیر بنانے سے تحول ہو سکتی ہے۔ اسکو حل کرو اور ثابت کرو کہ نادر حل سے دو قائم زائد تعبیر ہوتے ہیں۔ نیز اسکی تصدیق کرو کہ یہ حل دی ہوئی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ [لندن]  
(۶۹) ثابت کرو کہ وہ منحنی جن میں نصف قطر انحناء اُس طول کے مساوی ہوتے ہیں جو عماد پر ایک ثابت خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے دائرے ہوں گے یا زنجیر۔ [لندن]

(۷۰) مساوات

$$لا = لا - ۲لا ع + ع^۲$$

کو حل کرو اور نادر حل معلوم کرو۔ [لندن]

(۷۱) ایک مستوی منحنی ایسا ہے کہ اس کا نصف قطر انحناء غم اُس مقطوعہ نہ کے ساتھ جو عماد پر منحنی اور محور لا کے درمیان منقطع ہوتا ہے رشتہ غم نہ = ج رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر منحنی کے تقعر کو محور لا کی جانب سے گہا لیا جائے تو

$$ما^۲ = ج جب ا فہ + ب$$

جہاں ولا کے ساتھ حماس کا میلان فہ ہے۔ صورت ب = ۰ میں لا کی قیمت، فہ کے تفاعل کے طور پر حاصل کرو اور منحنی کی شکل کا نقشہ کھینچو۔ [لندن]

(۷۲) اگر منحنیوں کے ایک قبیل کی تفرقی مساوات کو دو قطبی محدودں ر، ر، ط، ط میں بیان کیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ قائم مرماہ کی



کو تکمل کرو -

ایسے خاص حل معلوم کرو کہ ی = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے جو تراش منقطع ہو وہ (۱) ایک دائرہ (۲) ایک قائم زاہد ہو۔ [لندن] (۷۹) منحنیوں کا ایک قبیل مساواتوں

$$لا + ما + ی = عہ ، ۲ لا + ۵ ما + ی + ۳ لا = ہ$$

سے تعبیر ہوتا ہے جہاں عہ بہ مبدل ہیں۔ ثابت کرو کہ منحنیوں کا یہ قبیل سطحوں کے ایک قبیل سے علی القوا قطع ہو سکتا ہے اور اس قبیل کی مساوات معلوم کرو۔ [لندن] (۸۰) حل کرو

ب (ب ج ما + ا لای) ع + ا (ا ج لا + ب مای) ق  
= ا ب (ی - ج)  
اور ثابت کرو کہ حل کسی ایسی سطح کو تعبیر کرتا ہے جو ان خطوں سے  
تکوین پاتی ہے جو دودے ہوئے خطوں سے ملتے ہیں۔

$$(۸۱) \text{ حل کرو (ا) } ل = \frac{\text{فرب}}{\text{قرت}} + \text{سرب} = ع$$

جہاں ل، س، اور ع مستقل ہیں۔  
[یہ مساوات برقی رو ب کے لیے ہے جو فراہمت س اور ذاتی مالہ کی قدر ل کے ایک تار میں ایک مستقل اولیج ع کے تحت ہے]  
(۲) اختیاری مستقل کی قیمت معلوم کرو اگر ب = ب جبکہ ت = ۰  
(۳) ب کس قیمت کے قریب آئے گا جبکہ ت بڑا ہو؟  
[مستقل روؤں کے لیے اوہم کا کلیہ]

$$(۸۲) \text{ حل کرو } ل = \frac{\text{فرب}}{\text{قرت}} + \text{سرب} = ع \text{ جم ع ت}$$

[حروف کا مفہوم وہی ہے جو پچھلی مثال میں بیان کیا گیا ہے]

اَلَا اَنَّهُ اُولَیْح ع جم ع ت مستقل ہونے کی بجائے اب دوری ہے۔  
متمم تفاعل جلد ہی قابل نظر انداز ہو جاتا ہے یعنی رو کے آزاد ہتزازوں  
کی تفصیر ہو جاتی ہے]

$$(۸۳) \quad \text{ل} \frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} + \text{س} \frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} + \frac{\text{ق}}{\text{ج}} = \text{ع جم ع ت}$$

کا خاص تکملہ معلوم کرو۔

[اس سے لیڈنی مرتبان کے ایک پترے پر باریق حاصل ہوتا ہے  
جبکہ دوری محرکہ برق ع جم ع ت اس دور میں عمل کرتا ہے جو پتروں کو  
ملاتا ہے۔ خاص تکملہ سے وہ بار حاصل ہوتا ہے جو آزاد برقی ہتزازوں  
کی تفصیر کے بعد پایا جاتا ہے۔]

(۸۴) ثابت کرو کہ مساواتیں

(۲۴۲)

$$۲ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۳ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - ۱۱۶ - ۱۱۳ = ۰ \quad ۴ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - ۱۱۲ - ۱۱۳ = ۰$$

آزمایشی حل م = م لا سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ م دو درجی مساوات

$$\frac{۲۳+۱۶}{۲۳+۲} = \frac{۲۳+۲}{۴}$$

کی ایک اصل ہو، اور لا، مساوات

$$۴ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - (۲۳+۲) = ۰$$

سے حاصل ہو۔ پس ثابت کرو کہ ان تفرقی مساواتوں کے حلوں کے دو جٹ

$$۴ = ۱۱ = ۱۴ \quad ۴ = ۱۴$$

$$۴ = ۱۱ = ۱۳ \quad ۳ = ۱۳$$

اور

ہیں اور اس لیے عام حل

$$لا = ۱ قوت + ۲ قوت$$

$$۱ = ۲ قوت - ۳ قوت$$

(۸۵) پچھلی مثال کا طریقہ مساواتوں

$$۱ = ۲ قوت + ۳ قوت - ۴ قوت$$

$$۳ = ۲ قوت + ۳ قوت - ۴ قوت$$

کو حل کرنے میں استعمال کرو۔

[اس نمونہ کی مساواتیں ان مسئلوں میں واقع ہوتی ہیں جو آزادی کے دو درجے رکھنے والے نظاموں کے صغیر ہتھکنڈوں سے متعلق ہوتے ہیں۔ ۱ = ۲ (یا ۱ = ۵) سے جو حرکت حاصل ہوتی ہے اس کو آزاد کا صدر یا طبعی اسلوب کہتے ہیں۔ صریحاً یہ حرکت ایسی ہے کہ نظام کے تمام حصے ایک ہی دورے میں ایک ہی سمت میں موسیقی طور پر حرکت کر رہے ہیں۔ اگر ۱ = ۲ اور ۱ = ۵ کو لا اور مائی بجائے گئے متغیر قرار دیا جائے تو ان کو صدر یا طبعی محدود کہا جاتا ہے۔]

(۸۶) اگر 'ل'، 'م'، 'ن'، 'س' میں مثبت عدد ہوں اور

ل < م تو ثابت کرو کہ لا اور مابین کی تعریف مساواتوں

$$ل = \frac{فرما}{فرت} + م + \frac{فرما}{فرت} = ۱$$

$$م = \frac{فرما}{فرت} + ن + \frac{فرما}{فرت} = ۱$$

سے ہونی ہو لا انتہا لگھٹے ہیں جبکہ ت بڑھتا ہے۔

[ثابت کرو کہ لا = ا قو + ب قو اور ما = ع قو + ف قو جہاں  
 عہ اور بہ حقیقی اور منفی ہیں۔ ان مساواتوں سے دو باہم اثر کرنے والے دوروں کے آزاد ارتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ ل اور ن ابتدائی امالہ کی  
 اور م باہمی امالہ کی قدیں ہیں اور س اور ج فراہمیتیں ہیں] (۸۷)  
 ثابت کرو (علوں کا پوری طرح عمل لگنے بغیر) کہ ہمزا مساوی  

$$ل \text{ فرلا} + م \text{ فرت} + ن \text{ فرلا} + ج \text{ لا فرت} = ع \text{ جب عت}$$

$$م \text{ فرلا} + ن \text{ فرت} + س \text{ فرلا} =$$

(۲۲۳) کے خاص تکملے نہیں بدلتے اگر پہلی مساوات میں رقم می لا۔ فرت کو

ترک کیا جائے اور ل کی بجائے ل۔  $\frac{1}{ج ع}$  رکھا جائے۔  
 [یہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ خاص تکملے شکل اجب (عات  
 - ع) کے ہیں]  
 [ان مساواتوں سے دو باہم اثر کرنے والے دوروں میں ردئیں حاصل ہوتی  
 ہیں جبکہ اولی دور جس میں گنجائش ج کا ایک مکشفہ ہے ایک متبادل  
 محرکہ برق کے زیر عمل ہو۔ اس مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مکشفہ کے  
 اثر کی خود امالہ کے اضافہ سے تلافی کیا جاسکتی ہے]

(۸۸) اگر  $ل \text{ فرلا} + م \text{ فرت} + ن \text{ فرلا} + ج \text{ لا فرت} = ف \text{ (ت)}$   
 اور  $م \text{ فرلا} + ن \text{ فرت} =$

جہاں ل ن - م بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے تو ثابت کرو کہ



لا کے لیے جو متکمّل تفاضل حاصل ہوتا ہے وہ ایک بہت تیز ہتھوڑا کو تعبیر کرتا ہے

[یہ مساواتیں ریالے (Rayleigh) کے اس نظریہ میں واقع ہوتی ہیں جو ایک بند ثانوی امالی پچھے کے اولی دور کے ایک مکثفہ کے ہتھوڑی اخراج سے متعلق ہے۔ یہ مشابہ طلب ہے کہ دوسری مساوات سے یہ واضح ہے کہ ثانوی رو اپنے اعظم پر ہوتی ہے جب کہ اولی رو اپنے اقل پر ہو۔ دیکھو گریس کی کتاب (Magnetism and Electricity) دفعات ۴۸۹ و ۴۹۰۔]

(۸۹) ثابت کرو کہ ہتھوڑا مساواتوں

$$م \frac{فرق}{ت} = - (لا - لا) + ک جمع ع ت$$

$$م \frac{فرق}{ت} = - (لا + لا) + ک جمع ع ت$$

کے خاص تکملوں کو

$$لا = \frac{ب ک}{ا - ب ب} جم ع ت$$

$$لا = \frac{ا - ب ب}{ا - ب ب} جم ع ت$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں ب = م ع۔ ا اور ب = م ع۔ (ا + ا)۔ پس ثابت کرو کہ ع کی دو خاص قیمتوں کے لیے لا اور لا دونوں لامتناہی ہیں۔

[ان مساواتوں سے "لیکچر دوہرے رفاص" کے ہتھوڑا اصل ہوتے ہیں۔ کیتوں م اور م کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ وہ سر ایک ہی افقی خط میں حرکت کر سکتے ہیں۔ ایک کمائی م کو اس خط کے ایک ثابت نقطہ سے لاتی ہے اور دوسری کمائی م اور م کو ملاتی ہے۔

م پر ایک دوری قوت عمل کرتی ہے اور حل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دونوں کمیتیں قسری ارتعاش کرتی ہیں جن کا محیط 'ع' کی دو خاص قیمتوں کے لیے بہت بڑا ہو جاتا ہے۔ بلاشبہ یہ پھر گمگ کا مظہر ہے۔ 'ع' کی وہ قیمتیں جن سے اس صورت میں گمگ پیدا ہوتا ہے وہی انہیں ہیں جو ہوتیں اگر صرف ایک کمیت موجود ہوتی۔ اس کا اطلاق برائین دہرے میں "تیر گمگ" کی بحث پر کیا جاسکتا ہے۔ دیکھو اسٹوڈولائی کتاب (Steam Turbine) [

(۹۰) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں

(۲۲۳)

$$\left(\frac{1}{3}m + m\right) \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2} + 2m \frac{f^2}{f^2} = - \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2} (m + 2m) \frac{f^2}{f^2}$$

$$\frac{1}{3} \frac{f^2}{f^2} + \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2} = - \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2}$$

کے حل کو جہاں  $m = m$  اور  $1 = 1$  ب یہ لکھ کر بیان کیا جاسکتا ہے کہ ط اور فہ دونوں میں سے ہر ایک دو ایسی سادہ موسیقی اہتزازوں سے ترکیب یافتہ ہے جن کے دور  $\frac{1}{2} \frac{1}{f}$  اور  $\frac{1}{2} \frac{1}{f}$  ہیں جہاں  $1$  اور  $2$  'ع' میں دو درجی مساوات

$$28 \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2} - 18 \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2} + 24 \frac{1}{2} \frac{f^2}{f^2} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

[ان مساواتوں سے کمیتوں  $m$  اور  $m$  اور طولوں  $1$  اور  $2$  ب کے دو ڈنڈوں کے میلان انتصابی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے رفاص کے طور پر ایک انتصابی مستوی میں جھول رہے ہوں، پہلا ڈنڈا ایک ثابت نقطہ سے آزادانہ لٹکا ہوا ہے اور دوسرا پہلے کے پچھلے سے لٹک رہا ہے۔ اوپر جن اہتزازوں کا ذکر کیا گیا ہے

ان کو صدر (یا طبعی) اہتزاز کہتے ہیں۔ چھوٹے اہتزازوں کے بہت سے مسئلوں میں ایسی مساواتیں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ ان کا تفصیلی ذکر آؤدھ کی کتاب "Advanced Rigid Dynamics" میں ملے گا جس میں اس صورت پر بھی خاص توجہ کی گئی ہے جبکہ ع کی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔

$$(91) \quad \frac{فر^2}{فرت} + کہ \frac{فر^2}{فرت} + ج^2 = ۰،$$

$$\frac{فر^2}{فرت} - کہ \frac{فر^2}{فرت} + ج^2 = ۰،$$

[ان مساواتوں سے ایک گردش کی قاعدہ کے لنگر کی حرکت معلوم ہوتی ہے جو انتصابی سے زیادہ دور نہیں جھولتا۔ اگر ابتدائی شرطیں ایسی ہوں کہ ج = ۰، تو یہ معلوم ہوگا کہ حرکت ایک دائرہ میں ہے اور زاویہ رفتار ع ہے، لیکن اگر ۱ = ۰، تو حرکت ایک دائرہ میں زاویہ رفتار ع کے ساتھ مخالف بہت میں حاصل ہوگی۔ (ع، ق، ا، ب کے لیے دیکھو جوابات)۔ ایسی ہی مساواتیں گردش زاویوں (lons) کے راستہ کے لیے زیمانی اثر (طیف کے ایک خط کا مقناطیسی میدان کی وجہ سے تنہا ہونا) کی تشریح میں درست ہوتی ہیں۔ دیکھو گریس کی کتاب

( Magnetism and Electricity ) صفحات ۵۶۵ تا ۵۶۹

(92) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{فر^2}{فرت} + ۱ = ۰، \\ \frac{فر^2}{فرت} = ب، \end{array} \right.$$

$$۱ + ۱ = ی = ج$$

جہاں ۱، ب، ی مستقل ہیں تو ی کے لئے تفرقی مساوات حاصل کرو۔ پس ثابت کرو کہ اگر ی =  $\frac{فر^2}{فرت}$  = ۰، جبکہ ت = ۰۔

تو  $y = \frac{c}{x-1} + c$  [بفرض  $x \neq 1$  و قوت]

(۲۴۵) [یہ مساواتیں طبعیاتی کمیا میں واقع ہوتی ہیں جبکہ شے کا ایک درمیانی شے جب بنے جو پھر ایک تیسری شے میں تبدیل ہو۔  
لا 'ما' کسی وقت پر علی الترتیب۔ (ب) 'ب' 'ج' کے ارتکاز  
ہیں۔ دیکھو ہارکورت اور ایسن" Phil. Trans ۱۸۶۶  
اور ۱۸۶۷]

(۹۳) ایک سادہ حرکی نظام پر جس کو آزادی کا ایک درجہ حاصل ہے کسی دوسرے حرکی نظام کا اثر جبکہ اول الذکر نظام ثانی الذکر کے ساتھ مربوط ہو مساوات

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + n^2x = 0$$

سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

اگر موجوں کے مہیج نظام کو یکساں برقرار رکھا جائے اور اسے  $\ddot{x} = 0$  جماعت تو ع کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لیے ممکن ہے اور ثابت کرو کہ اگر یہ ایک خاص قیمت سے متجاوز ہو تو گمگت ہوگی۔  
دونوں صورتوں کی تمثیل کے لیے منحنی کھینچو۔ [Math. Trip]

(۹۴) تفرقی مساوات

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + n^2x = 0$$

کو حل کرو جبکہ  $n > 1$ ۔

ایک ایسے رقا ص کی صورت میں جو چھوٹے اہتزاز کر رہا ہو اور ایک پورے اہتزاز کا وقت ۲ ثانیے ہو اور ہوا کی وجہ سے زاویہ انبطاء "۴.۰" (رقا ص کی زاویہ رفتار) ہو تو ثابت کرو کہ ا کا محیط ۱۰ مکمل اہتزازوں میں تقریباً ۴.۰ تک گھٹ جائے گا۔

[لوک ۱۴۳ = ۱۴۲] [Math. Trip.]

(۹۵) ایک نظام کی حرکت عملاً ایک واحد محدود لاپہ منحصر ہے اس کی توانائی کسی لمحہ پر ضابطہ  $\frac{1}{2} m \dot{L}^2 + \frac{1}{2} R \dot{L}^2$  سے بیان ہوتی ہے اور اس کی توانائی کے فرکی قصر کی وقتی شرح  $\frac{1}{2} k \dot{L}^2$  ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے آزاد اہتزاز کا دور (تہ)

$$T = 2\pi \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{R} \right) \frac{1}{k}$$

ہے۔ ثابت کرو کہ قسری اہتزاز جو نمونہ ۱ جم ع ت کی ایک خصل ڈالنے والی قوت سے پیدا ہوتا ہے اپنی بڑی سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_1}$  اور اس وقت اس اہتزاز کا محیط  $\frac{1}{k} \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \right)$  ہے اور اس کی ہیئت (Phase) قوت کی ہیئت سے بقدر  $\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_1}$  مس  $\frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_1}$  کے پیچھے رہتی ہے۔ [ Math. Trip. ]

(۹۶) ثابت کرو کہ اندراج ت  $= \frac{1}{2} \left( \frac{فرس}{فرت} \right)^2$  سے مساوات

$$\frac{فرس^2}{فرت^2} + ف \left( \frac{فرس}{فرت} \right)^2 = ق$$

خطی شکل  $فرت + ۲ ع ت = ق$  میں تحویل ہوتی ہے۔

$$(س + ۱) \frac{فرس^2}{فرت^2} + \left( \frac{فرس}{فرت} \right)^2 = (س - ۱) ج$$

سے، اگر  $\frac{فرس}{فرت} = ۱$  اور  $۲ = ۱$  جبکہ ت = ۱؛

$$\left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \right)^2 = \frac{\text{ج}^2}{3} (\text{س} - ۱۲)$$

$$\frac{\text{فرس}^2}{\text{فرت}^2} = \frac{\text{ج}}{3}$$

اور حاصل کرو۔

[اس سے حسب ذیل حرکی مسئلہ کا حل حاصل ہوتا ہے: ایک ایکساں زنجیر ایک افقی میز پر لچے کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا ایک سر ایک چٹائی ہلکی جرجی پر سے جوڑا گیا ہے۔ اس کے اوپر اسے تفریع ۱ پر سے گزرتا ہے، ابتداً زنجیر کا طول ۱۲ آزادانہ دوسری جانب لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ حرکت میں ایکساں اسراع ہے۔“ دیکھو لونی کی کتاب ”ایک ذرہ اور استوار اجسام کا علم حرکت“ صفحہ ۱۳۱]۔

(۹۷) مساوات

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} \left( \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ر}} \right) + \frac{1}{\text{جف ط}} \left( \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ط}} \right) = 0$$

کا ایک حل شکل

ف = ف (ر) جم ط  
میں معلوم کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}} = \text{جم ط جبکہ } r = 1$$

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}} = 0 \text{ جبکہ } r = \infty$$

[ف رفتار قوت ہے جبکہ نصف قطر ۱ کا ایک کُرہ ایک خط مستقیم میں رفتار  
و کے ساتھ ایک مانع میں جولا تا رہی پر ساکن ہے حرکت کرے۔ دیکھو ریزسے کتاب

( Hydro Mechanics ) حصہ دوم صفحہ ۱۵۲ ]

$$(98) \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ م}}{\text{جف}^2 \text{ ت}} = \frac{\text{جف}^2 \text{ ج}}{\text{جف}^2 \text{ لا}}$$

کا حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ لا = ۰ اور (جم) (ع + ت + ل) میں  
تحویل ہو کہ جبکہ لا = ب -  
[اس سے ایک نئی ہوئی دوری کے ایک حصہ کی شکل معلوم  
ہوتی ہے جبکہ دوری دونوں سروں پر ثابت ہو اور اس کا ایک معلومہ  
نقطہ دوری ہٹاؤ (جم) (ع + ت + ل) کے ساتھ متحرک رکھا گیا ہو -  
زیر بحث حصہ وہ ہے جو درجہ دوم نقطہ اور ایک سرے کے درمیان  
ہے - دیکھو ریمزے کی کتاب (Hydro-Mechanics) حصہ دوم صفحہ ۳۱۲]

$$(99) \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ ف}}{\text{جف}^2 \text{ ت}} = \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ ف}}{\text{جف}^2 \text{ ر}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ف}}{\text{جف}^2 \text{ ر}} \right) \text{ج}$$

کا حل شکل

$$\text{رف} = \text{ف} (ع + ت - ر) + \text{قا} (ع + ت + ر)$$

میں معلوم کرو -

[جہاں ہوا میں آواز کے ایک کروی ماخذ کا رفتار قوہ ف ہے -  
دیکھو ریمزے کی محولہ بالا کتاب صفحہ ۳۴۵]

$$(100) \quad \frac{\text{جف}^2 \text{ ف}}{\text{جف}^2 \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ ف}}{\text{جف}^2 \text{ م}} = ۰$$

کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ ف}}{\text{جف}^2 \text{ م}} = ۰ \text{ جبکہ م} = ۰$$

اور ف ایسے بدے جیسے جم (م - لا - ن ت) جبکہ م = ۰  
[ف گہرائی ۰ کی ایک نہر میں موجوں کا رفتار قوہ ہے نہر کے  
رخ انتصابی ہیں - دیکھو ریمزے کی کتاب صفحہ ۲۶۵]

(۱۰۱) ہمزاد تفرقی مساواتوں

$$\frac{فر۲ لا}{فر۲ ت} - ۲ن = \frac{فر۲ ما}{فر۲ ت} + ع۲ لا = ۰$$

$$\frac{فر۲ ما}{فر۲ ت} + ۲ن = \frac{فر۲ لا}{فر۲ ت} + ع۲ ما = ۰$$

(۲۴۷) کا حل، ابتدائی شرطوں

$$لا = ۱، ما = ۰، فر لا = \frac{فر لا}{فر ت}، فر ما = \frac{فر ما}{فر ت} = ۰$$

کے ساتھ، شکل

$$y = \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{خ(ق-ن) ت}{(ق-ن) + نو} - \frac{خ(ق+ن) ت}{(ق+ن) + نو} \right\}$$

میں حاصل کرو جہاں

$$y = لا + خ ما اور ق = \sqrt{ع۲ ن}$$

ثابت کرو کہ حل برتدویر (Hypocycloid) کو تعبیر کرتا ہے جو

نصف قطروں ۱ اور  $\frac{۱}{۲}$  کے دو ہم مرکز دائروں کے درمیان ہے۔

[اس مثال سے فو کو کے رفاص کے تجربہ کا وہ نظریہ حاصل ہوتا ہے جس سے زمین کی گردش ثابت ہوتی ہے۔ دیکھو براہموج

Pro. London Math. Soc. 1914 "بابتہ ۱۹۱۴ء]

(۱۰۲) سیاروی حرکت کی انشائیں کی مساوات

$$\frac{فر۲ ع}{فر۲ ت} + ۶ = \frac{م}{۲} + ۳ م ع$$

کا تقریبی حل حسب ذیل طریقہ پر معلوم کرو:

(۱) چھوٹی رقم ۳ م ع کو نظر انداز کرو، اور حاصل کرو



$$= 6 = \frac{1}{2} \{ 1 + \text{زجم (فہ - قہ)} \} \text{ 'اے' جیسا کہ نیوٹن کی حرکیات میں -}$$

(ب) ۶ کی اس قیمت کو چھوٹی رقم ۳ م ۶ میں درج کرو اور حاصل کرو

$$\frac{۶}{۲} + ۶ = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} + \frac{۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} \text{ زجم (فہ - قہ)}$$

$$+ \frac{۳}{۲} \text{ زجم (فہ - قہ)} \{ 1 + \text{زجم (فہ - قہ)} \}$$

(ج) اس تفرقی مساوات کی بائیں جانب کی تمام رقموں کو

$$\frac{۱}{۲} \text{ اور } \frac{۳}{۲} \text{ زجم (فہ - قہ) کے نظر انداز کرو -}$$

جم (فہ - قہ) والی رقم کو رکھنا چاہئے اس کا دورو ہی ہے جو متم تفاعل کا ہے اور اس لیے اس سے ایک مسلسل بڑھنے والا خاص تکملہ پیدا ہوتا ہے - [دیکھو نمک کا مسئلہ مثال ۳۶ صفحہ ۶۹] -

پس حاصل کرو

$$= 6 = \frac{1}{2} \{ 1 + \text{زجم (فہ - قہ)} \} + \frac{۳}{۲} \text{ زفہ جب (فہ - قہ)}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 1 + \text{زجم (فہ - قہ - صہ)} \} \text{ تقریباً}$$

$$\text{جہاں صہ} = \frac{۳}{۲} \text{ فہ اور صہ}^۲ \text{ کو ترک کر دیا گیا ہے -}$$

[اس نتیجہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ جب سیارہ ایک گردش میں

حرکت کرتا ہے تو حقیقت (جو فہ - قہ - صہ = ۰ سے حاصل ہوتا ہے)

گردش کی ایک کسر مساوی جو  $\frac{۳}{۲} \text{ صہ} = \frac{۳}{۲}$  سے حاصل ہوتی ہے

آگے بڑھتا ہے - جب مستقلوں کو عددی قیمتیں دیکھائی ہیں تو یہ معلوم ہوگا کہ

انسان کے نظریہ سے اس مشہور بے قاعدگی کا ازالہ ہوتا ہے جو عطارد کے حقیقت کی حرکت کے مشاہدہ کردہ اور محسوبہ نتیجوں میں پائی جاتی ہے۔  
دیکھو ایڈنگٹن کی

Report on the Relativity Theory of Gravitation, pp. 48-52

(۲۴۸) (۱۰۳) لا، ما، لا، ما کا ایک تفاعل ل (لا، ما، لا، ما) ہے

اور لا اور ما کی تعریف مساواتوں

$$\frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} = \text{ما} = \frac{\text{جفل}}{\text{جفل ما}}$$

سے کی گئی ہے۔

اگر ان مساواتوں کو لا اور ما کے لیے لا، ما، لا، ما کے تفاعلوں کے طور پر حل کیا جاسکے اور اگرھ (لا، ما، لا، ما) وہ تفاعل ہو جو

$$\text{لا} + \text{ما} = \text{لا}$$

کو کلا لا، ما، لا، ما کی رقوم میں بیان کرنے سے حاصل ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad \frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} = \text{لا}$$

$$(۲) \quad \frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} = \frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} \quad \text{اور}$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات

$$(۳) \quad \frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} = \left( \frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} \right) \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$$

$$(۴) \quad \frac{\text{جفل}}{\text{جفل لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر}} \quad \text{مساوات}$$

میں مستعمل ہوتی ہے۔

[یہ علم حرکت میں ہیمیلٹونی استحالہ ہے۔ مساوات (۳) تعمیری محدودوں میں حرکت کی لگرائنجی مساوات کا نمونہ ہے۔ ہیمیلٹن اس کی بجائے مساواتوں (۱) اور (۲) کا زوج لیتا ہے۔

دیکھو راولپنڈی کی کتاب (Elementary Rigid Dynamics) آٹھویں باب۔ اس انتخاب کا مقابلہ ساٹویں باب کے آخر میں دی ہوئی متفرق مثالوں میں سے مثال ۲۱ کے استحالہ کے ساتھ کر جس میں دو جزئی تفرقی مساواتیں متنویت کے اصول سے ایک دوسرے سے اخذ کی جاسکتی ہیں۔]

(۱۰۴) ثابت کرو کہ اگر ہیمیلٹن کی جزئی تفرقی مساوات

جفی + ه (لا لا'... لا لا' ع' ع'... ع' ت) = حفت

پیر جیکوئی کا طریقہ (دفعہ ۱۴۰) استعمال کیا جائے تو مساواتیں

$$\frac{\text{فرلار}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ه}}{\text{جف لار}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ه}}{\text{جف لار}} \quad (r = 2.1 \dots 2.5)$$

حاصل ہوتی ہیں جو ایک حرکی نظام کی حرکت کی مساواتیں، ہیملٹن کی شکل میں، ہیں۔

[دیکھو، وٹیکر کی کتاب *Analytical Dynamics* (طبع دوم دفعہ ۱۹۲۱ء)]

(۱۰۵) (آ) ثابت کرو کہ اگر تفرقی مساواتوں کے نظام

$$\frac{\text{فری}}{\text{ع (لا'ما'ی)}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق (لا'ما'ی)}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ع (لا'ما'ی)}}$$

کے کوئی دو سیکھ لے

$$J = (U' L' U) \epsilon$$

و (لا، ما، ی) = ب

ہوں تو

$$\frac{1}{ع} \frac{جف(ع، و)}{جف(ما، ی)} = \frac{1}{ق} \frac{جف(ع، و)}{جف(ی، لا)} = \frac{1}{ر} \frac{جف(ع، و)}{جف(لا، ما)} = م \frac{جف(لا، ما، ی)}{جف(لا، ما)}$$

فرض کرو

[م کو نظام کا ضارب کہتے ہیں]

(۲) ثابت کرو کہ م، جزئی تفرقی مساوات

(۲۴۹)

$$\frac{جف}{جف لا} (م ع) + \frac{جف}{جف ما} (م ق) + \frac{جف}{جف ی} (م ر) =$$

کو پورا کرتا ہے۔

(۳) اگر نظام کا کوئی اور ضارب ن (لا، ما، ی) ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{جف}{جف لا} \left( \frac{م}{ن} \right) + \frac{جف}{جف ما} \left( \frac{م}{ن} \right) + \frac{جف}{جف ی} \left( \frac{م}{ن} \right) =$$

اور اس لیے یہ کہ

$$\frac{جف \left( \frac{م}{ن} ع، و \right)}{جف (لا، ما، ی)} = \text{متماثلًا}$$

اس طرح  $\frac{م}{ن} ع$  اور و کا ایک تفاعل ہے اور  $\frac{م}{ن} ج =$  ج تفرقی مساواتوں کے ابتدائی نظام کا ایک تکملہ ہے۔

(۴) اگر  $ع (لا، ما، ی) = ۱$  کوئی کے لیے حل کیا جاسکے اور

اس سے  $ی = ف (لا، ما، ۱)$  حاصل ہو اور اگر  $ی$  کی اس قیمت کو  $و، ع، ق، ی، م$  میں درج کرنے سے  $لا، ما، ۱$  کے جو تفاعل حاصل ہوں ان کو بڑے حروف  $و، ع، ق، ی، م$  سے تعبیر کیا جائے تو ثابت

کرو کہ  $\frac{فرلا}{ع} = \frac{فرما}{ق}$  کا ایک تکملہ  $و (لا، ما، ۱) = ب$  ہے۔

نیز ثابت کرو کہ

$$۵ = \frac{\text{جف و جف ع}}{\text{جف م جف ی}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{جف و جف ع}}{\text{جف لا جف ی}} = \text{مق}$$

(جہاں  $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}$  کو لا، ما، کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے) اس لیے

$$\text{فرو} = \text{م} (\text{ق فرلا} - \text{ع فرما}) \div \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}$$

[اس سے یہ واضح ہوتا ہے کہ اگر کوئی تکملہ  $\text{ع} = ۱$  اور کوئی

ضارب م معلوم ہوں تو م ( $\text{ق فرلا} - \text{ع فرما}$ )  $\div \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}$  ایک کامل تفرقہ ہوگا اور اس سے نظام کا ایک تکملہ حاصل ہوگا جبکہ ۱ کی بجائے  $\text{ع} (لا، ما، ی)$  کو مندرج کیا جائے۔

اس مسئلہ کے ثبوت کے لیے ڈیٹیکریٹ (Advanced Rigid Dynamics)

طبع دوم دفعہ ۱۱۹ دیکھو۔ اس سے زیادہ عام مسئلہ یہ ہے کہ اگر تفرقی مساواتوں کے ایک نظام

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ع}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ع}} = \dots = \frac{\text{فرلا}}{\text{ع}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ع}}$$

کے (ن-۱) تکملے معلوم ہوں اور کوئی ضارب بھی معلوم ہو تو دوسرا تکملہ متعین کیا جاسکتا ہے۔ اس کو بالعموم جیکوبی کے آخری ضارب کا مسئلہ کہتے ہیں۔ علم حرکت میں جہاں اس مسئلہ کی کچھ اہمیت ہے (دیکھو ڈیٹیکریٹ سوال باب) آخری ضارب اکائی ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فری}}{\text{لا} - \text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا} - \text{مای}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{مای}}$$





$$\text{فا} \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}, \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}, \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right) = ۰$$

کا ایک حل

$$= ۰ \text{ ف (ل لا + م ما + ن نی) ف (س' ت) فرس فرت}$$

(۲۵۶) ہے (حدود کوئی اختیاری مقداریں ہیں جو لا، ما، ی کے تابع نہیں ہیں) اگر ل، م، ن کوئی مستقل ہوں یا س اور ت کے ایسے تفاعل ہوں کہ

$$\text{فا (ل' م' ن) = ۰}$$

اس مسئلہ کی توسیع اُس صورت پر کرو جس میں ن متبوع متغیر لا، ما، ی .... اور (ن - ۱) مبدل زبانت .... ہوں -

$$= ۰ \text{ ف (ل لا + م ما + ن نی) ف (س' ت) فرس فرت}$$

$$\text{کو} \quad \frac{\text{جف}^۲ \text{و}}{\text{جف لا}^۲} + \frac{\text{جف}^۲ \text{و}}{\text{جف ما}^۲} = \frac{\text{جف}^۲ \text{و}}{\text{جف ی}^۲}$$

(H. T. dal)

کے حل کے طور پر حاصل کرو -

$$\text{(ب) اگر فا} \left( \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}, \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}, \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \right) = ۰ \text{ مستقل ہوگی}$$

ایک متجانس خطی جزئی تفریق مساوات ہو تو ثابت کرو کہ اس کا ایک حل

$$= ۰ \text{ ف (ل لا + م ما + ن نی) ف (س' ت) فرت}$$

ہے جہاں حدود کوئی اختیاری مقداریں ہیں جو لا، ما، ی کے تابع نہیں ہیں اور ل، م، ن کوئی مستقل ہیں یا ت کے ایسے تفاعل ہیں کہ

$$\text{فا (ل' م' ن) = ۰}$$

اس مسئلہ کی توسیع اُس صورت پر کرو جس میں ن متبوع متغیر

اور (ن - ۲) مبدل ہوں -



[دیکھو ایچ۔ ٹاڈ، سینجر آف میٹھیکس ۱۹۱۴ء]

و = ک ف (لاجمت + ماجبت + خمی'ت) فرت

$$= \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{ی}}$$

کے حل کے طور پر حاصل کرو۔  
(۱۰۹) تفرقی مساوات

$$\frac{1}{\text{لا}} = \text{ما} + \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$$

میں آزمائشی حل

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \dots$$

کو درج کر کے سلسلہ

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \dots$$

حاصل کرو۔  
ثابت کرو کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے متسع ہے۔  
خاص تکملہ

$$\text{ما} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$$

کو حاصل کرو اور تکمیل بالخص کی تکرار سے ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} + \dots + \frac{1}{\text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{1 + \text{فر لا}}{2 + \text{فر لا}}$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر لا منفی ہو تو خاص تسلسلہ کی بجائے سلسلہ کی  $1+n$  رتبوں کو لینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ  $(1+n)$  دیں رقم کی عددی قیمت سے کم ہے۔  
[ایسے سلسلہ کو متقاربہ کہتے ہیں۔ دیکھو برا سوچ کی (Inf. Series)]

دفعات ۱۳۰ تا ۱۳۹ یا طبع دوم دفعات ۱۰۶ تا ۱۱۸

(۱۱۰) اگر  $f_n$  فنان (لا) کے تواتر کی تعریف  
فب (لا) =  $f + 1$  ب (لا-ج) (جہاں 'ب' 'ج' مستقل ہیں) (۲۵۲)

اور  $f_n$  (لا) =  $f_{n-1}$  (ت-لا) فانات (فب- $f_{n-1}$ ) (ت) فرت  
سے کجا ملے تو ثابت کرو کہ

$f_{n-1}^2$  فب (لا) =  $f_{n-1}$  فا (لا) فب- $f_{n-1}$  (لا)  
اس سے ثابت کرو کہ

$f_{n-1}^2$  فا (لا) =  $f_{n-1}$  فا (لا) =  $f_{n-1}$

کا ایک حل  $f_n = 1$  (لا) فب- $f_{n-1}$

ہے بشرطیکہ لامتناہی سلسلوں پر بعض اعمال جائز ہوں (جن کے ثبوت کے لیے وہینیکر اور والسن کی modern Analysis صفحہ ۱۸۹ دیکھو۔ وہ اس طریقہ سے دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے لیے مسئلہ موجودگی کا ثبوت دیتے ہیں۔)

(۱۱۱) ثابت کرو کہ مستقل سروں کی دو خطی ہمزاو تفرقی مساواتوں

ف (عف) لا + فا (عف) ما =  $f_{n-1}$   
فہ (عف) لا + فہ (عف) ما =  $f_{n-1}$  (جہاں عف = فرت)

لے چوتھے اور تیسرے اڈیشنوں میں صفحہ ۱۹۵۔

کے حل کو

$$لا = فا (عف) و$$

$$ما = ف (عف) و$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں و

$$\{ ف (عف) خ (عف) - فا (عف) ف (عف) \} و = ۰$$

کا کامل ابتدائی ہے۔

اس سے ثابت کرو کہ اگر ف، فا، فہ، خ کے درجے عف میں علی الترتیب  
ع، ق، ر، س ہوں تو حل میں وقوع پذیر ہونے والے اختیاری مستقلوں  
کی تعداد بالعموم عددول (ع + س) اور (ق + ر) میں سے بڑے عدد کے  
مساوی ہوگی لیکن اگر ع + س = ق + ر تو اختیاری مستقلوں کی تعداد  
کمتر ہو سکتی ہے یا صفر بھی ہو سکتی ہے جیسا کہ حسب ذیل مساواتوں کی  
صورت میں:

$$(ع + ا) لا + عف = ۰$$

$$(ع + ۳) لا + (ع + ۲) = ۰$$

$$(۱۱۲) (۱) \text{ ثابت کرو کہ اگر پہلے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات}$$

$$ع (لا) + ا (ف) = ۰$$

کے کوئی دو حل

$$ا = ع (لا)$$

$$ا = و (لا)$$

ہوں تو

$$۰ = \frac{(و ع - ا و ع)}{۲ ع}$$

لے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ عام ترین حل نہیں ہو سکتا اگر لا اور ا کے لیے باہم مختلف  
اختیاری مستقلوں کی تعداد اُس تعداد سے کم ہو جو و کے لیے حاصل ہوتی ہے جیسا  
اُس وقت ہوگا جبکہ (ف) اور (ع) میں ایک مشترک جزو ضربی صرف ایک مستقل سے مختلف ہو۔

اور اس لیے  $و = ا + ع$  جہاں  $ا$  ایک مستقل ہے۔  
(ب) ثابت کرو کہ اگر دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات  
 $ع (لا) + م + ق (لا) + م + م (لا) = م$   
کے کوئی تین حل

$$م = ع (لا) \quad م = و (لا) \quad م = ط (لا)$$

ہوں تو

$$ع = \frac{م}{لا} = \frac{م}{لا} + \frac{م}{لا} + \frac{م}{لا} = ۰$$

$$اور \quad ع = \frac{م}{لا} = \frac{م}{لا} + \frac{م}{لا} + \frac{م}{لا} = ۰$$

اس سے ثابت کرو کہ

$ط = ا + ع + ب$   
[اس طرح قدم بہ قدم آگے بڑھ کر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ  
ن ویں رتبہ کی مشابہ تفرقی مساوات کے ن سے زیادہ خطی غیر تابع  
حل نہیں ہو سکتے۔]

(۱۱۳) فرض کرو کہ  $لا$  کے کوئی تین تفاعل  $ع$ ،  $و$ ،  $ط$  ہیں۔  
ثابت کرو کہ اگر تین ایسے مستقل  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  معلوم ہو سکیں  
کہ  $م = ا + ع + ب + و + ج$  متماثل معدوم ہوں تو

$$= \begin{vmatrix} ط & و & ع \\ ط & و & ع \\ ط & و & ع \end{vmatrix}$$

اور اس کے بالعکس اگر یہ قطعہ جس کو ”رانسکی“ مقطع کہتے ہیں معدوم ہو تو تفاعل  
خطی طور پر غیر تابع نہیں ہوتے۔

ن تفاعلوں کی صورت میں ان نتیجوں کی توسیع کرو۔  
[دوسرے رتبہ کی اس تفرقی مساوات پر غور کرو جو مقطع میں  $ع$ ،  $و$ ،  $ط$  کی



$$(۳) \text{ ع (لا ا)} = \text{ا (لا ا)} + \text{ا} \times \text{ا یعنی (ع - ا) (لا ا)}$$

$$\text{ا} \times \text{ا} =$$

$$(۴) \text{ (ع - ا) (ا - ا)} =$$

$$(۵) \text{ (ب ع} + \text{ب ع} + \text{ب ع} + \text{ب ع} = \text{ا} = \text{ب ا} + \text{ب ا} + \text{ب ا} + \text{ب ا})$$

اگر ب مستقل ہوں۔

(۶) خطی تفرقی مساوات

(۲۵۴)

$$\text{ب ع} + \text{ا} + \text{ب ع} + \text{ا} + \text{ب ع} + \text{ا} =$$

$$\text{یعنی (ب ع} + \text{ب ع} + \text{ب ع} + \text{ب ع} = \text{ا} =$$

$$\text{کا ایک حل ع} = \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا}$$

ہے اگر ا اور ب اختیاری مستقل ہوں اور ا اور ب امدادی

مساوات ب م + ب م + ب م = کی اصلیں ہوں۔ [دیکھو دفعہ ۲۵]

اس طریقہ سے (۲ ع + ۵ ع + ۲ ع) = کو حل کرو۔

$$(۷) \text{ (ع - ا) (ع - ا) = ا} = \text{کا ایک حل ع} = \text{ا} + \text{ا} = \text{ا} + \text{ا}$$

ہے۔

یہاں امدادی مساوات م - ۲ ا م + ا = کی اصلیں مساوی

ہیں (دیکھو دفعہ ۳۴)۔

$$(۸) \text{ (ب ع} + \text{ب ع} + \text{ب ع} + \text{ب ع} = \text{ا} =$$

$$\text{کا ایک حل ع} = \text{ا} = \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا}$$

ہے اگر ف اور ق اختیاری مستقل ہوں، امدادی مساوات

$$ب م + ب م + ب م = ۰$$

کی اصلیں ف ± خ ق ہوں، اور

$$ف + خ ق = ر (جم ط + خ جب ط) (دیکھو دفعہ ۲۶)$$

$$اس طریقہ سے (ع - ع + ع - ع) = ۰ کو حل کرو۔$$

(۹) مستقل سروں کی خطی تفرقی مساوات

$$فا (ع) = (ب ع + ب ع + ... + ب ع + ع - ع) = ۰$$

$$= ف (لا)$$

کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا مجموعہ ہے جہاں متمم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو بائیں جانب کے لا کے تفاعل کی بجائے صفر درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۹)

$$(۱۰) فا (ع) = ۰$$

$$کا خاص تکملہ \frac{۱}{فا (۱)} ہے بشرطیکہ فا (۱) \neq ۰ (دیکھو دفعہ ۳۵)$$

$$اس طریقہ سے (ع + ع - ع) = ۰ کو حل کرو۔$$

[مزید تمثیلوں کے لیے دیکھو بول کی کتاب (Finite Differences)]

گیارہواں باب

(۱۱) لکرائج کی مساوات

$$= لا فا (ع) + ف (ع)$$

پر دفعہ ۵۳ کا طریقہ استعمال کر کے ثابت کرو کہ بالعموم کامل ابتدائی





ثابت خط مستقیم ہو گا۔  
 (۱۱۸) ایک منحنی کی خاصیت یہ ہے کہ عہ = ک مس سا  
 جہاں غہ نصف قطر انحناء اور سادہ زاویہ ہے جو مماس محور لا کے  
 ساتھ بناتا ہے اور ک مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ اس منحنی کی ایک شاخ مساواتوں  
 لا = ک (۱ - جم طہ) ما = ک { لوک (قط طہ + مس طہ) جب طہ  
 سے حاصل ہوتی ہے جہاں  $0 \leq طہ < \frac{1}{2}$  اور مبدأ کو نقطہ  
 طہ = ۰ پر لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر س وہ قوس ہو جو اس شاخ  
 پر نقطہ طہ = ۰ سے ناپی گئی ہے تو

[لندن]

$$(۱۱۹) \text{ مساوات } \frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ت}} = \frac{\text{ج}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}}$$

کا ایک حل شکل ف (لا) جب م ت  
 میں معلوم کرو جو ایسا ہو کہ

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{ت}} = \text{ک} \text{ ایک مستقل جبکہ لا = ۰ اور ت = ۰}$$

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ع}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = ۰ \text{ جبکہ لا = ۰ ت کی تمام قیمتوں کے لیے [لندن]}$$

$$(۱۲۰) \text{ مساوات } \frac{\text{جف}^2 \text{ای}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ای}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = ۰$$

کا ایک ایسا حل معلوم کرو جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرے:

$$(۱) \text{ ی} = \text{جب لا جبکہ ما} = ۰$$

$$(۲) \text{ ی} = ۰ \text{ جبکہ لا} = \frac{1}{2}$$

$$(۳) \text{ مستوی لا، اس کے اُس علاقہ میں جس میں } ۰ < \text{لا} < \frac{1}{2}$$

کسی جگہ بھی 'لا' متناہی نہ ہو جائے۔ [لندن]  
(۱۲۱) تکمیل بالخصوص کے دو عملوں سے ثابت کرو کہ اگر لاکے  
تفاعل 'ق' سر ہوں اور لاحقوں سے لاکے لحاظ سے  
تفرقوں کو تعبیر کیا جائے تو

م (ف + ق + با + سرا) = فرلا = ی (ف + با + ق + ما)

ما (ف ی) + م (با) (ف ی) - (ق ی) + (س ی) = فرلا

اس سے یہ اخذ کرو کہ دو مساواتیں

ف + با + ق + ما = سرا = (ف ی) - (ق ی) + (س ی) =

ایسی ہیں کہ ایک کا کوئی تکملہ دوسرے کا تکمل جزو ضروری ہے  
[ایسی مساواتوں کو ایک دوسرے کا متعین (Adjoint) کہتے ہیں]

ثابت کرو کہ اگر عف سے عامل فیجے تعبیر ہو تو مساوات

(۲۵۶)

{ عف + ع (لا) } { عف + ق (لا) } = ما =

کی متعین مساوات

{ عف - ق (لا) } { عف - ع (لا) } = می =

ہے۔ مساوات ۱ + (لا + لا<sup>۲</sup>) + با + (لا + لا<sup>۲</sup>) + ما = کی صورت  
میں اسکی تصدیق کرو۔

[یہاں ع (لا) = لا، ق (لا) = لا<sup>۲</sup>]

جف<sup>۲</sup> لا = جف<sup>۲</sup> با + جف<sup>۲</sup> ع (لا) کا عام حل

ما = کو اجزائے ضربی میں تنجیل کر کے مساوات

$$\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{جفت}} \right\} \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{جفت}} \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{جفت}} \right\} \left\{ \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{جفت}} \right\} = 0$$

لکھی جاسکتی ہے۔  
پس (دیکھ صفحہ ۶۱) ابتدائی مساوات، لکرائی کی دو خطی مساواتوں

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{جفت}} = 0 \text{ اور } \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{جفت}} = 0$$

میں سے ایک کے کسی تنگم سے پوری ہوتی ہے۔

ان میں سے پہلی کے لیے ذیلی مساواتیں (دفعہ ۱۲۳ سے)

$$\frac{\text{فر لا}}{1} = \frac{\text{فرت}}{\frac{1}{1}} = \frac{\text{فر لا}}{1}$$

میرا۔

دو غیر تابع تنگمے

$$\text{ما} = \text{ب}، \text{لا} - \text{ا} = \text{ت} = \text{ج}$$

ہیں۔

عام تنگمہ

$$\text{ما} = \text{ف} (\text{لا} - \text{ا} = \text{ت})$$

ہے۔

اسی طرح لکرائی کی دوسری مساوات سے ما = فا (لا + ا = ت) حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں ابتدائی تفرقی مساوات کے تنگمے ہیں۔ چونکہ خطی ہے اس لیے ایک تیسرا تنگمہ

$$\text{ما} = \text{ف} (\text{لا} - \text{ا} = \text{ت}) + \text{فا} (\text{لا} + \text{ا} = \text{ت})$$

ہے جس میں دو اختیاری تعامل ہیں اور دوسرے رتبہ کی ایک مساوات کے لیے

اس سے زیادہ عام حل کی توقع نہیں کی جاسکتی۔ (دیکھو صفحات ۱۱۸ اور ۱۳۴) دفعہ ۱۴۵ کی مساوات کے لیے اس کے مشابہ طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے

**مبدلوں کا طریقہ** — (سی۔ این۔ سرنیکس۔ نیگر)

اگر ایک جزئی تفرقی مساوات  $E = F(لا، د)$  \  $F(می، د)$  ق = فا(ما، د) \  $F(می، د)$  درج کرنے پر ایک متماثلہ ہو جائے تو ہم ان مساواتوں اور فری = ع فرلا + ق فرما کو یکساں بنالے

ف(د، می) فری = ف(لا، د) فرلا + ف(ما، د) فرما + ب

حاصل کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

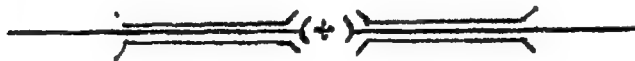
مثلاً مساوات می (ع + ق) = لا + ما ایک متماثلہ ہو جاتی ہے اگر

$$ع = (لا + د) \mid می، ق = (ما - د) \mid می$$

اس سے می = لا + ما + ۳ - لا - ۳ + ما + ب

حاصل ہوتا ہے۔

یہ طریقہ معیاری شکلوں ۱ اور ۳ (دفعات ۱۲۹ اور ۱۳۱) کی تمام مساواتوں اور شکل (۲) (دفعہ ۱۳۰) کی بعض مساواتوں پر اطلاق پذیر ہوگا۔



# جوابات

## پہلا باب

دفعہ ۵

$$(۱) \quad \frac{فرما^۲}{فرلا} = ۴ \quad (۲) \quad \frac{فرما^۲}{فرلا} = -۹$$

$$(۳) \quad \frac{فرما^۲}{فرلا} = \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۲ \quad (۴) \quad ۴ = لا \frac{فرما}{فرلا} + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^۳$$

(۵) ایک دائرہ کا تماس اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو نقطہ تماس کو مرکز سے ملاتا ہے۔

(۶) کسی نقطہ پر کا تماس خود خطِ مستقیم ہے۔

(۷) انحناء صفر ہے۔

دفعہ ۸

$$(۱) \quad ۱ = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲!} + \frac{لا^۳}{۳!} + \frac{لا^۴}{۴!} + \dots$$

$$(۲) \quad ۱ = ۱ + ب - لا - \frac{لا^۲}{۲!} + \frac{لا^۳}{۳!} + \dots$$

+ ب جب لا

## پہلے باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) \frac{فر۳}{فر۳لا} = \frac{فر۱}{فر۳لا} \quad (۲) \quad \frac{فر۳}{فر۳لا} - ۱ = \frac{فر۲}{فر۳لا} + ۱۱ \frac{فر۱}{فر۳لا} - ۱۱ = ۰$$

$$(۳) \frac{فر۲}{فر۳لا} - ۲ = \frac{فر۱}{فر۳لا} + ۲ = ۰$$

$$(۴) \text{مالوک} = \left[ \left\{ \left( \frac{فر۲}{فر۳لا} \right) + ۱ \right\} + \left\{ \left( \frac{فر۱}{فر۳لا} \right) + ۱ \right\} \right] - ۱ = ۰$$

$$(۵) \frac{فر۳}{فر۳لا} = ۰$$

$$(۶) \left\{ \left( \frac{فر۲}{فر۳لا} \right) + ۱ \right\} = ۱ \quad \text{یعنی غہ} = ۱$$

$$(۷) (لا + ما) \frac{فر۲}{فر۳لا} = ۲ (لا \frac{فر۱}{فر۳لا} - ما) \left\{ \left( \frac{فر۲}{فر۳لا} \right) + ۱ \right\}$$

$$(۸) \left\{ \left( \frac{فر۲}{فر۳لا} \right) + ۱ \right\} \frac{فر۳}{فر۳لا} = ۳ \left( \frac{فر۲}{فر۳لا} \right) \frac{فر۱}{فر۳لا}$$

$$(۱۱) ما = لا + ب لا$$

$$(۱۲) ما = لا + ب لا$$

$$(۱۳) ۶۰ \text{ اور } ۶۰$$

$$(۱۵) \text{تفرق کرو اور رکھو لا} = ۱، ما = ۲ \text{ تو } \frac{فر۲}{فر۳لا} \text{ اور اس لیے}$$

غہ حاصل ہوگا۔

$$(۱۷) (۱) (۱) + لا = ۰ \quad (۲) لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

(\*)

## دوسرا باب

دفعہ ۱۴

$$(۱) لا + لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ = ج$$

$$(۲) جب لاس + ج = (لا + لا^۲) = ج$$

$$(۳) قط لاس - ج = لا^۳$$

$$(۴) لا - لا^۲ + ج = لوک (لا + لا^۲)$$

$$(۵) لا + لا^۲ = ج^۳$$

$$(۶) لا = ج$$

$$(۷) لا^۳ + لا^۲ + لا + ج = ۰$$

$$(۸) لا^۲ + لا + ج = ۰$$

$$(۹) لا^۲ + لا + ج = ۰$$

$$(۱۰) جب لا + ج = ۰$$

دفعہ ۱۵

$$(۱) (لا + لا^۲) = ج^۳ (لا - لا^۲) (۲) لا^۲ + لا^۳ + ج = لوک (۱) = ۰$$

$$(۳) لا^۲ = ج (لا - لا^۲) (۴) لا^۲ + لا + ج = لا^۲ + لا + ج$$

$$(۵) (لا - لا^۲) = ج^۲ (لا + لا^۲ - لا^۳) = ج$$

$$(۶) (لا + لا^۲ - لا^۳) = ج^۲ (لا + لا^۲ + لا^۳) = ج$$

$$(۷) لا - لا^۲ + ج = لوک (لا + لا^۲ - لا^۳) = ج$$

$$(۸) لا^۳ - لا^۲ + ج = ۲ لوک (لا + لا^۲ - لا^۳) = ج$$

## دفعہ ۲۱

- (۱)  $۲ م = (۱ + لا) ۵ + ۲ ج (۱ + لا) ۳$   
 (۲)  $لا م = جب لا + ج جم لا$   
 (۳)  $ما لوک لا = (لوک لا) ۲ ج + ج$   
 (۴)  $لا ۲ = ما ۳ (جب لا + ج)$   
 (۵)  $ما ۲ (لا + ج طو) = ۱$   
 (۶)  $لا = ما ۲ + ج ما$  (۷)  $لا = قو (ج + س ما)$

## دفعہ ۲۲

- (۱)  $مکانی ما = ۴ لا + ج$   
 (۲)  $تمام زائد لا ما = ج ۲$   
 (۳)  $برنوی کا دوپیشی (منحنی) ر = لا جب ۲ طہ$   
 (۴)  $زنجیرہ ما = ک جمر کس$   
 (۵)  $لا ما = ج ۲$   
 (۶)  $ما ۳ = لا ۳ + ج ۴$  (۷)  $ما ۳ = ج لا ۳$   
 (۸)  $ر = ج طو ۲$  (۹)  $لوک ر + ۱/۴ طہ ۲ + ۱/۳ طہ ۳ = ج$   
 (۱۰)  $مساوی الزاویہ مرغیے ر = ج طو ۴ طہ مساعہ$

## دوسرے باب پر متفرق مثالیں

- (۱)  $لا ما = ما + ج$  (۲)  $ج لا = ما + لا ۲ - لا ۳$



$$(۳) \text{ جب } لا \text{ جب } ما + فو = ج$$

$$(۴) لا^۲ - لا^۲ لا^۲ + ما^۳ + ما^۲ ج لا^۲ = .$$

$$(۵) ج لا^۲ = ما^۲ + ما^۲ - لا^۲$$

$$(۱۱) لا^۳ ما^۲ + لا^۲ ما^۳ = ج$$

$$(۱۲) مست^۱ (لا^۲) + لوک = \left(\frac{لا}{ما}\right) ج$$

$$(۱۳) (لا^۲ - ۱ + ما^۲) فو = ج$$

$$(۱۵) (۱) \text{ تیکانی لولب } ر (ط - ع) = ج$$

$$(۲) \text{ اشمیدش کا لولب } ر = ج (ط - ع)$$

$$(۱۶) \text{ مکانی سک } ما^۲ = لا^۲ (۱۸) لا = ما (ج - ک لوک ما)$$

$$(۱۹) (۱) لا^۲ + (ما - ج) = ۱ + ج^۲، ہم محور دائروں کا ایک$$

قبیل جو دئے ہوئے نظام کو علی القوا تم قطع کرتا ہے۔

$$(۲) ر^۲ = ج - ط^۲$$

$$(۳) ن^۲ = ر^۲ + ج + لوک (قنن ط + مم ن ط)$$

$$(۲۰) (لا + ما) \left(\frac{فرما}{فرلا}\right) (لا - ما) \left(\frac{فرلا}{فرما}\right) = ک - ب^۲$$

$$(۲۱) لوک (لا^۲ \pm لا^۲ لا^۲ + ما^۲) + \frac{۶}{لا} مست^۱ \frac{لا \pm ما^۲}{لا} = ج$$

تیسرا باب

دفعہ ۲۸

$$(۱) \quad \text{ما} = \text{قو} + \text{ب} \text{قو}^{\text{لا}^۳-} \quad (۲) \quad \text{ما} = \text{جم}^{\text{لا}^۲} + \text{ب} \text{ب} \text{ب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۳) \quad \text{ما} = \text{قو} + \text{ب} \text{قو}^{\text{لا}^۳-} \quad (۴) \quad \text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}^۲} + \text{ب} \text{جم}^{\text{لا}^۲} + \text{ب} \text{ب} \text{ب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۵) \quad \text{س} = \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{جم}^{\text{لا}^۲} + \text{ب} \text{ب} \text{ب}^{\text{لا}^۲} + \text{ت}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۶) \quad \text{س} = \text{قو} + \text{ب} \text{قو}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۷) \quad \text{ما} = \text{قو} + \text{ب} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{ج} \text{قو}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۸) \quad \text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}^۲-} - \text{قو}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۹) \quad \text{ما} = \text{جم}^{\text{لا}^۲-} + \text{ب} \text{جم}^{\text{لا}^۲-} + \text{ب} \text{جم}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۱۰) \quad \text{ما} = \text{جم}^{\text{لا}^۲-} + \text{ب} \text{جم}^{\text{لا}^۲-} + \text{ب} \text{جم}^{\text{لا}^۲-}$$

$$\text{ما} = \text{ع} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{ف} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{گ} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{ھ} \text{قو}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۱۱) \quad \text{ما} = \text{قو} + \text{ب} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{جم}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۱۲) \quad \text{ما} = \text{قو} + \text{ب} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{ع} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{جم}^{\text{لا}^۲-}$$

$$+ \text{ف} \text{قو}^{\text{لا}^۲-} + \text{جم}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۱۳) \quad \text{طہ} = \text{عہ} \text{جم}^{\text{لا}^۲-} \left[ \frac{\text{ج}}{\text{ل}} \right] \quad (۱۴) \quad \text{ک}^{\text{لا}^۲-} > \text{م}^{\text{لا}^۲-}$$

$$(۱۶) \quad \text{ق} = \text{ق}^{\text{لا}^۲-} + \text{جم}^{\text{لا}^۲-} + \text{ب} \text{ب} \text{ب}^{\text{لا}^۲-} + \text{ت}^{\text{لا}^۲}$$

$$\text{ن} = \text{ما} \left( \frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{لا}^۲} \right)$$



$$(۱) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ \text{ جم}^{\text{لا}^۲} + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲})$$

$$(۲) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ \text{ جم}^{\text{لا}^۲} + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}) + \frac{\text{قو}^{\text{لا}^۲}}{۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} + (۱ + ۲)}$$

$$(۳) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + ۹)$$

$$(۴) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲)$$

$$(۵) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۶) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲})$$

دفعہ ۳۶

$$(۱) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۲) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲} + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۳) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۴) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}$$

دفعہ ۳۷

$$(۱) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۲) \quad ۲ = ۶ + ۲ \text{ قو}^{\text{لا}^۲} (۱ + \frac{۱}{۲} \text{ لا}^۲) + ۲ \text{ جب}^{\text{لا}^۲}$$

$$(۳) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۴) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۵) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۶) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

دفعہ ۳۸

$$(۱) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۲) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۳) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۴) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۵) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۶) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

۶ + ۶ + ۶

$$(۷) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

دفعہ ۳۹

$$(۱) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$(۲) ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸ \quad (۱ + ۱ + ۱) \text{ جو } ۱۸$$

$$\begin{aligned}
 (۳) \quad ۱ = ۸ = \text{جم (لوک لا)} - \text{جب (لوک لا)} + ۱ = ۱ \\
 + \text{ب لا جم (۳ لوک لا - عه)} \\
 (۴) \quad ۱ = ۴ = \text{لوک لا} + ۱ = ۱ + \text{ب لا لوک لا} \\
 + \text{ج لا (لوک لا)} + ۱ = ۱ + \text{د لا (لوک لا)} \\
 (۵) \quad ۱ = ۱ = (۱ + ۲) = \{ \text{لوک (۱ + ۲)} \} + \{ \text{لوک (۱ + ۲)} \} + \text{ب لا} \\
 (۶) \quad ۱ = ۱ = \text{جم (لوک (۱ + ۲) - عه)} + ۲ = \text{لوک (۱ + ۲)} + \text{ب لا (لوک (۱ + ۲))} \\
 (۷) \quad ۱ = ۱ = \text{ب لا}
 \end{aligned}$$

## دفعہ ۴

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad ۱ = ۱ = \text{جم (لا - عه)} = \text{ی} - \text{ب (لا - عه)} \\
 (۲) \quad ۱ = ۱ = \text{ب قو} + \text{قو} = \text{ی} = ۶ = \text{ب قو} - ۵ = \text{ب قو} \\
 (۳) \quad ۱ = ۱ = \text{ب قو} + \text{جم (لا - عه)} = \text{ی} = ۲ = \text{ب قو} - \text{جم (لا - عه)} \\
 (۴) \quad ۱ = ۱ = \text{ب قو} + \text{ب قو} + \text{ی} = \text{ب قو} - \text{ب قو} \\
 (۵) \quad ۱ = ۱ = \text{جم (لا - عه)} + ۴ = \text{ب جم (لا - عه)} + \text{جم (لا - عه)} \\
 = \text{ی} = \text{جم (لا - عه)} + \text{ب جم (لا - عه)} - ۲ = \text{جم (لا - عه)} \\
 (۶) \quad ۱ = ۱ = ۵ = \text{ب قو} - ۴ = \text{ب قو} + ۲ = \text{ب قو} + \text{جم (لا - عه)} - \text{ب لا} \\
 = \text{ی} = \text{ب قو} + \text{ب قو} + ۳ = \text{ب قو} + \text{جم (لا - عه)} + ۵ = \text{ب لا}
 \end{aligned}$$

## تیسرے باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا$$

$$(۲) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) - ۲قو = ۳لا$$

$$(۳) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا - ۲ج + ۲ع + ۲قو (جب لا - ۲ج)$$

$$(۴) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) - ۲قو = ۳لا - ۲ع - ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۵) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا + ۲ع + ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۶) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) - ۲قو = ۳لا - ۲ع - ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۷) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا + ۲ع + ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۸) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا + ۲ع + ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۹) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) - ۲قو = ۳لا - ۲ع - ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۱۰) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا + ۲ع + ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۱۱) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) - ۲قو = ۳لا - ۲ع - ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۱۲) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) + ۲قو = ۳لا + ۲ع + ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۱۳) \quad (۱ + ۲ب + ۳ج + ۴لا) - ۲قو = ۳لا - ۲ع - ۲ج (جب لا - ۲ج)$$

$$(۱۴) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۱۵) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۱۶) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۱۷) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۱۸) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۱۹) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۰) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۱) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۲) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۳) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۴) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۵) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۶) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۷) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۸) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$

$$(۲۹) \quad ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۵$$





## دفعہ ۴۳

$$(۱) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} = \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جفت}} \quad (۲) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جفت}} = ۱$$

$$(۳) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} = ۱$$

$$(۴) \text{ ی} = \frac{\text{لا جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} + \frac{\text{ما جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جفت}} + \left( \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} \right)$$

$$(۵) \text{ ی} = \left( \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} \right)$$

$$(۶) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} = ۱$$

## دفعہ ۴۵

$$(۱) \text{ ما} = \text{قو}^۱ \text{ پ}^۱ \text{ (لا + ت)} \quad (۲) \text{ ی} = \text{جب پ}^۱ \text{ لا جب پ}^۱ \text{ ما}$$

$$(۳) \text{ ی} = \text{جم پ}^۱ \text{ (لا - ما)}$$

$$(۴) \text{ و} = \text{قو}^۱ \text{ پ}^۱ \text{ لا + ق}^۱ \text{ ما جب ی} \sqrt{\text{پ}^۱ \text{ ق}^۱ \text{ + ق}^۱ \text{ ما}} \text{ جہاں پ اور ق مثبت ہیں}$$

$$(۵) \text{ و} = \text{ج جم (پ ق لا + پ}^۱ \text{ ما + ق}^۱ \text{ ی)}$$

$$(۶) \text{ و} = \text{قو}^۱ \text{ رت جب (م}^۱ \text{ لا) جب (ن}^۱ \text{ ما) جہاں م}$$

اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

$$\text{اور ر ل}^۱ = \text{م}^۱ \text{ (م}^۱ \text{ + ن}^۱)$$

دفعہ ۴۸

$$(۱) \frac{r}{n} (\text{جب } لا + \frac{1}{3} \text{ جب } لا ۳ + \frac{1}{5} \text{ جب } لا ۵ + \dots)$$

$$(۲) ۲ (\text{جب } لا - \frac{1}{3} \text{ جب } لا ۲ + \frac{1}{3} \text{ جب } لا ۳ - \dots)$$

$$(۳) \frac{r}{n} \left[ \left( \frac{n}{1} - \frac{n}{1} \right) \text{ جب } لا - \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \right) \text{ جب } لا ۲ + \dots \right]$$

$$+ \left( \frac{n}{3} - \frac{n}{3} \right) \text{ جب } لا ۳ + \dots$$

$$(۴) \frac{r}{n} \left[ \frac{1}{1-2} \text{ جب } لا ۲ + \frac{1}{1-3} \text{ جب } لا ۳ + \frac{1}{1-4} \text{ جب } لا ۴ + \dots \right]$$

$$[ \dots +$$

$$(۵) \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} (1+n) \text{ جب } لا + \frac{1}{5} (1-n) \text{ جب } لا ۲ + \dots \right]$$

$$+ \frac{3}{10} (1+n) \text{ جب } لا ۳ + \frac{1}{12} (1-n) \text{ جب } لا ۴ + \dots$$

$$(۶) \frac{r}{n} \left[ \frac{1}{1} \text{ جب } لا + \frac{1}{2} \text{ جب } لا ۲ - \frac{1}{3} \text{ جب } لا ۳ + \frac{1}{4} \text{ جب } لا ۴ - \dots \right]$$

$$(۷) (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (ب) (۷)$$

چوتھے باب پر متفرق مثالیں

$$(۲) \frac{\text{جفا}^۲}{\text{جفا} لا} = \frac{1}{ک} \frac{\text{جف} و}{\text{جفت}}$$

## دفعہ ۴۳

$$(۱) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} = \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ت}} \quad (۲) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ تا}} =$$

$$(۳) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} = ۱$$

$$(۴) \text{ ی} = \frac{\text{لا} \text{ جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} + \frac{\text{ما} \text{ جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} + \frac{\text{ت جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ تا}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} + \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}}$$

$$(۵) \text{ ی} = \left( \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} \right)$$

$$(۶) \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ لا}} \frac{\text{جف}^۱ \text{ ی}}{\text{جف}^۱ \text{ ما}} = ۱$$

## دفعہ ۴۵

$$(۱) ۱ = \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ لا}} \right) \quad (۲) \text{ ی} = \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ تا}} \right)$$

$$(۳) \text{ ی} = \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ تا}} \right)$$

$$(۴) \text{ و} = \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ تا}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ تا}} \right)$$

$$(۵) \text{ و} = \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ تا}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ج}^۱ \text{ پ}}{\text{ج}^۱ \text{ تا}} \right)$$

$$(۶) \text{ و} = \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ تا}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{ق}^۱ \text{ پ}}{\text{ق}^۱ \text{ تا}} \right)$$

اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

$$\text{اور } \text{ر}^۱ = \left( \frac{\text{م}^۱ \text{ ن}}{\text{م}^۱ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{م}^۱ \text{ ن}}{\text{م}^۱ \text{ ما}} \right) + \left( \frac{\text{م}^۱ \text{ ن}}{\text{م}^۱ \text{ تا}} \right)$$

## وقفہ

$$(۱) \frac{۱}{n} (\text{جب } لا + \frac{۱}{۳} \text{ جب } لا۳ + \frac{۱}{۵} \text{ جب } لا۵ + \dots)$$

$$(۲) ۲ (\text{جب } لا - \frac{۱}{۴} \text{ جب } لا۲ + \frac{۱}{۳} \text{ جب } لا۳ - \dots)$$

$$(۳) \frac{۲}{n} \left[ \left( \frac{۲۶}{۳} - \frac{۳}{۲} \right) \text{ جب } لا - \left( \frac{۲۶}{۳} - \frac{۳}{۲} \right) \text{ جب } لا۲ \right]$$

$$+ \left[ \dots \text{ جب } لا۳ - \left( \frac{۲۶}{۳} - \frac{۳}{۲} \right) \right]$$

$$(۴) \frac{۴}{n} \left[ \frac{۲}{۱-۲} \text{ جب } لا۲ + \frac{۱}{۱-۳} \text{ جب } لا۴ + \frac{۶}{۱-۶} \text{ جب } لا۶ \right]$$

$$[ \dots +$$

$$(۵) \frac{۱}{n} \left[ \frac{۱}{۲} (۱+و) \text{ جب } لا + \frac{۲}{۵} (۱-و) \text{ جب } لا۲ \right]$$

$$+ \frac{۳}{۱۰} (۱+و) \text{ جب } لا۳ + \frac{۴}{۱۰} (۱-و) \text{ جب } لا۴ + \dots$$

$$(۶) \frac{۲۲}{n} - \frac{۱}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{۱}{k} \text{ جب } لا^k \left( \frac{۲۲}{n} - \frac{۱}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{۱}{k} \text{ جب } لا^k \right) \text{ جب } لا$$

$$(۷) (۱) (۲) (۳) اور (۶) (ب) (۶)$$

چوتھے باب پر تفرق مثالیں

$$(۲) \frac{\text{جف}^۲ و}{\text{جف} لا} = \frac{۱}{ک} \frac{\text{جف} و}{\text{جف} ت}$$

## دفعہ ۴۳

$$(۱) \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} = \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} \quad (۲) \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ما}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} =$$

$$(۳) \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} + \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ما}} = ۱$$

$$(۴) \text{ ی} = \frac{\text{لا جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} + \frac{\text{ما جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ما}} + \frac{\text{ت جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ت}} + \left( \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ما}} \right)$$

$$(۵) \text{ ی} = \left( \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} \right) + \left( \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ ما}} \right)$$

$$(۶) \frac{\text{جف}^۲ \text{ ی}}{\text{جف}^۲ \text{ لا}} = ۱$$

## دفعہ ۴۵

$$(۱) \text{ ما} = \text{پ}^۲ \text{ (لا + ت)} \quad (۲) \text{ ی} = \text{ا جب پ لا جب پ ا ما}$$

$$(۳) \text{ ی} = \text{ا جم پ (ا لا - ما)}$$

$$(۴) \text{ و} = \text{ا ق پ لا + ق ما جب ی} \sqrt{\text{پ}^۲ \text{ ق}^۲ + \text{ق}^۲ \text{ جہاں پ اور ق مثبت}}$$

$$(۵) \text{ و} = \text{ج جم (پ ق لا + پ ما + ق ی)}$$

$$(۶) \text{ و} = \text{ا ق ت جب (م ن لا) جب (ن م لا) جہاں م}$$

اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

$$\text{اور ر ل}^۲ = \text{ا}^۲ (\text{م}^۲ + \text{ن}^۲)$$

## دفعہ ۴۸

$$(۱) \frac{۱}{n} (\text{جب } لا + \frac{۱}{۳} \text{ جب } لا۳ + \frac{۱}{۵} \text{ جب } لا۵ + \dots)$$

$$(۲) ۲ (\text{جب } لا - \frac{۱}{۳} \text{ جب } لا۲ + \frac{۱}{۳} \text{ جب } لا۳ - \dots)$$

$$(۳) \frac{۲}{n} \left[ \left( \frac{n}{۱} - \frac{n}{۱} \right) \text{ جب } لا - \left( \frac{n}{۲} - \frac{n}{۲} \right) \text{ جب } لا۲ \right]$$

$$+ \left[ \left( \frac{n}{۳} - \frac{n}{۳} \right) \text{ جب } لا۳ - \dots \right]$$

$$(۴) \frac{n}{n} \left[ \frac{۲}{۱-۲} \text{ جب } لا۲ + \frac{۱}{۱-۲} \text{ جب } لا۳ + \frac{۱}{۱-۲} \text{ جب } لا۴ + \dots \right]$$

$$[ \dots +$$

$$(۵) \frac{۱}{n} \left[ \frac{۱}{۲} (۱+n) \text{ جب } لا + \frac{۲}{۵} (۱-n) \text{ جب } لا۲ \right]$$

$$+ \frac{۳}{۱۰} (۱+n) \text{ جب } لا۳ + \frac{n}{۱۰} (۱-n) \text{ جب } لا۴ + \dots$$

$$(۶) \frac{۲۲}{n} \cdot \frac{۱}{n} \text{ جب } لا + \frac{n}{n} \text{ جب } لا۲ - \frac{n}{n} \text{ جب } لا۳ + \dots \text{ جب } لا۴$$

$$(۷) (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (ب) (۷)$$

چوتھے باب پر تفرق مثالیں

$$(۲) \frac{\text{جف } لا}{\text{جف } لا} = \frac{۱}{\text{جف } لا}$$

$$(۵) \frac{\text{جف}^۲ \text{و}}{\text{جف}^۲ \text{ر}} = \frac{\text{جف}^۲ \text{ر}}{\text{جف}^۲ \text{ر}} \left( \frac{\text{جف}^۲ \text{و}}{\text{جف}^۲ \text{ر}} \right)$$

$$(۷) \text{و} = \text{و} \text{جب (ن-ت-گ-لا) جہاں گ} = \left[ \frac{\text{ن}}{\text{جف}^۲} \right] +$$

$$(۱۲) \text{و} = \frac{۸}{۱۱} \text{ (قو جب لا} + \frac{۱}{۲۷} \text{قو جب لا} + \frac{۱}{۲۷} \text{قو جب لا} + \dots)$$

$$+ \frac{۱}{۱۲۵} \text{قو جب لا} + \dots)$$

$$(۱۳) \text{لا کی بجائے } \frac{۱۱}{۱۱} \text{ت کی بجائے } \frac{۲۲}{۱۱} \text{ت، اور جزو فی$$

$$\frac{۸}{۱۱} \text{ کی بجائے } \frac{۲۲}{۱۱} \text{ رکھو۔}$$

$$(۱۴) \text{و} = \frac{۲۲}{۱۱} - \left( \text{قو جب لا} + \frac{۱}{۲۷} \text{قو جب لا} + \frac{۱}{۲۷} \text{قو جب لا} + \dots \right)$$

$$+ \frac{۱}{۹} \text{قو جب لا} + \dots)$$

$$(۱۵) \text{و} = \frac{۲۲}{۱۱} \text{ (قو جب لا} + \frac{۱}{۳} \text{قو جب لا} + \frac{۱}{۳} \text{قو جب لا} + \dots)$$

$$+ \frac{۱}{۵} \text{قو جب لا} + \dots)$$

[یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگرچہ صفر اور ۱۱ کے درمیان لاکھ  
تمام قیمتوں کے لیے و = ۱۰۰ لیکن لا = ۰ یا ۱۱ کے لیے و = ۰ اور یہ  
عدم تسلسل ہے]

(۱۲) مثال (۱۵) کے طلب میں و کی بجائے ۱۰۰ رکھو۔



$$(۱۸) \frac{۱}{n} = \left\{ \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+1} \right\} + \left\{ \frac{۱}{n+1} - \frac{۱}{n+2} \right\} + \dots + \left\{ \frac{۱}{n-1} - \frac{۱}{n} \right\}$$

$$\left\{ \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+1} \right\} + \left\{ \frac{۱}{n+1} - \frac{۱}{n+2} \right\} + \dots + \left\{ \frac{۱}{n-1} - \frac{۱}{n} \right\}$$

$$(۱۹) \frac{۱}{n} = 1 \text{ (جب } n=1 \text{ جب } 1 \text{ لاجم و } 1 - \frac{1}{9} \text{ جب } 3 \text{ لاجم و } 1 - \frac{1}{25} \text{ جب } 5 \text{ لاجم و } \dots)$$

$$+ \frac{1}{25} \text{ جب } 5 \text{ لاجم و } 1 - \frac{1}{49} \text{ جب } 7 \text{ لاجم و } \dots)$$

## پانچواں باب

### دفعہ ۵۲

$$(۱) (۱-۱)(۱-۱) = ۰$$

$$(۲) (۱-۱)(۱-۱) = ۰$$

$$(۳) ۱ = ۱$$

$$(۴) (۱-۱)(۱-۱) = ۰$$

$$(۵) (۱-۱)(۱-۱) = ۰$$

$$(۶) (۱-۱)(۱-۱) = ۰$$

دفعہ ۵۲  
(صرف کامل ابتدائی درجہ کے لئے ہیں۔ آگے چل کر یہ)

معلوم ہو گا کہ بعض صورتوں میں نادر حل موجود ہیں،

$$(۱) لا = ۴ع + ۳ع^۲، ما = ۲ع + ۳ع^۲ + ج$$

$$(۲) لا = \frac{1}{4}(ع + ع^{-۱})، ما = \frac{1}{4}ع - \frac{1}{4}لوک + ج$$

$$(۳) (۱-ع) لا = ج - ع + لوک ع (۱-ع) = ما = ۲ع (ج-۲) + لوک ع + ج$$

$$(۴) لا = \frac{۳}{۴}ع + ۳ع + ۳لوک (۱-ع) + ج$$

$$ما = ۳ع + \frac{۳}{۴}ع + ۳لوک (۱-ع) + ج$$

$$(۵) لا = ۲مس - ع - ع^{-۱} + ج، ما = لوک (ع + ع^{-۱})$$

$$(۶) لا = ع + ج قو^{-۱}، ما = \frac{1}{4}ع + ج (۱+ع) قو^{-۱}$$

$$(۷) لا = ۲ع + ج ع (۱-ع)^{-\frac{1}{2}}، ما = ۱-ع + ج (۱-ع)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(۸) لا = جب ع + ج، ما = ع جب ع + جم ع$$

$$(۹) لا = مس ع + ج، ما = ع مس ع + لوک جم ع$$

$$(۱۰) لا = لوک (۱+ع) - لوک (۱-ع) + لوک ع + ج،$$

$$ما = ع - لوک (۱-ع)$$

$$(۱۱) لا = \frac{ع}{۲ع+۱} + مس^{-۱} ع، ما = ج - \frac{1}{۲ع+۱}$$

$$(۱۲) ۱ = ج$$

## چھٹا باب

دفعہ ۵۸

(۱) ک۔ ۱: (کامل ابتدائی) (ما + ج) = لا<sup>۱</sup> = لا<sup>۳</sup> = لا = قرن طریق ہے

(۲) ک۔ ۲: (ما + ج) = لا<sup>۲</sup> = لا<sup>۲</sup> - ن - ح (= نادر ص) لا = ۲

III

(۳) ک۔ ۱: (لا + ج + ما + ج) = لا<sup>۲</sup> = لا<sup>۲</sup> - ن - ح؛ ما = لا<sup>۴</sup>

(۴) ک۔ ۱: (ما = جب (لا + ج) = لا<sup>۲</sup> - ن - ح؛ ما = ۱

(۵) ک۔ ۱: (لا + لا + لا + ج) = لا<sup>۴</sup> - (لا + ما) = لا<sup>۴</sup> + لا = لا = قرن طریق ہے

(۶) ک۔ ۱: ج - ۲: لا + لا + ج - ما - ۱۲ لا + لا<sup>۳</sup> = لا<sup>۴</sup> - لا = قرن طریق ہے

(۷) ک۔ ۱: ج + ۶ ج - لا - ۲ ج - ما - لا (۳ - ما - لا) = لا<sup>۴</sup> = لا + لا = قرن طریق ہے

دفعہ ۶۵

(۱) ک۔ ۱: (ما + ج) = لا (لا - ۱) (لا - ۲) = لا<sup>۲</sup> - ن - ح؛ لا (لا - ۱)

(لا - ۲) = ۰ (تماس طریق) لا = ۱ -  $\frac{1}{36}$  اور لا = ۱ +  $\frac{1}{36}$  خیالی

نقاط تماس کا (تماس طریق) ہے۔

(۲) ک۔ ۱: (ما + ج) = لا (لا - ۱) = لا<sup>۲</sup> - ن - ح؛ لا = ۰

(تماس طریق لا =  $\frac{1}{36}$  عقدہ طریق لا = ۱

$$(۳) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۴) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۵) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۶) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

(تماس طریق) لا =

$$(۷) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

بھی ہے، ۲ - ۱ = ۲ ج = ۱ ن - ۱: ۲ - ۱ = ۲ ج = ۱ لا

$$(۸) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۹) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۰) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۱) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۲) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۳) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۴) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۵) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۶) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۱۷) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

دفعہ ۶

$$(۱) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۲) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۳) \text{ گ} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} + ۱ \text{ لا} = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ ن} - ۱: ۲ - ۱ = ۲ \text{ ج} = ۱ \text{ لا}$$

$$(۴) \text{ گ-۱: } \text{ما} = \text{ج لا} + \sqrt{\text{ا}^۲ \text{ج} + \text{ب}^۲ \text{ن}} - \text{ح: } \frac{\text{لا}^۲}{۲}$$

$$۱ = \frac{\text{ما}}{\text{ب}^۲} +$$

$$(۵) \text{ گ-۱: } \text{ما} = \text{ج لا} - \text{ف: } \text{ن} - \text{ح: } \text{ما} = \text{لا} (\text{نو ک لا-۱})$$

$$(۶) \text{ گ-۱: } \text{ما} = \text{ج لا} - \text{جبتاج: } \text{ن} - \text{ح: } \text{ما} = \pm \sqrt{\text{ا}^۲ \text{لا} - ۱}$$

$$- \text{جبتا: } \sqrt{\frac{۱}{\text{لا}} - ۱}$$

$$(۷) \frac{۱}{۲} (\text{ما} - \text{ع لا}) = - \text{ع ک}^۲ \text{، } \text{ما} = \text{ک}^۲ \text{، ایک قائم}$$

زائد جس کے متقارب محور ہیں۔

$$(۸) (\text{لا} - \text{ما})^۲ - \text{ک}^۲ (\text{لا} + \text{ما}) + \text{ک}^۲ = ۰ \text{، ایک مکانی جو محوروں کو مس کرتا ہے۔}$$

$$(۹) \text{ چار قرنی برتدویر } \text{لا}^۳ + \text{ما}^۳ = \text{ک}^۳$$

## چھٹے باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) \text{ کوئی نا در حل نہیں، } \text{لا} = ۰ \text{، ایک (تماس طریق) ہے۔}$$

$$(۲) \text{ ما} = ۴ - \frac{\text{ع}}{۱ - \text{ع}}$$

$$(۵) \text{ ما} = \pm ۳ \text{ لا فوں کو تعبیر کرتا ہے، } \text{ما} = ۰ \text{، فاف}$$

اور قرن طریق دونوں ہے۔

$$(۶) \text{ گ-۱: } \text{لا} = \text{ما} = \text{ج} + \text{ج}^۲$$

$$(۷) \text{ گ-۱: } \text{لا} = \text{ما} = \text{ج} + \text{لا ما ج: } \text{ن} - \text{ح: } \text{ما} + \text{ما}^۲ = ۰$$



$$(۹) (۱ + \frac{1}{b})^2 = k \text{ یا } 'زنجیرہ-ب-ک' \text{ جمنز } \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right\}$$

دفعہ ۳۷

$$\begin{aligned} (۱) \quad ۱ &= ۱ \text{ (لا) (لوک لا + ب)} \\ (۲) \quad ۱ &= ۱ \text{ (لاجم (۲ لوک لا) + ب لاجب (۲ لوک لا)} \\ (۳) \quad ۱ &= ۱ \text{ (لا) (لوک لا + ب)} \\ (۴) \quad ۱ &= ۱ \text{ (لا) (لوک لا + ب)} \end{aligned}$$

دفعہ ۳۸

$$(۱) \quad ۱ = ۱ \text{ (مز لا-ج) } \quad (۲) \quad ۱ = ۱ \text{ (لوک (۱-لا)}$$

$$(۳) \quad ۱ = ۱ \text{ جب لا} \quad (۴) \quad ۱ = ۱ \text{ (ت) } \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right\} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right\} +$$

$$(۵) \quad (۱) \text{ مخروطی } = ۶ = \frac{1}{s} + \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \text{ جمنط}$$

$$(۲) \quad ۶ = ۶ \text{ جمنط } = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \text{ یا جمنط } \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right\}$$

بموجب اس کے کہ  $\frac{1}{s} > ۶$

## دفعہ ۷۵

$$(۱) \quad ۱ = ۱ + (۱ + ۱^۲) ۱ + ۱^۲ ۱ \quad (۲) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + ۱^۲ ۱$$

$$(۳) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱ \quad (۴) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱$$

$$(۵) \quad ۱ = ۱^۲ ۱$$

## دفعہ ۷۶

$$(۱) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱ \quad (۲) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱$$

$$(۳) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱ \quad (۴) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱$$

$$(۵) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱ \quad (۶) \quad ۱ = ۱ + ۱^۲ ۱ + ۱^۲ ۱$$

## دفعہ ۸۰

$$(۱) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + (۱ + ۱) ۱ + ۱ ۱$$

$$(۲) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + (۱ + ۱) ۱ + ۱ ۱$$

$$(۳) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + (۱ + ۱) ۱ + ۱ ۱$$

$$(۴) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + (۱ + ۱) ۱ + ۱ ۱$$

$$(۵) \quad ۱ = ۱ + (۱ - ۱) ۱ + (۱ + ۱) ۱ + ۱ ۱$$



$$(۵) \quad م = ل + قو + (ب - لا) قو + ج لا^۳$$

## ساتویں باب پر تفرق مثالیں

$$(۱) \quad م = ل + قو - ب \quad (۲) \quad م = ل + لوک (لا + ب)$$

$$(۳) \quad م = ل + \frac{لا^۲}{۱ + ن} + \frac{لا^۲}{۱ - ن} + \frac{لا^{۲-ن}}{۱ - ن} + ب لا^{۲-ن}$$

$$+ ج لا^{۳-ن} + ... + لا + ک$$

$$(۴) \quad م = ل - ل^{۲-ن} - ج م \{ لا - \frac{۱}{۲} (۲ - ن) \} + ل ج م لا$$

$$+ ب ج ب لا + ج لا^{۳-ن} + ... + لا + ک$$

$$(۵) \quad م = ل + لا + ب لوک لا \quad (۶) \quad م = ل + قو + ب (لا - ۱) قو$$

$$(۷) \quad م = ل + ج م ن لا + ب ج ب ن لا + \frac{لا}{ن} ج ب ن لا$$

$$- \frac{۱}{ن} ج م ن لا لوک قطن لا$$

$$(۸) \quad م = (۳ + لا) ل + لوک لا + ب + قو$$

$$(۹) \quad (۱) \quad \sqrt{لا + ب} = م$$

$$(۲) \quad \sqrt{لا + لوک لا + ب} = م$$

$$(۱۰) م = (لجم ل + ب جب ل + جب ۲ ل) ق$$

$$(۱۲) م = لا ی \quad (۱۳) ع = - \frac{۱}{۳}$$

$$(۱۴) (۱) م = (ل ق + ب ق - جب لا (رکھوی = لا))$$

$$(۲) م (ل + ۱) = (ل - ۱) + ب لا (رکھولا = یس)$$

$$(۱۸) \frac{۲ م}{ق ی} - م ۲ = م ۲ (۱ - ی) \quad م = جب ۲ لا$$

$$+ (جمز ۲ جب ل + ع)$$

$$(۱۹) م = لجم ۲ (ل + ۱) ق + ب جب ۲ (۱)$$

$$+ (ل ق) + (ل + ۱) ق$$

## آٹھواں باب

دفعہ ۸۳

$$(۱) م = ۲ + ل + لا - لا \frac{۱}{۳} - لا \frac{۲}{۱۵}، ٹھیک حل$$

$$۲ + ل + لا = م$$

$$(۲) م = لا ۲ - ۲ لوک لا - \frac{۱}{۳} (لوک لا)، ٹھیک قیمت$$

$$\frac{۱}{ل} + ل = م$$

$$(۳) \quad ۱ + ۲ + ۳ + \dots + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۳}{۲۰} + \frac{۳}{۲۰} = ۱$$

$$۱ + ۳ + \frac{۳}{۳} + \frac{۳}{۲۸} + \frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۳} + \frac{۳}{۳} = ۱$$

$$(۴) \quad ۱ + ۵ + ۱ + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۲}{۳۳} + \frac{۲}{۳۳} + \frac{۱}{۲۲} = ۱$$

$$۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = ۱$$

(۵) ماکہ وہی قیمت ہے جو مثال ۴ میں ہے۔

دفعہ ۸۷

(۲) ۲۵۱۹۲

(۱) ۲۵۱۹

(۳) (۱) ۲۵۱۲ (ب) ۲۵۱۱۸

(۴) خطائیں ۰.۵۰۰۱۸، ۰.۵۰۰۱۴، ۰.۵۰۰۱۳  
بالائی حدود ۰.۱۷۲، ۰.۲۸۶، ۰.۳۲۰

دفعہ ۸۹

۱۵۱۶۷۸۲۴۹، ۱۵۱۶۷۸۰۲۵، ۱۵۱۶۷۸۳۸۷

نواں باب

دفعہ ۹۵

$$(۱) \quad ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots = ۰$$

$$۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \dots = ۰$$

$$\left\{ \dots + \frac{1^3}{9 \times 4} + \frac{2^3}{4 \times 5} + \frac{3^3}{5 \times 6} + \frac{4^3}{6 \times 7} + 1^3 - 1 \right\} = 6 \quad (۲)$$

$$و \frac{1^3}{(۱-۱)} = ۰$$

$$\frac{1}{6} (۱-۱) = \left\{ \dots + 1^3 \frac{4 \times 3 \times 1}{9 \times 4 \times 3} + 1^3 \frac{3 \times 1}{4 \times 3} + 1^3 \frac{1}{3} + 1 \right\} = 6 \quad (۳)$$

$$و \frac{1}{10} = \left\{ \dots + 1^3 \frac{12 \times 11 \times 8}{12 \times 13 \times 10} + 1^3 \frac{11 \times 8}{13 \times 10} + 1^3 \frac{8}{10} + 1 \right\}$$

$$(۴) \left\{ \dots + 1^3 \frac{1}{(ن+۲)(ن+۱)۸ \times ۴} + 1^3 \frac{1}{(ن+۱)۴} - 1 \right\} = ۶$$

دکوہ سے حاصل کرنے کے لئے ن کو- ن میں تبدیل

کرو۔ اگر کو مستقل  $\frac{1}{۲(ن+۱)}$  سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب

کو رتبہ ن کا بیسل کا تفاعل کہتے ہیں اور اس کو جی (لا) سے  
تعبیر کرتے ہیں۔

دفعہ ۹۶

(۱) اور (۴) لاکھ تمام قیمتیں (۲) اور (۳) لاکھ

دفعہ ۹۷

$$\left\{ \dots + 1^3 \frac{10 \times 5 \times 2}{12 \times 9 \times ۴} + 1^3 \frac{5 \times 2}{9 \times ۴} + 1^3 \frac{2}{۴} + 1^3 + 1 \right\} = ۶ \quad (۱)$$

$$\{ \dots - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \} + 1 = 0$$

$$\{ \dots + \frac{1}{2^4 \times 2^3 \times 2^2} - \frac{1}{2^4 \times 2^3} + \frac{1}{2^4} - 1 \} = 6(2)$$

$$1 \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2^4 \times 2^3} - \frac{1}{2^4} \} + 1 = 0$$

$$\{ \dots - \frac{1}{2^4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2^4 \times 2^3 \times 2^2} +$$

۶ کو رتبہ صفر کا بیسل کا متفاعل کہتے ہیں اور اس کو جے (۵)

سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$\{ \dots + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} - 1 \} = 6(3)$$

$$1 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} \} + 1 = 0$$

$$\{ \dots - \frac{1}{2^4} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2^4} +$$

$$\frac{1}{2^4} \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{2^4 \times 2^3} + \frac{1}{2^4} \frac{3 \times 1}{2^4} + 1 \} = 6(4)$$

$$\{ \dots + \frac{1}{2^4} \frac{11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{2^4 \times 2^3 \times 2^2} +$$

$$1 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) \frac{3 \times 1}{2^4} \} + 1 = 0$$

$$1 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{2^4 \times 2^3} +$$

## دفعہ ۹۸

$$(1) \quad \left\{ \frac{1}{\hat{L} \times 7 \times 2 \times 2} - \frac{1}{\hat{L} \times 4 \times 2 \times 2} + \frac{1}{\hat{L} \times 2 \times 2} - \right\} \hat{L}^2 = 6$$

$$\left\{ \dots - \frac{1}{\hat{L} \times 10 \times 8 \times 4 \times 2 \times 2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\hat{L} \times 2 \times 2} + \frac{1}{\hat{L} \times 2} + 1 \right\} \hat{L}^2 + \hat{L} = 6$$

$$\left\{ \dots - \frac{11}{\hat{L} \times 2 \times 4 \times 2 \times 2} + \frac{31}{\hat{L} \times 2 \times 8 \times 4 \times 2 \times 2} - \right.$$

$$\left. \hat{L}^2 (\hat{L} - 1) = \dots + \hat{L}^3 + \hat{L}^2 + \hat{L} = 6 \right. \quad (2)$$

$$6 = \text{لوک } \hat{L} + \hat{L} + \hat{L} + \hat{L} + \dots = \text{لوک } \hat{L} (\hat{L} - 1) + \hat{L}$$

$$\left\{ \dots + \hat{L} \times 3 + \hat{L} \times 2 + \hat{L} \times 1 \right\} = 6 \quad (3)$$

$$6 = 6 + \text{لوک } \hat{L} + \left\{ -1 + \hat{L} + \hat{L} \times 3 + \hat{L} \times 5 \right\}$$

$$\left\{ \dots + \right.$$

$$\left\{ \dots - \frac{5}{\hat{L}} + \hat{L}^2 - \hat{L}^2 + \hat{L}^2 + \hat{L}^2 \right\} = 6 \quad (4)$$

$$6 = \text{لوک } \hat{L} + \left\{ -1 - \hat{L} - \hat{L} \times 5 + \hat{L}^2 + \frac{11}{\hat{L}} \right\}$$

## دفعہ ۹۹

$$(1) \quad \hat{L} + \left\{ \dots - \frac{1}{\hat{L} \times 5} - \frac{1}{\hat{L} \times 3} - \hat{L} - 1 \right\} \hat{L} = 6$$

$$= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right\} + \dots$$

$$(2) = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\} + \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right\} + \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right\} + \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right\} + \dots$$

$$\dots$$

$\left[ \frac{1}{n} \right]$  کی قوتوں کے حلوں کے لیے نویں باب کے

آخر میں متفرق مثالوں میں سے مثال ۷ کو دیکھو

$$(3) = \left\{ \frac{1}{1 \times 2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \right\} + \left\{ \frac{1}{2 \times 3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 5} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3 \times 4 \times 5} - \frac{1}{4 \times 5 \times 6} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4 \times 5 \times 6} - \frac{1}{5 \times 6 \times 7} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{5 \times 6 \times 7} - \frac{1}{6 \times 7 \times 8} \right\} + \dots$$

$$(4) = \left\{ \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right\} + \left\{ \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} \right\} + \dots$$

وقف

$$(۱) ی^۲ فرما + \frac{۲ فرما}{فری} + (۱ - ن ی^۲) = م$$

$$(۲) م = لا^۲ (لا + ۱)$$

$$(۳) م = لا^۲ (لا + ۱) \{ ۱ + ب لا^۲ (لا + ۱) \} \frac{۱}{لا}$$

$$(۵) ی^۲ قو اور [ ی^۲ قو لوک ی + ی^۲ \{ ۱ - \frac{۱}{۲} (۱ + \frac{۱}{۲}) \} ]$$

$$+ \left[ \left\{ \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + ۱ \right\} (۱ - \frac{۱}{۳}) - \dots \right]$$

$$\frac{۱}{لا} = ی \text{ جہاں}$$

### نویں باب پر تفرق مثالیں

XIII

$$(۱) لا^۳ = \{ ۱ + \frac{۳}{لا} + \frac{۹}{لا^۲} + \frac{۲۷}{لا^۳} + \dots \}$$

$$= \{ ۱ + \frac{۳}{لا} + \frac{۹}{لا^۲} + \frac{۲۷}{لا^۳} + \dots \}$$

$$لا^۴ = \{ ۱ + \frac{۴}{لا} + \frac{۱۶}{لا^۲} + \frac{۶۴}{لا^۳} + \dots \}$$

$$(۲) = \{ ۱ + \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا^۲} + \frac{۱}{لا^۳} + \dots \}$$

$$= ۶ لوک لا + ۲ - \left\{ \frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا^۲} (۱ + \frac{۱}{لا}) \right\}$$



$$\left\{ \dots - \frac{1}{x_1 x_2 x_3} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 1 \right) - \dots \right\}$$

$$ط = ع (لوک لا) + ۲ (و - ع لوک لا) لوک لا$$

$$\left\{ \dots + \frac{1}{x_1 x_2} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) + \dots \right\}$$

## گیارہواں باب

دفعہ ۱۱۳

$$(۱) \frac{لا}{و} = \frac{ب}{ی} = ی، مبداء میں سے گذرتے ہوئے$$

خطوطِ مستقیم۔

$$(۲) ل لا + م ما + ن ی = و، لا + ما + ی = ب، دائرے$$

$$(۳) ما = و ی، لا + ما + ی = ب ی، دائرے$$

$$(۴) لا - ما = و، لا - ی = ب، قائم زائیدی اسطوانوں کے$$

دونظاموں کے تقاطع۔

$$(۵) لا - ما = و (ی - لا) (لا - ما) (لا + ما + ی) = ب$$

$$(۶) لا + ما + ی = و، ما - ی = ب، کروی کے$$

ایک نظام اور قائم زائیدی اسطوانوں کے ایک نظام کے تقاطع۔

$$(۸) زائیدنا ما + ی - ی - لا = ۱$$

$$(۷) \sqrt{م + ن}$$

$$(9) (لا + ما) = (ک مس - \frac{ما}{لا}) = ی^۲ = ی^۲$$

$$(10) \frac{1}{۲} + \frac{1}{ی} = \frac{1}{۲} + \frac{1}{ما} = \frac{1}{لا}$$

### دفعہ ۱۱۴

$$(1) ما - لا = لا ۳ = ی + مس (ما - لا ۳) ب قو$$

$$(2) ما + لا = لا ۲ = لوک { ی + (ما + لا) } - لا ۲ = ب$$

$$(3) لا ما = لا ۲ = (ی + لا ما) - لا ۲ = ب$$

$$(4) ما = لا ۲ = لوک (ی - \frac{لا ۲}{ما}) - لا = ب$$

### دفعہ ۱۱۶

$$(1) لا + ما + ی = ج^۲ = کرب جن کے مرکز مبداء پر ہیں$$

$$(2) لا + ما + ی = ج^۲ = لا کرب جن کے مرکز محور لا پر$$

ہیں اور جو مبداء میں سے گزرتے ہیں -

$$(3) لا ما ی = ج^۳$$

$$(4) ما ی + ی لا + لا ما = ج^۲، مشابہ مخروطی ناجن کے$$

مرکز مبداء پر ہیں -

$$(5) لا - ج = ما = مالوک ی$$

$$(6) لا + لا ۲ + ما ی = ج^۲، مشابہ مخروطی ناجن کے مرکز مبداء$$

پر ہیں —

## دفعہ ۱۱

$$(۱) م = ج لا لوک لا \quad (۲) لا^۲ م = ج ی وی$$

$$(۳) (لا + م + ی) قو^۲ = ج$$

$$(۴) م (لا + ی) = ج (م + ی)$$

$$(۵) ج = \frac{لا + ی}{م} + \frac{م + ی}{لا}$$

$$(۶) ن م - م ی = ج (ن لا - ل ی)'$$

$$\text{مشترک خط} \quad \frac{لا}{ن} = \frac{م}{م} = \frac{ی}{ن} \text{ ہے۔}$$

## دفعہ ۱۲

$$(۳) ی = ج قو^۲ \quad (۴) لا^۲ ی + م = ۰$$

گیارہویں باب پر تفرق مثالیں

$$(۱) م = لا^۲ ی - لا م = ب$$

$$(۲) لا^۳ م + ی = لا^۳ م + م^۳ = ب لا^۲ م$$

$$(۳) م + ی = لا قو^۲ م - لا^۲ ی = ب$$

$$(۳) \text{ ما} = \text{ج} \text{ لا} + \frac{\text{ج ی}}{\text{ی} + ۱}$$

$$(۵) \text{ لا} + \text{لا ما} + \text{لا ی} = \text{ت} + \text{ج}$$

$$(۶) \text{ ف} (\text{ما}) = \text{ک ما} ، \text{لا ک} = \text{ج ما}$$

$$(۸) \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{ی}}$$

$$(۹) \text{ ما} + \text{ی} = ۳ \text{ لا} ، \text{ما} - \text{ی} = ۳$$

$$(۱۰) (\text{آ}) \text{ لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ج} (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})$$

$$(\text{ب}) \text{ لا} - \text{لا ما} = \text{ج ی}$$

$$(\text{ب}) \text{ ما} - \text{ما ی} = \text{ج ی}$$

$$(۱۴) \text{ لا ما} = \text{ج تو جب ط}$$

## بارہواں باب

دفعہ ۱۲۳

$$(۱) \text{ فہ} \left( \frac{\text{لا}}{\text{ی}} ، \frac{\text{ما}}{\text{ی}} \right) =$$

$$(۲) \text{ فہ} (\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} + \text{لا} + \text{ما} + \text{ی}) =$$

$$(۳) \text{ فہ} \left( \frac{\text{لا}}{\text{ی}} ، \frac{\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}}{\text{ی}} \right) =$$

$$(۴) \text{ فہ } (لا^۲ - ما^۲، لا^۲ - ی^۲) = .$$

$$(۵) \text{ فہ } \left\{ (لا - ما^۲) (لا + ما + ی) \right\} = \left\{ \frac{لا - ما}{لا - ی} \right\}$$

$$(۶) \text{ فہ } (لا + ما^۲ + ی^۲، ما^۲ - ما - ی - ی^۲) = .$$

$$(۷) \text{ فہ } [ما - لا^۳، قو^۵] = \left\{ ۵ ی + مس (ما - لا^۳) \right\}$$

$$(۸) \text{ فہ } \left\{ لا + لا^۲، لوک (ی + ما^۲ + ما + لا^۲) - لا^۲ \right\} = .$$

$$(۹) \text{ ما}^۲ = ۴ لا ی^۲ \quad (۱۰) (لا - ما^۲) + ب (لا - ی^۲)$$

$$= ج +$$

$$(۱۲) \text{ فہ } (لا + ما^۲، ی) = . \text{ محوری کے گرد گردشیں}$$

وضع ۱۳۶

$$(۱) \text{ فہ } (ی + لا، لا + لا، لا + لا، لا + لا) = .$$

$$(۲) \text{ فہ } (ی، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا، لا) = .$$

$$(۳) \text{ فہ } (ی - لا، لا، لا، لا + لا، لا + لا، لا، لا، لا) = .$$

$$(۴) \text{ فہ } (ی + لا، لا، لا، لا - لا، لا - لا، لا، لا، لا) = .$$

$$(۵) \text{ فہ } (۴ ی - لا، لا، لا، لا - لا، لا - لا، لا، لا) = . \text{ خاص تکملہ ی} = .$$

$$(۶) \text{ فـ } \{ \text{ی} - \text{لا}^۳ - \text{ی}^۳ - \text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ + \text{ی} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} \} = ۰$$

خاص تکملہ ی = لا + لا + لا

### وقفہ ۱۲۹

$$(۱) \text{ ی} = (۲\text{ب}^۲ + ۱)\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}$$

$$(۲) \text{ ی} = \text{لا} \text{اجم} + \text{ع} + \text{ما} \text{جب} + \text{ع} + \text{ج}$$

$$(۳) \text{ ی} = \text{لا} + \text{لا} + \text{ما} \text{لوک} + \text{و} + \text{ج}$$

$$(۴) \text{ ی} = \text{و} + \text{لا} + \text{و}^۲ + \text{ما} + \text{ج}$$

$$(۵) \text{ ی} = ۲\text{لا} \text{قطع} + ۲\text{ما} \text{مس} + \text{ع} + \text{ج}$$

$$(۶) \text{ ی} = \text{لا} (۱ + \text{و}) + \text{ما} (۱ + \frac{۱}{\text{و}}) + \text{ج}$$

### وقفہ ۱۳۰

$$(۱) \text{ و} = (۱ + \text{لا} + \text{ما} + \text{ب})^۲$$

$$(۲) \text{ ی} = \pm \text{جمنز} \{ (۱ + \text{لا} + \text{ما} + \text{ب}) \} \left( ۱ + \frac{۱}{\text{و}} \right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$(۳) \text{ ی}^۲ - \text{و}^۲ = (۱ + \text{لا} + \text{ما} + \text{ب})^۲ \text{ یا } \text{ی} = \text{ب}$$

$$(۴) \text{ ی}^۲ (۱ + \text{و})^۳ = (۱ + \text{لا} + \text{ما} + \text{ب})^۳$$

$$(۵) (۱ + \text{و}) \text{و} = \text{ب} + \text{لا} + \text{ما}$$

$$(۶) \text{ ی} = \text{ب} + \text{و} + \text{لا} + \text{ما}$$

### دفعہ ۱۳۱

$$(۱) \quad ۳ ی = ۲(لا + ل) + ۳(۱ + ما) + ۳ ب$$

$$(۲) \quad ۱۲ ی = ۱(لا + ل) + ۲(ما + ۱) + ۲ ب$$

$$(۳) \quad ۱ ی = ۱(لا + ل) + ۲(ما + ۱) + ۱ ب$$

$$(۴) \quad (۲ ی - ۱(ما + ل) - ۲ ب) = ۱۶ ل$$

$$(۵) \quad ۱ ی = ۱(لا + ل) + ۲(ما + ۱) + ب$$

$$(۶) \quad ۱ ی = ۱(لا + ل) + ۱(ما + ل) + ۱ ب$$

### دفعہ ۱۳۳

$$(۱) \quad ۲ ی = ۲ - کوک لا ما \quad (۲) \quad ۳ ی = لا ما - لا - ما$$

$$(۳) \quad ۸ ی = ۲ - لا ما \quad (۴) \quad ۱ ی = لا - ما$$

$$(۵) \quad ۰ ی = ۰ \quad (۶) \quad ۱ ی = ۱ \quad (۷) \quad ۰ ی = ۰$$

### دفعہ ۱۳۶

$$(۱) \quad ۴ ی = - ما$$

(۴) عام مکملہ کی ایک مخصوص صورت جو اس سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی تکوین نقطہ (۰، ۰) - (۱، ۰) میں سے گزرتے ہوئے

$$(۶) \text{ فہ } \{ ی - ۳ لا' ی - ۳ لا' ی + ۶ ی - ۱ لا - ۱ لا - ۱ لا \} = ۰$$

$$\text{خاص تکملہ } ی = لا + لا + لا$$

### وقف ۱۲۹

$$(۱) ی = (۲ ب' + ۱) لا + ب + ما + ج$$

$$(۲) ی = لا جم + ما جب + ع + ج$$

$$(۳) ی = لا + لا + ما لوک + و + ج$$

$$(۴) ی = لا + لا + و' + ما + ج$$

$$(۵) ی = ۲ لا قطع + ۲ ما مس + ع + ج$$

$$(۶) ی = لا (۱ + ۱) + (۱ + ۱) ما + (-\frac{1}{3}) + ج$$

### وقف ۱۳۰

$$(۱) و' ی = (لا + و' + ما + ب)$$

$$(۲) ی = \pm \text{جمنز} \{ (لا + و' + ما + ب) \} (۱ + و' + \frac{1}{6})$$

$$(۳) ی' - و' = (لا + و' + ما + ب) یا ی = ب$$

$$(۴) ی' (۱ + و') = (لا + و' + ما + ب) ۸$$

$$(۵) (ی + و') = \frac{لا + و' + ما}{ب}$$

$$(۶) ی = ب = \frac{لا + و' + ما}{و'}$$



## دفعہ ۱۳۱

$$(۱) \quad ۳ ی = ۲ (لا + ل) + ۳ ل + ۳ ما + ۳ ب$$

$$(۲) \quad ۲ ل ی = ل^۲ لا + ما^۲ + ۲ ل ب$$

$$(۳) \quad ل ی = ل لا^۲ + ل لا + ل^۲ نو + ل ب$$

$$(۴) \quad (۲ ی - ل ما - ۲ ب) = ۱۶ ل لا$$

$$(۵) \quad ی = ل (نو + نو) + ب$$

$$(۶) \quad ل ی = ل لا + ل جب لا + جب ما + ل ب$$

## دفعہ ۱۳۳

$$(۱) \quad ی = ۲ - لوک لا ما \quad (۲) \quad ۳ ی = لا ما - لا^۲ - ما^۲$$

$$(۳) \quad ۸ ی^۲ = - ۲ لا ما^۲ \quad (۴) \quad ی لا = - ما$$

$$(۵) \quad ی = ۰ \quad (۶) \quad ی = ۱ \quad (۷) \quad ی = ۰$$

## دفعہ ۱۳۶

$$(۱) \quad ی = - ما^۲$$

(۴) عام مکملہ کی ایک مخصوص صورت جو اُس سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی بیخوبین نقطہ (۰، ۱) - (۰، ۱) میں سے گزرتے ہوئے



$$(۱۲) ی^۲ = (۱ + ل)^۲ + ل^۲ + م^۲ + ب$$

(۱۳) ی = ل + مس (لا + ل + م + ب) یا ی = ب  
ی = ناؤر تکملہ ہے لیکن وہ ی = ب میں بھی شامل ہے۔

$$(۱۴) ی^۲ = ل^۲ + ل + ب - م - ۳ + ل + ب^۲، ناؤر تکملہ ی^۲ = \frac{۲}{۹}$$

$$- \frac{۲}{۳}$$

$$(۱۵) ی = لا + م - ۱ \pm ۲ \sqrt{(۱ - لا)(۱ - م)}$$

$$(۱۶) ی - لا = م = ج$$

$$(۱۷) ف = \left( \frac{ی}{۱} , \frac{ی}{لا} \right) = \text{مخروط جن کے راس مبدا پر ہیں۔}$$

(۱۸) لا + م + ی^۲ = ۲ || جم + ع + ۲ + م + ج + ع + ج  
جن کے مرکز دیئے ہوئے دائرے پر ہیں عام تکملہ کے دوسرے حل حاصل ہوتے ہیں۔  
(۱۹) لا م ی = ۰ (یہ ناؤر تکملہ ہے۔ کامل تکملہ سے ماس  
مستوی حاصل ہوتے ہیں)

$$(۲۰) \text{تفریق سادات (ی - ع - لا - ق - م) (۱ - ا - ع - ق) =}$$

کا کوئی ناؤر تکملہ نہیں ہے اور کامل تکملہ مستویوں کو تعبیر کرتا ہے۔  
ہر وہ تکملہ جو عام تکملہ میں شامل ہے ایک ایسے مستوی کے لٹاف  
کو تعبیر کرتا ہے جس کی سادات میں صرف ایک تبدل ہے  
یعنی جو کشاد پذیر سطح ہے۔



$$(۴) ی = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ - ۲(۱ + ۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

$$(۵) ۲(۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱ + ۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

$$(۶) ۴(۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱ + ۱) + ۲(۱ + ۱ + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) + ۱$$

$$(۷) (۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

$$(۸) ی = (۱ + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱)$$

$$- \frac{1}{3} (۱ + ۱ + ۱) \pm \frac{2}{3} \{ ۱ + ۱ + ۱ - ۲(۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱ \}$$

$$+ ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

دفعہ ۱۴۲

$$(۱) ی = (۱ + ۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

(۲) کوئی مشترک تہملہ نہیں ہے۔

$$(۳) ی = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ - ۲(۱ + ۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

$$(۴) ی = ۱ + (۱ + ۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱$$

$$(۵) ی = ۱ + (۱ + ۱ + ۱ - ۳(۱ + ۱) + ۳(۱ + ۱) - ۳(۱ + ۱) + ۱) + ۱$$

(۶) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

$$(۷) ی = ا (لا - لا) + ب (لا - لا) + ج 'یا ی = ا (لا - لا)$$

$$+ ب (لا - لا) + ج$$

$$(۸) ی = ف (لا - لا - لا) -$$

$$(۹) ی = ف (لا - لا - لا) یا ی = ف (لا - لا - لا)$$

### تیرہویں باب پر متفرق مثالیں

$$(۱) ی = ا لوک لا - ا لوک لا + ا لوک لا + ا$$

(۲) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

$$(۳) ی = ا لوک لا + ا لوک لا + ا (ا + ا) لا$$

$$\pm \sqrt{ا (ا + ا) لا} + ا$$

$$(۴) = ا لوک لا + ا لوک لا + ا (ا + ا) لا$$

$$\pm \sqrt{ا (ا + ا) ی} + ا$$

$$(۵) ۲ لوک ی = ج \pm (لا + لا + لا)$$

$$(۶) ی = لا + لا + لا + ج$$

$$0 = \text{ی}^۲ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۲$$

$$(۱۰) \text{ ی} = \text{فہ} (\text{لا}^۱ \text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۴ + \text{لا}^۵)$$

$$(۱۱) (۴) \text{ ی}^۳ = \text{لا}^۳ - \text{لا}^۳ + \text{لا}^۳ + \text{ج}$$

## چودھواں باب

### دفعہ ۱۴۴

$$(۱) \text{ ی} = \text{لا}^۳ + \text{لا}^۳ + \text{فا} (\text{ما})$$

$$(۲) \text{ ی} = \text{لوک لا لوک ما} + \text{ف} (\text{لا}) + \text{فا} (\text{ما})$$

$$(۳) \text{ ی} = \frac{۱}{\text{لا}} \text{ جب لا ما} + \text{ما} (\text{لا}) + \text{فا} (\text{لا})$$

$$(۴) \text{ ی} = \text{لا}^۳ + \text{ف} (\text{ما}) \text{ لوک لا} + \text{فا} (\text{ما})$$

$$(۵) \text{ ی} = \text{جب} (\text{لا} + \text{ما}) + \frac{۱}{\text{ما}} \text{ ف} (\text{لا}) + \text{فا} (\text{ما})$$

$$(۶) \text{ ی} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ف} (\text{لا}) + \text{فو}^۱ \text{ فا} (\text{لا})$$

$$(۷) \text{ ی} = (\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲) - ۱$$

$$(۸) \text{ ی} = \text{ما}^۲ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۲ + \text{لا}^۲ - \text{ب لا} + \text{ج}$$

$$(\tilde{U}-1)\tilde{L}+\tilde{L}\tilde{U}=\mathcal{O}(1), \quad \tilde{L}(\tilde{L}+\tilde{U})=\mathcal{O}(q)$$



- (۲) ی = لا<sup>۲</sup>(لا + ما) + ف(ما + لا<sup>۳</sup>) + لا فا(ما + لا<sup>۳</sup>)  
 (۳) ی = لا<sup>۲</sup>اجم(لا + ما) + ف(ما + لا<sup>۲</sup>) + لا فا(ما)  
 (۴) ی = لا<sup>۲</sup>قو + ف(ما - لا) + فا(ما<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup>)  
 (۵) و = (لا + ما<sup>۲</sup>) + ف(ما + لا) + فا(ما - لا<sup>۲</sup>)  
 (۶) ی = لا<sup>۲</sup>لوک(لا + ما) + ف(ما + لا<sup>۲</sup>) + لا فا(ما + لا<sup>۲</sup>)

### وقعہ ۱۴۹

- (۱) ی = لاجب ما + ف(ما - لا) + لا فا(ما - لا)  
 (۲) ی = لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup>ما + ف(ما + لا<sup>۵</sup>) + فا(ما - لا<sup>۳</sup>)  
 (۳) ی = جب لا - ماجم لا + ف(ما - لا<sup>۳</sup>) + فا(ما + لا<sup>۲</sup>)  
 (۴) ی = جب لا ما + ف(ما + لا<sup>۲</sup>) + فا(ما - لا)  
 (۵) ی =  $\frac{۱}{۲}$ مس لا مس ما + ف(ما + لا) + فا(ما - لا)  
 (۶) ما = لا لوک ت + ت لوک لا + ف(ت + لا<sup>۲</sup>)  
 + فا(ت - لا<sup>۲</sup>)

### وقعہ ۱۵۰

- (۱) ی = ف(لا) + فا(ما) + قو<sup>۳</sup>ف(ما + لا<sup>۲</sup>)  
 (۲) ی = قو<sup>۳</sup>{ف(ما - لا) + لا فا(ما - لا)}

$$(۳) \quad \text{و} = \text{و} \text{ (لا + ت)}$$

$$(۴) \quad \text{ی} = \text{ن} \text{ (ما + لا)} + \text{قو} \text{ (لا - ما)}$$

$$(۵) \quad \text{ی} = \text{و} \text{ (لا + ما)} + \text{و} \text{ (لا + کما)}$$

$$(۶) \quad \text{و} = \text{و} \text{ (لا + جم + ما + جب + ع)}$$

$$(۷) \quad \text{ی} = \text{و} \text{ (ما + لا)} + \text{و} \text{ (لا + کما)}$$

$$(۸) \quad \text{ی} = \text{ا} + \text{قو} \text{ (لا - ا)}$$

### وقعا ۱۵

$$(۱) \quad \text{ی} = \frac{۱}{۲} \text{و} \text{ (لا - ما)} + \text{فوف} \text{ (ما + لا)} + \text{قو} \text{ (لا - ما)}$$

$$(۲) \quad \text{ی} = \text{ا} + \text{لا - ما - لا} + \text{فوف} \text{ (ما + لا)} + \text{قو} \text{ (لا - ما)}$$

$$(۳) \quad \text{ی} = \frac{۱}{۸۲} \text{ (جب (لا - ما) + جم (لا - ما) + ک (ما + کلا))}$$

$$\text{و} \text{ (لا + کما)}$$

$$(۴) \quad \text{ی} = \text{لا} + \text{ف (ما + لا)} + \text{قو} \text{ (لا - ما)}$$

$$(۵) \quad \text{ما} = \text{و} \text{ (لا + ی)} + \text{و} \text{ (لا + قاطع + ی مس + ع)}$$

$$(۶) ی = یو^۲ \left\{ \begin{array}{l} \text{لا}^۲ \text{مس} (ما + لا) + \text{لاف} (ما + لا) \\ + \text{فا} (ما + لا) \end{array} \right.$$

### دفعہ ۱۵۲

$$\begin{aligned} (۱) \text{ ما}^۲ \text{ر} - ۲ \text{ماس} + \text{ت} &= \text{ع} + ۶ \text{ما} \\ (۲) \text{ ع} \text{ت} - \text{ق} \text{س} &= \text{ق}^۳ \\ (۳) \text{ ر} + ۳ \text{س} + \text{ت} &= (\text{رت} - \text{س}^۲) = ۱ \\ (۴) \text{ ع} \text{ق} (\text{ر} - \text{ت}) - (\text{ع}^۲ - \text{ق}^۲) \text{س} &+ (\text{ع} \text{ما} - \text{ق} \text{لا}) \\ &= (\text{رت} - \text{س}^۲) = ۰ \\ (۵) \text{ ع}^۲ \text{ر} + \text{ق} \text{ت} - ۲ \text{ع} \text{ق} (\text{رت} - \text{س}^۲) &= ۱ \\ (۶) \text{ ق} \text{ر} + (\text{ق} - \text{ع}) \text{س} - \text{ع} \text{ت} &= ۰ \end{aligned}$$

### دفعہ ۱۵۳

$$\begin{aligned} (۱) ی &= یف (ما + جب لا) + فا (ما - جب لا) \\ (۲) ی &= یف (لا + ما) + فا (لا ما) \\ (۳) ما - ما &= (لا + ما + ی) = فہ (لا) یا ی = فہ (لا) \\ &+ فا (لا + ما + ی) \\ (۴) ی &= یف (لا + مس ما) + فا (لا - مس ما) \\ (۵) ی &= یف (لا + ما^۲) + فا (لا - ما^۲) + لا ما \\ (۶) ما = یف &= (لا + ما + ی) + لا فا (لا + ما + ی) \end{aligned}$$

$$(3) \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \right)$$

(۴) ی = ت (ما + لا) + فو (ما - لا)

(5)  $Y = Z + Z$  (لا + لا)  $Z$  (لا + لا)  $Z$

ن (لاجم ع + اجب ع)  
(4) 3 = 9 نو

$$\{ \text{ک (۶+۲ ک ۷)} \} \text{ف (۶+۲ ۷)} + \text{ج (۷)} = \text{ی (۷)}$$

$$\{1 - (1 - b)\}^n + 1 = 5 \quad (*)$$

وقف ۱۵۱

$$(1) \quad \frac{1}{p} = u + \frac{u^2}{p} + \frac{u^3}{p} + \dots$$

(۲) ی = ا + لا - ما - لا ما + فوف (ما) + قو<sup>ما</sup> فا (لا)

$$\left\{ \frac{1}{82} = 5 \right\} \text{جب (لا-63) + 9 جم (لا-63) کے}$$

3+ (ما + ک لا)

$$(۴) ی = لا + ف (ما) + قو^۱ (فا) (لا + ا)$$

(5)  $6 = -\text{و} + \text{و} + 3$  لاقطه + می نسعه

$$(۶) ی = نو \left\{ \begin{array}{l} لا^۲ مس (ما + لا) + لاف (ما + لا) \\ + فا (ما + لا) \end{array} \right\}$$

### دفعہ ۱۵۲

$$\begin{aligned} (۱) ما^۲ ر - ۲ ماس + ت + ع + ۶ &= ۱ \\ (۲) ع ت - ق س = ق^۳ \\ (۳) ۱ + ۳ س + ت + (رت - س^۲) &= ۱ \\ (۴) ع ق (ر - ت) - (ع^۲ - ق^۲) س + (ع - ق) لا &= (رت - س^۲) \\ (۵) ۲ ع ر + ق ت - ۲ ع ق (رت - س^۲) &= ۱ \\ (۶) ق ر + (ی ق - ع) س - ع ت ی &= ۰ \end{aligned}$$

### دفعہ ۱۵۳

$$\begin{aligned} (۱) ی = ف (ما + جب لا) + فا (ما - جب لا) \\ (۲) ی = ف (لا + ما) + فا (لا ما) \\ (۳) ما - سا (لا + ما + ی) = ف (لا) یا ی = ف (لا) \\ + فا (لا + ما + ی) \\ (۴) ی = ف (لا + مس ما) + فا (لا - مس ما) \\ (۵) ی = ف (لا + ما^۲) + فا (لا - ما) + لا ما \\ (۶) ما = ف (لا + ما + ی) + لا فا (لا + ما + ی) \end{aligned}$$

(۷)  $n = 3$  لا ا- لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۳</sup> - لوک ۶ - ۳

۱۵۷۹

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (1) \quad \text{ف} = 62 - 11 + 2 = 53$$

$$\infty = 1' (2) = 1 - 1 = 0$$

$$(3) \text{ ع-قو} = \text{ن (ق-ما)}' \text{ ل} = \infty$$

$$(۴) \text{ ع} - \text{ا} = \text{ف} (\text{ق} + \text{لا}) \text{ ع}' + \text{ا} = \text{قا} (\text{ق} - \text{لا}) \text{ ل}' = \text{ا} \pm \text{ا}$$

(۵) ع-۱ = ف (ق-۲ لا) ع-۲ = م (ق-۱ لا) ل

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} =$$

(۶) ع-لا-ما = ف(ق-ما-لا) 'ل- = لا-یا-ما

$$(4) \text{ عا} - \text{لا} = \text{ف} (\text{عا} - \text{ما}) = \text{ل} = \frac{\text{عا}}{\text{عق}}$$

۱۵۸

$$2 + 6 \frac{3}{2} - 6 \times 2 + 6 \frac{1}{2} - 6 \times 1 + 6 \times 1 = 5 \quad (1)$$

$$u = \frac{1}{r} (a^2 (r+1)^2 + (r+2)(a^2 m + a^2 n + a^2 l + f))$$

(U) +

$$(u_1 + b)u + u_2 + (u_3 + u) \frac{1}{r} - b u r =$$

$$\text{XIX} \quad (۲) \quad ی = \frac{۱}{۲} (لا + ما) + لا + ب + ما + ج، ی = \frac{۱}{۲} (لا)$$

$$+ ما + (ن + لا + سا + ما + م + لا)$$

$$(۳) \quad ی = قو + ما + لا + ب + ما + ج، ی = قو + ما + ن + لا$$

$$+ سا + (ما + م + لا)$$

$$(۴) \quad لا = \frac{۱}{۲} (ع - بی)، ما = \frac{۱}{۲} \{سا (بی) - فہ (عہ)\}$$

$$ی = لا + ما + \frac{۱}{۲} \{فہ (عہ) - سا (بی)\} + بی + ما$$

$$(۵) \quad لا = بی - عہ، ما = فہ (عہ) - سا (بی)،$$

$$ی = لا + ما - فہ (عہ) + سا (بی) + بی + ما$$

$$(۶) \quad ی + \frac{۱}{۲} م + م - لا - ن کوک لا = فہ (لا + ما)، \text{ دوسرا طریقہ}$$

ناکام رہتا ہے۔

$$(۷) \quad ی = لا + ما + لا + لا + ب + ما + ج،$$

$$ی = لا + ما + لا + ن + لا + سا + ما + م + لا$$

$$(۸) \quad ی = ما - لا$$

چودھویں باب پر تفرق مثالیں

$$(۱) \quad ی = لا + ما + لا + ف (ما) + فا (ما)$$

$$(۲) \quad ی = قو + ف (لا) + فا (ما)$$

- (۳) مای = مالوک ۱ - ف (لا) + ما فا (لا)  
 (۴) می = ف (لا + ما) + لا فا (لا + ما) - جب (۲ لا + ۱ ما)  
 (۵) می = ف (ما + لوک لا) + لا فا (ما + لوک لا)  
 (۶) می = لا + ما + ف (لا ما) + فا (لا ما)  
 (۷) می = لوک (لا + ما) ف (لا - ما) + فا (لا - ما)  
 (۸) می = لا ۱ - لا ۳ - لا ۵ + ما ۱ + لا ۳ + ما ۳ + ج ۴  
 می = لا ۱ - لا ۳ - لا ۵ + ما ۲ + لا ۲ + سا (ما + م لا)  
 (۹) می = ۳ ج ± ۲ (لا + ۱) ± ۲ (ما + ب)  
 (۱۰) می = جب ما + م جب لا - م ن لا = م ف (ما + م لا)  
 (۱۱) لا ۲ = ع - بہ ۲ = ما = سا (بہ) - ف (عہ)  
 می = لا ۳ - لا ۱ - لا ۳ - ما ۴ + ف (عہ) - سا (بہ) + بہ ۲  
 (۱۲) می = لا ۲ + ما ۳ + (لا + ما + ۱)  
 (۱۳) می = لا ۲ - لا ما + ما ۲  
 (۲۰) ع لا + ق ما = ف (ع + ق) ع ما - ق لا = فا (ق)

## کُل کتاب پرتفرق مثالیں

$$(۱) (لا - ما) = ج لا ما \quad (۲) ما = لا + ج قولا$$

$$(۳) ۲ ققط لاقط ۱ = لا + جب لاجم لا + ج$$



$$(۴) (لا + ما + ج) = (ما - ج لا)$$

$$(۵) ۱ + لا + ما = (ج + جب لا) (۱ - لا)$$

$$(۶) ما = (۱ - \frac{۱}{۴} لا) (ج + جب لا)$$

$$(۷) ما = \frac{لا}{۵} - \frac{لا ۲}{۲۵} + \frac{۲۸}{۱۲۵} + \frac{۱}{۱۶} لا (ج + جب لا)$$

$$- (ج + جب لا) + (ج + جب لا) (ج + جب لا)$$

$$(۸) ما = ج + لا + ج لا لوک لا$$

$$+ لوک لا + \frac{۱}{۴} لا (لوک لا) + \frac{۱}{۴} لا$$

$$(۹) ما + قط لا = ج مس لا$$

$$(۱۰) لا = (قو + ب قو - ج قو) (ج + جب ت) + \frac{۲}{۵}$$

$$= ما (قو - ۳ ب قو - \frac{۶}{۵} ج ت)$$

$$(۱۱) لا = (۱ - ما) + \frac{۲}{۵} (ج + جب ت) + \frac{۲}{۵}$$

$$(۱۲) ما = (ب - لا) قو$$

$$(۱۳) ما = (۱ + ب لا + \frac{لا}{۶۴}) (ج + جب لا) + (ع + ف لا)$$

$$- \frac{لا}{۹۶} (ج + جب لا)$$

$$(۱۴) ما = ۳ لا + ج$$

$$(6U - 6 + U)Z = 6U + 6 \quad (15)$$

$$J_{\text{LGI}} = J^{\text{u}} + J^{\text{b}} + J^{\text{v}} \quad (14)$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (14) = 0$$

$$\left( \frac{5+13-11}{1(1-11)} \right) z = \frac{5-11}{1-11} (1-11) \quad (18)$$

$$\left(\frac{6}{11}\right) \cdot (62+5) = (11+5)(19)$$

(۲۰) ی = ا + لا + ب + م + د + ز + ح + ط + کلمہ معنی + لا

$$= 2 +$$

(۲۱) می = ٹوف (لا-ما) + فا (ما)

(۲۲)  $5 = 1 + 4$  ب  $4 + 1$  ج 'ناتریمکملہ' ۱۶ ی  $1 + 4 = 5$ .

$$(r_1 + r_2) \frac{1}{4} + (1 - r_1) \alpha + (1 + r_2) \beta = \gamma \quad (23)$$

(۲۴) ی = لاف (ما) + ما فاف (لا)

$$(b+1)(1+l) = 52 \quad (25)$$

$$\left(\frac{1}{11}\right) 6a + \left(\frac{1}{11}\right) 7b + 1 \frac{1}{2} = 5 \quad (26)$$

$$(۲۷) ی = ف(ی + لا) + فا(ی + لا)$$

(۲۸)  $\text{ج}^2 \text{لا}^2 \text{کنادر حل ما} = \text{۔ اور ما} + \text{لا}^2 = \text{۔}$

$$(\dot{b} + \dot{u}) = \dot{b} + \dot{u} = 1.1(1.9)$$

$$(۳۰) م = اجم \left( \frac{لا}{۱+ن} \right) + ب جب \left( \frac{لا}{۱+ن} \right)$$

$$(۳۱) لا + ما + ی = ۲ (لاجم + ما جب + ع + ج)$$

$$(۳۲) م = لا - نو - \frac{۳}{۲} نو + \frac{۱}{۳} نو$$

$$(۳۳) لا = نو - کت (اجم لہ ت + ب جب لہ ت)$$

$$+ ججم (ع - ع) = \frac{۱}{\sqrt{(ک۲ + ل۲ - ع۲) + (ک۲ + ل۲ - ع۲)}} \text{ جہاں ج}$$

اور ل اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

$$(۳۴) م = اجم (جب لا) + ب جب (جب لا)$$

$$(۳۵) (۱) نا = ا لوک (ر + ی) + ب$$

$$(۲) ف = ا نو - \frac{ما}{۳} نو فرعا + ب، جف لا جف ف$$

$$= \frac{۱}{\frac{لا}{۳} نو - ا ت}$$

$$(۳۶) و = ا \left\{ \frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۷} (۳ - ی) + \frac{۱}{۳۵} (۳۵) \right\}$$

$$- (۳۰ - ی ۳ + ر ۳)$$

$$\text{جہاں } r = l^2 + m^2 + n^2$$

$$(39) \text{ ج} = 6 \left( 1 + \frac{l^2}{r} + \frac{l^4}{r^2} + \frac{l^6}{r^3} + \dots \right) \text{ جہزت}$$

$$+ \text{ج} \left( \frac{l^2}{r} + \frac{l^4}{r^2} + \frac{l^6}{r^3} + \frac{l^8}{r^4} + \dots \right) \text{ جہزت}$$

$$(41) m - l = \text{ج} (l - m) \text{ قو}$$

$$(42) m = (l+1)(l-1) \left\{ 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \dots \right\}$$

$$+ (l+1)(l-1) \left\{ \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^3} + \frac{1}{l^4} + \dots \right\}$$

اگر ۱ ایک صحیح عدد ہو تو مکملہ کی قیمت  $y = \frac{l+1}{l-1}$  رکھ کر معلوم کیا جاسکتی ہے۔

$$(43) (1) m = (l-1)(l+1) \left\{ 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \dots \right\}$$

$$(2) m = (l-1)(l+1) \left\{ 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \dots \right\}$$

$$(44) (3) m = (l-1)(l+1) \left\{ 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} + \dots \right\} \text{ رکھو لوک } m$$

$$= \text{ج} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \text{ قو } l^2 \text{ میں تفرقی مساوات کا ایک حل}$$

$$[ - \frac{1}{r} = 6 ]$$

$$(45) \text{ ف } (l) = 1 - \frac{(r - nr)}{(1 - nr)} \frac{l^2}{r}$$

$$+ \frac{(1-n)(2-n)(3-n) \dots (n-2)(n-1)(n)}{(1-n)(2-n)(3-n) \dots (n-2)(n-1)(n)} \dots$$

$$\dots + \frac{(2-n)(3-n) \dots (n-2)(n-1)(n)}{(2-n)(3-n) \dots (n-2)(n-1)(n)} \dots$$

$$(۴۶) \quad 1 = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \quad \text{ج کی بجائے } n \text{ رکھئے}$$

$$(۴۷) \quad 6 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \right)$$

$$\dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} \right) + \dots$$

$$0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} \right) + \dots$$

دونوں سلسلے دائرہ  $1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  کے اندر مستحق ہیں۔

$$(۴۹) \quad 1 = \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{2} (1 + n)$$

$$(۵۰) \quad \frac{1}{n} = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{ج کو صرف } 1 \text{ کا ایک تفاعل}$$

ہونا چاہئے،  $1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$(۵۱) \quad 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$



ل س) بر سر س = لی انگلیس قوت

(۹۱) لا = اجماع است (تیمه) + جب جم (قوت - سیم)  
 ا = (اجب) (ع - عت) - جب جب ا ق ت - سیم

پنهان لا =  $\sqrt{\frac{جم}{جم + عت + ع}}$  که عت =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$

(۹۲) فرای  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  +  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری  
 لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فرت

(۹۳) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری  
 بشرطیکه  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۹۴) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۹۵) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۹۶) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۱۰۰) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۱۱۵) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۸) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۱) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۱۱۹) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

(۱۲۰) لا =  $\frac{جم}{جم + عت + ع}$  فری

$$(۵۲) \text{ ء و } \text{و} = \text{ا} \text{ و } \text{و} \text{ فرلا} + \text{ب جہاں و} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}} \text{ اور } \text{ط} = \text{ک و فرلا}$$

$$(۵۳) \text{ ف ن مم (ن لا + ا) + ق = ن}^۲$$

$$(۵۴) \text{ ما (ا - لا) = (ا - لا) (لا - لا) + نو + ب (ا - لا) نو}^۲$$

$$(۵۶) \text{ لا + ما ی = ج (ما + ی)}$$

$$(۵۷) \text{ ما = (ا - لا) نو + نو (ب ج م لا لا + ج جب لا لا) نو}^۲$$

$$+ \frac{۳}{۸} \text{ لا}^۲ + \frac{۱}{۲۴۶۴۹} \text{ نو}^۲ \{ ۱۵۷ \text{ لا (ج م لا + ا جب لا)}$$

$$+ ۳ (۷۸۳ \text{ ج م لا - ۵۶ جب لا}) \}$$

$$(۵۸) \text{ ما = (ا + لا) (ا + ب ج م لا + لا) نو}^۲ \{ ۱۵۷ \text{ لا (ج م لا + ا جب لا)}$$

$$(۵۹) \text{ ی (لا + ما) (لا + ما + ی) = ج (لا + ما - ی)}$$

$$(۶۰) \text{ لا ی = ج (ما + ی)}$$

$$(۶۲) \text{ (آ) رکھو ما = - \frac{۱}{\text{ء و (لا) فرلا}} \frac{\text{فرء}}{\text{ء و (لا) فرلا}}$$

$$(۲) \text{ ما - } \frac{۱}{۲} = \frac{\text{لا (ج + مس لا)}}{\text{ج - ۱ مس لا}} \text{ (طریقہ کھیلے دیکھو مثال ۴)}$$

(۶۵) اگر ایک ذرہ ف اس طرح حرکت کرے کہ اس کی رفتار مستقیم قطر و ف کے متناسب ہو اور و ف پر اور نیز ایک ثابت خط و گ پر عمود ہو تو وہ مستقل رفتار کے ساتھ ایک دائرہ مرشم کرے گا جس کا محور و گ ہوگا۔

$$(۶۷) \text{ رجب ۲ (طہ + عہ) = ۱، نادرسل ۲ = ۱}$$



$$(۶۸) \quad \bar{م} - \bar{لا} = \bar{ج} + \bar{لا} \pm \bar{لا} \pm \bar{لا} \quad \bar{ج} \text{ 'نادرصل' } \bar{م} - \bar{لا}$$

$$\bar{م} \pm \bar{لا} =$$

$$(۷۰) \quad \bar{م} (\bar{ج} - \bar{لا}) = (\bar{ج} - \bar{لا}) \text{ 'نادرصل' } \bar{م} = \bar{لا} - \bar{لا}$$

$$(۷۱) \quad \bar{لا} + \bar{ج} = \bar{ج} \text{ جم فہ } + \bar{ج} \text{ لوک مس } \frac{1}{4} \text{ فہ}$$

$$(۷۲) \quad \bar{ج} \text{ جم طہ } + \bar{ب} \text{ جم طہ } = \bar{ک}$$

$$(۷۳) \quad \bar{ج} \bar{م} = (\bar{ج} + \bar{لا}) \text{ 'نادرصل' } \bar{م} (\bar{م} - \bar{لا}) = ۰$$

$$(۷۵) \quad \bar{لا} + \bar{ع} + \bar{م} + \bar{ع} = ۰ \text{ ' } (\bar{م} + \bar{ع}) \text{ ' } \bar{ع} + \bar{ج} = \bar{ع} + \bar{ج} \text{ 'جزع'}$$

$$\bar{لا} \sqrt{\bar{ع} + \bar{ا} + \bar{ع} (\bar{ج} + \bar{ج} \text{ جزع})} = ۰$$

کوئی نادرصل نہیں ہے۔ ع مینر  $\bar{م} = \bar{لا}$  سے دیکھیں کہ  
قرن طریق تعبیر ہوتا ہے۔

$$(۷۷) \quad \bar{م} = \bar{لا} \text{ 'ی' } = \bar{ب} + \bar{لا} + \bar{م} \text{ 'ی' } = \bar{لا} + \bar{م}$$

$$+ \left( \frac{\bar{م}}{\bar{لا}} \right) \text{ ف}$$

ذیلی تکملوں سے محوری میں سے گزرتے ہوئے مستویوں کا  
ایک قبیل اور قائم مستدیر مخروطوں کا ایک قبیل جن کا محور محوری ہے  
تعبیر ہوتے ہیں۔ عام تکملہ سے سطحوں کا ایک قبیل تعبیر ہوتا ہے  
جن میں سے ہر ایک میں خطوط مستقیم کے ان زوجوں کی لامتناہی تعداد  
ہوتی ہے جن میں مستوی اور مخروط منقطع ہوتے ہیں۔

$$(۷۸) \quad \bar{لا} + \bar{م} + \bar{ی} = \text{ف} \{ (\bar{لا} + \bar{م}) + \bar{م} \}$$

$$لا + ما + ی = ی' ج' ، ی' = لا + ما + ج$$

$$(۷۹) (۲-لا-ما) = ج' ی' (لا+ما۲)$$

$$(۸۰) \frac{لا-۲-ب+ما}{ی+ج} = ف \left( \frac{لا+ب+ما}{ی-ج} \right)$$

$$(۸۱) (ا) ب = \frac{ع}{ر} + \frac{ل}{و} - \frac{ت}{م}$$

$$(۲) ۱ = ب - \frac{ع}{ر} \quad (۳) ب = \frac{ع}{ر}$$

$$(۸۲) ب = ل + جم (ع-ت-ص) + ل + و - \frac{ت}{م} - جہاں ل$$

$$= \frac{ع}{\sqrt{لا+۲+ع}} ، مس ص = \frac{ل+ع}{ر} اور ل$$

اختیاری ہے۔

$$(۸۳) ق = ل + جب (ع-ت-ص) جہاں مس ص$$

$$= (ج ل ع-۱) | ع ج ر اور$$

$$= \frac{ع ج}{\sqrt{(ج ل ع-۱) + ع ج ر}}$$

$$(۸۵) لا = ل + جم (ت-۶) + ب جم (۳-ت-ب)$$

$$ما = ۱۲ جم (ت-ع) - ۵ ب جم (۳-ت-ب)$$

$$(۸۶) ل اور ب، مسادات ل (ل ن-م) + ل (م ن)$$

+ ل س) + سر س = . کی اصلیں ہیں۔

$$(91) \quad لا = اجم(ع-ت-ع) + بجم(ق-ت-ب) \\ ما = اجم(ع-ت-ع) - بجم(ق-ت-ب)$$

$$\text{جہاں } ع۲ = \sqrt{ا۲ج۲ + ک۲} = \sqrt{ق۲ + ک۲} = ج۲$$

$$(92) \quad \frac{فری}{فرت} + (ا+ب) \frac{فری}{فرت} + ا ب ی = ا ب ج$$

$$(93) \quad ع = \sqrt{ا۲ - ن۲} \text{ سے خاص تکملہ کا حیثہ اعظم ہوتا ہے}$$

$$(94) \quad لا = ا قو ت ک ت جم(ع-ت-ص) \text{ جہاں } ع = ا ن - ک$$

$$(95) \quad ف = \frac{۱}{۲} و ا۲ ر۲ جم ط$$

$$(96) \quad ما ب ع ج = ا ب ج (ع ج) جم(ع-ت-ا)$$

$$(100) \quad ف = ج جمزم(ما+م) جم(م-لا-ن-ت)$$

$$(115) \quad (۲) = ع = ا(۲-) + ب(۱-)$$

$$(۸) = ع = ا(ع جم ۱۱ + ق جب ۱۱)$$

$$(۱۰) = ع = ا(۹-) + ب + ۱۱$$

$$(119) \quad ع = ک جم م ج جب م ت$$

$$(120) \quad ی = قو ما جب لا$$

## جوابوں کی متبادل شکلوں پر نوٹ

بعض مثالوں میں حل کے طریقہ کو ذرا سادہ بنانے سے کامل ابتدائی کی مختلف شکل حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً دفعہ ۳ کی مثال ۳ میں جواب ۱ = ما = جم (۱ + لا + ب) ہے لیکن طالب علم جواب ۱ = ما = جب (۱ + لا + ب) یا ۱ = ما = جنر (۱ + لا + ب) بھی ہر آسانی حاصل کر سکتا ہے۔ اگر پہلی شکل میں ب کی بجائے (ب -  $\frac{1}{2}$ ) کو رکھا جائے تو جواب کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے اور اگر اس دوسری شکل میں ۱ اور ب کی بجائے علی الترتیب ۱/۲ اور ب/۲ کو رکھا جائے تو خ سے تقسیم کرنے پر جواب کی تیسری شکل حاصل ہوتی ہے۔ دیگر شکلیں ۱ کی بجائے ۱/۲ رکھ کر حاصل کی جا سکتی ہیں۔

دفعہ ۱۶ کی مثال ۴ کے جواب میں ج کی بجائے ج - ج یا ج - ج کو رکھا جا سکتا ہے۔ عام طور پر اختیاری مستقل کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ تمام قیمتیں حقیقی یا خیالی یا ملتی اختیار کرتا ہے اور اس کی بجائے ایک نئے اختیاری مستقل کے کسی تفاعل کو رکھا جا سکتا ہے۔

جہاں تکملوں کے زوج مطلوب ہوں فطرتاً اکثر متبادل زوج حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۳ کی مثالوں ۵ اور ۶ کے جوابوں کی بجائے علی الترتیب

$$۱ - ی = (۱ - ما - لا) (۱ - ما - ی) (لا + ما + ی) = ب$$

اور  $لا + ما + ی = لا + ما - ما + ی = ب$

کو رکھا جاسکتا ہے۔ مثالوں کے اس جٹ میں زوجوں  $ع = لا + و$  کی بجائے  $ف = (ع + و) = لا + فا + و = ب$  کو رکھا جاسکتا ہے جہاں  $ف$  اور  $فا + و$  کے کوئی دو غیر تابع تفاعل ہیں۔

جزئی تفرقی مساواتوں کی متعدد مثالوں میں متبادل جواب حاصل ہو سکتے ہیں مثلاً دفعہ ۲۴ کی مثال ۳ کا جواب  $\frac{جف ی}{جف لا} بب$  ہے

$\frac{جف ی}{جف لا} = جم$  اور دفعہ ۳۹ کی مثال ۲ کا جواب  $ی (لا - ما) = (لا + ب)$  حاصل ہو سکتا ہے۔ (ملاحظہ ہو نوٹ صفحہ ۳۴۱) نوٹ۔ طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ کابل ابتدائی کو حقیقت میں کابل بنانے کے لیے ہمیں ان انتہائی شیطوں کا لحاظ رکھنا چاہئے جو اختیاری مستقلوں کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتی ہیں۔ چنانچہ دفعہ ۳۹ مثال ۴ میں کابل ابتدائی  $لا - ما + ج = لوک (لا + ما)$  ہے۔ اب  $ج$  کو  $\infty$  لینے سے حل  $لا + ما =$  حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح دفعہ ۴۰ مثال ۱ میں کابل ابتدائی  $لا = لا + ما +$

$ب$  لوک  $(ما - ب)$  ہے۔ یہاں  $\frac{ب}{ب} = \infty$  لینے سے حل  $ما = ب$  حاصل ہوتا ہے۔ ایسے حلوں اور ان کی ہندسی تعبیروں پر میں نے تفصیل کے ساتھ اپنے مقالہ

The incompleteness of Complete Primitives of Differential Equations

(مطبوعہ میٹھیائیٹیکل گزٹ ۱۹۳۹ء) میں بحث کی ہے۔ نیز اس

مقالہ میں کل تفرقی مساوات

ف فرلا + ق فرما + س فری = .

کے نادرطلوں سے متعلق بعض نئے نتیجے بیان کئے گئے ہیں۔

تہمت

تفرق مساواتیں	اشاریہ	۸
Todd	ٹاڈ	
Total differential equations	کلی تفرق مساواتیں	۲۰۹
Transformations	استحالی	۱۸، ۱۶۵، ۱۵۶، ۱۱۸، ۷۲
Transformer, electrical	برقی مدل	۱۸۳، ۲۲۴، ۲۳۶، ۲۲۵
Vapourisation	تبخیر	۴۰
Variation of parameters	مبدلوں کا تغیر	۱۸۲، ۱۷۱
Vibrating strings, equation of	مرتضی ڈوریوں کی مساوات	۲۳۶
Vibrations	ارتعاشات	۲، ۵۱، ۵۲، ۶۸، ۸۹، ۹۰
		۹۵، ۱۱۹، ۲۳۶، ۲۸۰، ۲۳۶، ۲۸۰-۲۸۷
Wada	واڈا	۱۰، ۱۳، ۱۶
Wave equation	موجی مساوات	۲۳۷
Wave mechanics	موجی میکانیٹ	۲۲۳
Weber	ویبر	۴۶۱
Whittaker and Watson	وہٹیکر اور واٹسن	۵۰۰
Whittaker's solution of Laplace's equation	لاپلاس کی مساوات کا وہٹیکر کا حل	۹۹، ۹۹
Whittaker's solution of the Wave equation	موجی مساوات کا وہٹیکر کا حل	۲۲۳
Wronski	رونسکی	۵۰۳
Wronskian	رونسکیان	۵۰۲
x absent	x غائب	۱۶۰
y absent	y غائب	۱۵۹
Zeeman effect	زیمانی اثر	۴۸۵

نا قاعدہ تکملے ۲۱۶ ، ۲۳۲ ، ۲۹۶	Regular integrals
نا قاعدہ نادر نقطہ ۴۳۳	Regular singular point
ریمس کا عددی طریقہ ۴۵۳	Remes' numerical method
رسمک ۶۹ ، ۸۸ ، ۴۸۴	Resonance
ریکٹی ۲۱۷	Riccati
ریکٹی کی مساوات ۴۰۰	Riccati's equation
ریمن ، ۴۶۲	Riemann
ریمن کی ف مساوات ۴۲۰	Riemann's P-equation
رنجسے ، ۱۸۶ ، ۱۹۴ ، ۱۹۷	Runge
رنجسے کا عددی طریقہ ۱۹۴	Runge's numerical method
شوارز ، ۱۸۲	Schwarz
شوارز تین مشتق ۱۸۱	Schwarzian derivative
شلیسنگر ۴۶۱	Schlesinger
شروڈنگر کی مساوات ۴۴۳	Schrodinger's equation
دوسرا تکملہ جو پہلے تکملے کی مدد سے معلوم کیا جائے ۱۶۹ ،	Second integral found by using a first
متغیروں کی جدائی ، ۲۳	Separation of the variables
سلسلوں میں حل ، ۲۴۳	Series, solution in
گردش کر نیوالا دھرا ۸۹	Shaft, rotating
سادہ ہوسینی حرکت ۳ ، ۱۶۶ ، ۴۸۱ ، ۴۸۴	Simple harmonic motion
ہمراہ مساواتیں ۷۹ ، ۱۱۴ ، ۳۳۲ ، ۳۴۰ ، ۵۰۱	Simultaneous equations
نادر تکملہ ۳۰۶	Singular integral
نادر نقطہ ۱۳	Singular point
نادر حل ، ۱۳ ، ۱۲۵	Singular solution
ہندسہ مجسمہ ، ۲۸۹	Solid geometry
ع ، لا یا ما کیلئے حل کرنا ۱۲۰	Solving for p, x, or y
خاص تکملہ ، ۲۹۶ ، ۴۵۷	Special integral
معیاری شکلیں ۳۰۴	Standard forms
مرتمش ڈوری ، ۳۷۸ ، ۴۳۶ ، ۴۸۹	String, vibrating
تحت طبعی تکملے ۴۲۹	Subnormal integrals
ذیلی مساواتیں ۲۹۹ ، ۳۶۹	Subsidiary equations
اندراجات ۷۴ ، ۱۱۸ ، ۱۵۶ ، ۱۶۵ ، ۱۸۰	Substitutions
۱۸۲ ، ۲۳۵ ، ۲۳۶ ، ۳۲۴	
سائیکس کا استقامت کا بین تحلیلی طریقہ ۳۸۷	Sylvester's dialytic method of elimination
علامتی طریقے ، ۶۳ ، ۸۴ ، ۸۷ ، ۱۱۸ ، ۳۴۹	Symbolical methods
۳۵۵ ، ۵۰۱	
تماس طریق ۱۳۶ ، ۳۸۸	Tac-loens
ٹیلر ،	Taylor
ٹیلیفون ۱۱۳	Telephone



ارتعاش کا طبعی یا مصدر طریقہ ۴۸۵ ، ۴۸۱	Normal modes of vibration
خطی طود پر غیر تابع تکملوں کی تعداد ۵۹۳	Number of linearly independent integrals
عددی تقرب ۱۸۵	Numerical approximation
دوسرا تکملہ جو پہلے تکملے کی مدد سے معلوم کیا گیا ہو ۲۶۷ ، ۱۶۹	One integral used to find another
عامل ع ۵۶ ، ۸۴ ، ۱۶۷ ، ۳۴۶ ، ۵۰۱	Operator D
عامل طہ ۸۶	Operator
سیاری مدار ۱۶۷ ، ۴۹۱	Orbits, planetary
رتبہ ۲	Order
معمولی نقطہ ۲۴۳	Ordinary point
عمی القوائم مرمیات ۳۶ ، ۴۲ ، ۲۷۱ ، ۳۷۷	Orthogonal trajectories
اختیار ۲ ، ۵۹ ، ۵۲ ، ۶۸ ، ۸۸ ، ۹۰ ، ۹۵ ، ۱۱۶ ، ۴۸۷ - ۴۸۰	Oscillations
پتہ ۴۶۲	Page
خاص تکملہ ۸ ، ۵۳ ، ۶۳ ، ۸۵ ، ۱۳۴۹	Particular integral
۳۰۷ ، ۵۰۵ ، ۳۰۷	
ع - ۱۳۳ ، ۳۰۷	p-discriminant
رقاص ۵۱ ، ۴۸۴ ، ۴۸۶ ، ۴۹۰	Pendulum
عطا رد کا حضمین ۴۹۲	Perihelion of Mercury
طبیعیات، ملاحظہ ہو ایصال حرارت،	Physics, see <i>Conduction of heat, Corpuscle,</i>
جسمیہ، نفوذ، حرکیات، برق،	<i>Diffusion, Dynamics, Electricity, Hydro-</i>
ماحرکیات، قوہ، ریڈیم، گمک،	<i>dynamics, Potential, Radium, Resonance,</i>
ٹیلیفون، تبخیر، ارتعاشات،	<i>Telephone, Vapourisation, Vibrations, Wave</i>
موجی مساوات وغیرہ	<i>equation, etc</i>
پکرڈ ۱۸۵ ، ۲۳۸	Picard
پکرڈ کا طریقہ ۱۸۶ ، ۲۳۹	Picard's method
پوانکارے	Poincare
پوائسن کا قوسی جملہ (۵ا، ۵ب) ۴۳۹	Poisson's bracket expression (F, F)
پوائسن کا طریقہ ۳۷۶	Poisson's method
موجی مساوات کا پوائسن کا حل ۴۳۹	Poisson's solution of the Wave equation
قوہ ۲۶۲ ، ۳۸۰	Potential
قوت کے سلسلے ۷ ، ۲۱۶ ، ۲۴۴	Power series
ابتدائی ۸	Primitive
ریڈیم ۴۲	Radium
حقیقی ندرت ۴۲۴	Real singularity
رتبہ کی تحویل ۲۱۶ ، ۲۳۲	Reduction of order

لگرائج کی مساوات ۵۰۵	Lagrange's equation
لگرائج کی خطی جزئی مساوات ۳۹۸ ، ۳۹۰ ، ۴۵۸ ، ۳۱۴	Lagrange's linear partial differential equation
لاپلاس	Laplace
لاپلاس کی مساوات ۳۶۷ ، ۳۸۰ ، ۳۷۸ ، ۹۹ ، ۴۹۹	Laplace's equation
آخری ضرب ۴۹۶	Last multiplier
جدو مقابلہ کے قوانین ۵۶	Laws of algebra
لیجنڈر ۳۱۷	Legendre
لیجنڈر کی مساوات ۴۲۷ ، ۲۳۷ ، ۲۳۱	Legendre's equation
لےبیز	Leibniz
لای ۴۶۲	Lie
خطی فرق مساواتیں ۵۰۴	Linear difference equations
پہلے درجہ کی خطی مساواتیں (سادہ) ۳۰ ، ۵۰۱	Linear equations (ordinary), of the first order
دوسرے درجہ کی خطی مساواتیں (سادہ) ۱۶۷ ، ۱۷۰ ، ۱۷۱ ، ۵۰۰	Linear equations (ordinary), of the second order
مستقل سروں والی خطی مساواتیں (سادہ) ۵۰۱	Linear equations (ordinary), with constant Coefficients
خطی مساواتیں (جزئی) پہلے درجہ کی ۹۵ ، ۳۹۸ ، ۳۹۰	Linear equations (partial), of the first order
خطی مساواتیں (جزئی) مستقل سروں والی ۲۹۷ ، ۳۵۵ ، ۳۳۶ ، ۹۵	Linear equations (partial), with constant coefficients
خطی طوط پر غیر تابع تکمیلے ۵۰۳	Linearly independent integrals
خطوط قوت ، ۳۶۲	Lines of force
موجی مساوات کا لیولی کا حل ۴۳۹	Liouville's solution of the wave equation
لوباتو	Lobatto
میکسول کی مساواتیں ۱۱۴	Maxwell's equations
میر کا طریقہ ۴۱۳	Mayer's method
میکانیات ملاحظہ ہو حرکیات	Mechanics, see Dynamics
مرتعش جھلی ۳۰۹	Membrane, vibrating
مونجے ۳۴۳	Monge
مونجے کا طریقہ ۳۶۰ ، ۳۶۵	Monge's method
ضارب ۴۶۵ ، ۴۹۲ ، ۴۹۵	Multipliers
نیوٹن	Newton
عقدہ طریق ۱۴۹ ، ۳۸۹	Node-locus
نا تکمل یوزر مساواتیں ۳۷۸	Non-integrable equations
طبیعی شکل ۱۸۰ ، ۱۸۱	Normal form
طبیعی تکمیلے ۴۳۹	Normal integrals

۴	اشاہیہ	نمبر ق مساواتیں
هندسہ ۱۰، ۳۵، ۱۲۵، ۲۶۱، ۲۶۶، ۲۸۹، ۳۳۵، ۳۴۴، ۳۷۶، ۳۸۲، ۵۰۶	Geometry	
گرسا، ۴۶۱	Goursat	
ترسیبی طریقے ۱۰، ۱۳	Graphical methods	
گروہ، ۲۳، ۴۶۱	Groups	
ہیملٹن کی مساواتیں ۴۹۳	Hamilton's equations	
حرارت ۱۰۰، ۱۰۳، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۵، ۱۱۶، ۴۱۷	Heat	
ہیوی سائڈ ۱۱۳، ۱۱۸	Heaviside	
ہیون ۳۰۵	Heun	
ہیون کا عددی طریقہ ۳۰۵	Heun's numerical method	
ہل - جے - جے - ۱۲۵، ۲۹۷، ۳۰۷، ۳۶۲، ۴۵۸، ۴۹۱	Hill, M. J. M.	
متجانس مساواتیں، ۳۵، ۷۷، ۸۴، ۱۶۱، ۳۴۰، ۳۴۶، ۴۹۸	Homogeneous equations	
متجانس خطی مساواتیں، ۷۷، ۸۴، ۳۴۰، ۳۴۶، ۴۹۸	Homogeneous linear equations	
ماحرکیات ۴۸۸	Hydrodynamics	
زائڈ ہندسی مساوات ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۴۶، زائڈ ہندسی سلسلہ ۱۸۲، ۲۳۵	Hypergeometric equation Hypergeometric series	
قوت ثانی مساوات ۲۱۶، ۲۱۸	Indicial equation	
نقاط انعطاف کا طریق ۴۹۸	Inflection, locus of points of	
ابتدائی شرطیں ۵۶، ۵۱، ۱۰۲	Initial conditions	
معاہدہ سے تکمیل ۲۳، ۴۴	Inspection, integration by	
تکمیل جرو ضربی ۲۳، ۳۰، ۴۰، ۴۱، ۱۷۹، ۴۱۰، ۴۷۱، ۵۰۸	Integrating factor	
تکمیل پذیری ۲۷۳، ۲۸۴، ۴۵۵، ۸۹۵	Integrability	
تکمیلی مساوات ۱۸۹	Integral equation	
درمیانی تکمیل ۴۶۱	Intermediate intergral	
غیر متغیر ۱۸۱	Invariant	
جیکوبی، ۴۲۶	Jacobi	
جیکوبی کا آخری ضرب ۴۹۵	Jacobi's Last Multiplier	
جیکوبی کا طریقہ ۳۲۶، ۴۵۹، ۴۹۳	Jacobi's method	
کیلون ۱۱۳، ۱۱۶، ۴۹۷	Kelvin	
کلائن	Klem	
کٹا ۱۸۶، ۲۰۵، ۲۱۴	Kutta	
کٹا کا عددی طریقہ ۳۰۵	Kutta's numerical method	
لگرانج، ۹۴، ۱۵۹، ۲۲۱	Lagrange	
لگرانج کی حرکی مساواتیں ۴۹۳	Lagrange's dynamical equations	

حرکیات ۳، ۴۳، ۵۹، ۶۸، ۸۸، ۹۰، ۹۵، ۹۱۹، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۷۷، ۹۸۰ - ۹۹۶	Dynamics
زمین کی عمر ۹۱۶	Earth, age of
آئن اسٹائن ۴۹۰	Einstein
برق ۵۲، ۸۹، ۹۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۲۲، ۹۲۸، ۹۳۰	Electricity
استقامت ۳، ۹۵، ۹۶، ۳۵۸، ۳۸۷	Elimination
لغای ۱۲۶، ۱۳۵، ۲۹۰، ۳۰۶، ۳۲۸، ۳۸۸، ۳۹۸، ۳۹۹	Envelope
معادلیت ۱۸۱	Equivalence
یولر ۲۲، ۴۵، ۹۴	Euler
ٹھیک مساواتیں ۲۲، ۴۱، ۱۸۰، ۳۸۲	Exact equations
مسائل موجودگی ۲۳۸، ۵۰۰	Existence theorems
عامل کی اجزائے ضربی میں تحلیل ۱۶۷	Factorisation of the operator
گرتا ہوا جسم ۴۳، ۹۶	Falling body
گرتی ہوئی زنجیر ۴۸۸	Falling chain
محدود فرق ۵۰۵	Finite differences
پہلے درجہ اور پہلے درجہ کی سادہ ۲۱، ۲۶۱	First order and first degree, ordinary;
پہلے درجہ اور پہلے درجہ کی جڑی، ۲۹۸، ۲۹۹	First order and first degree, partial.
پہلے درجہ لیکن اعلیٰ درجہ کی سادہ ۲۲۰	First order but higher degree, ordinary;
پہلے درجہ لیکن اعلیٰ درجہ کی جڑی، ۳۰۲، ۳۲۱، ۳۲۶	First order but higher degree, partial.
فانتی	Fontaine
فورسائٹھ ۲۹، ۴۶۱	Forsyth
فو کو کا رقص ۴۹۰	Foucault's pendulum
فوریئر ۱۰۴	Fourier
فوریئر کا تکملہ ۱۱۶	Fourier's integral
فوریئر کا سلسلہ ۱۰۶	Fourier's series
فروبنیوس ، ۴۱۵	Frobenius
فروبنیوس کا طریقہ ۲۱۵، ۲۵۰، ۴۱۶	Frobenius' method
فوش	Fuchs
فوشی کے نمونہ کی مساواتیں ۴۲۶	Fuchsian type, equations of
فوش کا مسئلہ ۴۲۰	Fuchs' theorem
اختیاری تمام اعلیٰ ۹۵، ۲۶۸، ۲۶۹، ۳۴۳	Functions, arbitrary
گاؤس ۴۱۷	Gauss
عام تکملہ ۲۶۸، ۲۹۱، ۲۹۴، ۴۱۰	General integral
عام حل ۶	General solution

متغیروں کی تبدیلی ۱۶۵ '۱۵۵ '۱۱۸ '۷۷	Change of variables
۳۲۴ '۳۳۶ '۲۳۴ '۱۸۲ '۱۷۶	
میز نمائندہ ۴۲۸	Characteristic index,
۳۱۱ '۹۱۱ '۱۰	Characteristics
چارپی ۳۲۱	Charpit
چارپی کا طریقہ ۳۲۱	Charpit's method
کیمیا ۴۸۶	Chemistry
کرسٹل ۲۹۸	Chrystal
کلیرو، ۱۴۲	Clairaut
کلیرو کی شکل ۳۹۷ '۳۹۹ '۳۸۸ '۹۵۵ '۹۶۲	Clairaut's form
مشترک ابتدائی ۱۷	Common primitive
مقدم تغافل ۵۳ '۱۶۱ '۳۲۹ '۵۰۵	Complementary function
کامل تکملہ ۳۰۲	Complete integral
کامل ابتدائی ۸	Complete primitive
تکمل پذیری کی شرطیں ۲۷۳ '۲۸۴ '۴۵۵	Conditions of integrability
۴۵۹	
ایصال حرارت ۱۰۰ '۱۰۳ '۹۱۱ '۱۱۲ '۱۱۵	Conduction of heat
۴۹۷ '۱۱۶	
مجموع رائد هندسی مساوات ۴۳۵	Confluent hypergeometric equation
هم ماسکی مخروطیات ۴۲ '۱۵۵	Confocal conics
مزدوج تعامل ۴۳ '۲۷۸	Conjugate functions
مستقل سر، ۴۵ '۹۵ '۳۲۶ '۳۵۵	Constant coefficients
۴۹۸ '۵۰۰ '۵۰۵	
اختیاری مستقل ۳ '۹۶ '۲۴۸ '۲۴۹ '۵۰۱	Constants, arbitrary
استدقاق ۲۲۰ '۲۴۲	Convergence
ایک جسیہ کا راستہ ۹۱	Corpusele, path of a
چلیبی نسبت ۴۰۳	Cross-ratio
قرن طریق ۱۳۰ '۱۳۸ '۲۸۹ '۳۹۲	Cusp-locus
ڈالبرٹ ۴۵ '۸۴ '۹۲	D'Alembert
ڈارلو	Darboux
محدود تکملوں کے ذریعہ حل ۴۹۷ '۴۹۸	Definite Integrals, solution by
درجہ ۲	Degree
رتبہ کی تحویل ۱۵۹	Depression of order
کشاد پذیر سطح ۲۷۶	Developable surface
تفرق مساواتیں ۵۰۴	Difference equations
جبری تفرق مساواتوں کی خاص مشکلات ۹۸	Difficulties, special, of partial differential equations
عک کا نفوذ ۱۱۷	Diffusion of salt
میز ۱۲۸ '۱۳۳ '۳۰۷ '۳۸۷	Discriminant
ثنویت ۳۱۸ '۳۷۷ '۴۹۳	Duality

## اشاریہ

# تفرقی مساواتیں

آڈمز ۴۴۵	Adams
آڈمز کا عددی طریقہ ۴۴۵	Adams' numerical method
مبین مساواتیں ۵۰۸	Adjoint equations
امپیر ۳۶۵	Ampere
انگسٹروم کی دریافت کا انحصارام کا طریقہ ۱۱۲	Angstrom's determination of diffusivity
ظاہری بدلت ۲۲۴	Apparent singularity
تقریبی طریقے ۶، ۱۸۵، ۲۲۶، ۴۹۱	Approximate methods
اختیاری مستقل ۳، ۹۶، ۲۴۸، ۲۴۹، ۵۰۱	Arbitrary, constants
اختیاری تعامل ۹۵، ۲۹۱، ۳۳۳	Arbitrary functions
مقتاری سلسلے ۴۳۵، ۵۰۰	Asymptotic series
امدادی مساوات ۴۹، ۳۴۸، ۵۰۴	Auxiliary equation
مرتلش ڈنڈا ۲۷۹	Bar, vibrating
بیٹ من ۴۴۳، ۴۶۲	Bateman
برنولی ۲۲، ۳۳	Bernoulli
برنولی کی مساوات ۳۳	Bernoulli's equation
بیسل ۲۱۷	Bessel
بیسل کی مساوات ۲۲۲، ۲۴۸، ۲۳۳، ۲۳۷	Bessel's equation
۴۲۷، ۴۳۴، ۵۰۲	
بول	Boole
بیر طریق بطور حدود ۳۸۹	Boundaries, discriminant loci as
حدودی شرطیں ۱۰۴، ۱۰۹	Boundary conditions
برایو اور بوکے	Briot and Bouquet
براڈنسکی کا تریسیمی طریقہ ۱۰	Brodetsky's graphical method
براموچ ۴۹۰	Bromwich
کوشی، ۲۳۸، ۳۰۷	Cauchy
کیلے	Cayley
ج - میٹر ۱۲۸، ۳۰۷	c-discriminant

# اغلاطنا

## تفرقی مساوتیں

صحیح	غلط	نہا	صحیح	غلط	نہا
تماس	tac-locus	۱۴۰ شکل	و-۱	تولما	۲ ۳۵
"	"	۱۴۱ اسطر	قبیل	نظام	۱۷ ۳۷
"	"	۱۹۱ ۱۴۳	ہوتی	نہوتی	۶ ۴۵
پروفیسر	فروفیسر	۱۸۵ فنڈوٹ	و-۱	تولا	۱ ۵۶
لا	لا	۱۹۱ شکل	اختیاری	اختیاری	۱ ۸۸
(لا، ما)	(لا، ما)	۱۹۱ فنڈوٹ	و-۱۳	و-۱۳	۱۳ ۱۰۹
جب	جب	۱۹۳ م سطر	طول میں	طول	۱۸ ۱۱۳
پہلی رقم سے پہلا فقرہ		۱۹۶ ۳ تا ۲	تماس	tac-locus	{ ۶ و ۴ ۱ ۱۳۷ ۱۰ و ۱۱ ۱۱ }
تعبیر ہوتا ہے یہ			"	"	۵ ۱۳۸
تقریب دفعہ ہدیں			"	"	۱۲ ۱۳۹
نریکٹ آچکا تھا او			"	"	۱۳ ۱۴۰
اس کو روک دیا جائے					
تھا۔					

صحیح	غلط	۴	۵	صحیح	غلط	۴	۵
رقم	رقم	۱۰	۲۹۶	۰	جہاں گے = حرف (ا)	۱۶	۱۹۶
کو استعمال لا = لا	کو استعمال	۱۲	۲۳۵	۰ = لا	= لا	۴	۱۹۹
۲-۳	۲-۳	۱۵	۲۳۰	۰، ۴ = ۵	۰، ۴ = ۰	۶	۲۰۲
خطی	خطی	۵	۳۵۵	ع	پ	۳	۲۱۲
اس	اس	۷	۳۵۷	تفرقی	تفرقی	۱۱	۲۱۶
اندرویری امیر (پیرس)	اندرویری امیر (پیرس)	۳۶۵	۳۶۵	تعبیر	تعبیر	۱۱	۲۱۶
ن	ن	۶	۲۲۰	ن	ن	۶	۲۲۰
کرنے	کرنے	۱۶	۳۷۰	ج + ن - ۲	ج + ن - ۲	۱۱	۲۲۰
(۱۲-۱۶)	(۱۲-۱۶)	۲۲	۳۷۰	کے	کے	۱۳	۲۲۶
تکمل پذیر	تکمل پذیر	۹	۳۷۵	مساوات	حل	۳	۲۳۵
تراش	تراش	۲۰	۳۷۵	دوسری	موردی	۸	۲۳۶
تفاعل	تفاعل	۱	۳۹۰	قوت نمائی	قوت نما	۱۶	۲۳۷
ہر نقطہ	ہر نقطہ	۲	۳۹۳	ن - ۱	ن - ۱	۱۹	۲۳۹
جذب	جذب	۶	۴۵۵	باقاعدہ	باقاعدہ	۱۲	۲۶۰
جذب لا	جذب لا	۶	۴۵۵	Index: لے	index	۱۲	۲۶۰
موجودگی	موجودگی	۱۵	۵۰۰	۲	۲	۱۰	۲۶۹
۱ + ۱	۱ + ۱	۱۴	۵۲۱	جف فا	جف فا	۱۵۹	۲۷۶
۲ (۱ + لا) ۲	۲ (۱ + لا) ۲	۸	۵۶۲	فری	فرنی	۱۰	۲۷۹
لا = ۱	لا = ۵	۱۶	۵۶۲	تاکمیل پذیر	تاکمیل پذیر	۱۳	۲۸۳



